УДК 512

Ю. Г. Леонов

О МАТРИЦАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ 2-ГРУПП КАЛУЖНИНА

Yu. G. Leonov. *On representation matrices of Kaloujnine's 2-groups*, Mat. Stud. **36** (2011), 34–39.

Images of the faithful triangular representation of Kaloujnine's 2-groups are obtained.

Ю. Г. Леонов. *О матрицах представления 2-групп Калужнина* // Мат. Студії. – 2011. – Т.36, №1. – С.34–39.

В работе дается полное описание образов точного треугольного представления 2-групп Калужнина над полем из 2 элементов.

1. Введение. *Операция сплетения* $A \wr B$ двух групп A и B является одной из важнейших конструкций в теории групп, позволяющей получать новые группы при помощи уже известных. Назовем *группой Калужнина* $P_{2,n}$ n-кратное сплетение групп порядка 2, построенное в [1]. Группа Калужнина $P_{2,n}$ является силовской 2-подгруппой симметрической группы $S_{2^{n+1}}$, а потому класс этих групп занимает одно из центральных мест в теории конечных и финитно-аппроксимируемых групп. Множество этих групп можно определить рекуррентно следующим образом. Положим $P_{2,0} = \mathbb{Z}_2, P_{2,n} = P_{2,n-1} \wr \mathbb{Z}_2,$ при $n > 0$. Согласно [2], каждый элемент группы Калужнина $y \in P_{2,n}$ можно представить в виде таблицы $y = [y_{0,1}, y_{1,1} + y_{1,2}t_1, \ldots, y_{n,1} + y_{n,2}t_1 + \cdots + y_{n,2^n}t_1 \cdots t_n]$. Здесь на i-том месте $(0 \leq i \leq n)$ в таблице стоят многочлены $y_i(t_1, \ldots, t_i)$, которые являются представителями минимальной степени классов смежности кольца многочленов $\mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_i]$ по модулю идеала, порожденного многочленами вида $t_1^2 - t_1, \ldots, t_i^2 - t_i$. Операция произведения в таблицах, согласованная с операцией сплетения, определяется следующим образом:

$$[y_0, y_1(t_1), y_2(t_1, t_2), \ldots] \cdot [z_0, z_1(t_1), z_2(t_1, t_2), \ldots] =$$
$$= [y_0 + z_0, y_1(t_1 + z_0) + z_1(t_1), y_2(t_1 + z_0, t_2 + z_1(t_1)) + z_2(t_1, t_2), \ldots].$$

В работах [3] и [4] были указаны и построены точные представления f_n групп $P_{2,n}$, $n \in \mathbb{N}$ унитреугольными матрицами $UT_m(2)$ наименьшей возможной размерности $m = 2^n + 1$. Данные представления исследовались в связи с другой проблемой в работе [5], однако до сих пор не был получен точный матричный вид образов элементов групп $P_{2,n}$. В данной работе мы получаем полное описание элементов матриц $f_n(y)$, $y \in P_{2,n}$.

2. Представление 2-групп Калужнина унитреугольными матрицами. Построим искомое представление 2-группы Калужнина, согласно [4]. Пусть $t_{i_1} \cdots t_{i_m}$ — некоторый одночлен. *Высотой* такого *одночлена* называем число

$$h(t_{i_1} \cdots t_{i_m}) = 1 + \sum_{s=1}^{m} 2^{i_b - 1}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 20E22, 20H30.

Отдельно полагаем, что высота нулевого многочлена равна нулю. Очевидно, любой многочлен может быть однозначно представлен в виде суммы одночленов попарно разных высот.

Для $y \in P_{2,n}$ обозначим $y = [y_0, y_1(t_1), \dots, y_n(t_1, \dots, t_n)]$. Пусть

$$y_i(t_1, \dots, t_i) = \sum_{j=1}^{2^i} y_{i,j} t(j),$$

где $t(j)$ — одночлен высоты j, $t(1) = 1$. Наибольшая из высот одночленов с ненулевым коэффициентом в последней сумме называется *высотой многочлена.*
Определим теперь *действие таблицы* $y \in P_{2,n}$ *на многочлен* g высоты $k \in \{1, \dots, 2^n + 1\}$, согласно [4]. Для данных n и g составим таблицу элемента $\overline{g}$ в сплетении $P_{2,n+1}$ следующим образом. Первые n координат таблицы выберем нулевыми, а последнюю координату возьмем равной g. Легко видеть, что определение корректно и $\overline{g} \in P_{2,n+1}$. Определим по заданому y элемент $\widetilde{y} = [y_0, \dots, y_n(t_1, \dots, t_n), 0] \in P_{2,n+1}$. Рассмотрим элемент $\overline{g}^{\widetilde{y}} = \widetilde{y}^{-1} \cdot \overline{g} \cdot \widetilde{y}$. Все координаты его таблицы нулевые, кроме, быть может, последней. Многочлен, явлющийся последней координатой, обозначим просто g^y. Высота многочлена $h(g)$ совпадает с высотой $h(g^y)$, как было замечено еще в работах Л. Калужнина. Будем говорить, что многочлен g^y получен действием элемента y на многочлен g.

Из определения произведения таблиц сплетений ясно, что многочлен $t(j)^y$ не зависит от фиксированного числа n. Пусть $\tau_{n,m} \colon P_{2,n} \to P_{2,m}$ — гомоморфизм, который убирает лишние координаты в таблицах при $n > m$ и дописывает необходимые нулевые координаты в случае $n < m$. Действие y на $t(j)$ можно определить в сплетении $P_{2,m}$, $m = [\log_2(j+1)]$, положив $t(j)^y = t(j)^{\tau_{n,m}(y)}$. Заметим, что высота многочлена в последней координате таблицы $y \in P_{2,n}$ ограничена числом 2^n.

Пусть $UT_N(2)$ — группа нижнетреугольных обратимых матриц размерности N над полем из двух элементов. Определим представление f_n группы $P_{2,n}$ матрицами из группы $UT_{2^n+1}(2)$, данное в работе [4].

Рассмотрим одночлены $t(i)$ высот $i \in \{1, 2, \dots, 2^n + 1\}$ и многочлены $t(i)^y = \sum_{j=1}^{i} u_{i,j} \cdot t(j)$. Возьмем квадратную матрицу $Y = f_n(y)$ размерности $2^n + 1$ с условием $Y_{i,j} = 0$, если $i < j$ и $Y_{i,j} = u_{i,j}$, если $i \geq j$. Из определения видно, что $Y_{i,i} = u_{i,i} = 1$ и, следовательно, отображение f_n задано корректно.

Теорема 1 ([4])**.** *Отображение $f_n \colon P_{2,n} \to UT_{2^n+1}(2)$ является мономорфизмом. Не существует изоморфных вложений группы $P_{2,n}$ в группу унитреугольных матриц над $\mathbb{Z}_2$ меньшей размерности.*

Общий вид матрицы $f_n(y)$ (от переменных $y_{0,1}, y_{1,1}, y_{1,2}, \dots$) до сих пор полностью не исследован. Некоторую информацию можно получить из утверждений, данных в работе [5].

Лемма 1 ([5])**.** *Для $k = 0, 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, 2^k$ выполняется:*

1. $f_n(y)_{2^k+1,j} = y_{k,j}$;
2. *При $i < 2^k + 1$ в элементе $f_n(y)_{i,j}$ нет переменных $y_{k,1}, \dots, y_{k,2^k}$.*

Кроме того, как следует из определения, $f_n(y)_{i,j} = f_{n'}(y)_{i,j}$ для всех натуральных n, n' и подходящих по размерности матриц значений i, j. То есть, отображения f_n согласованы между собой, как отмечалось еще в работе [3].

3. Элементы матрицы $f_n(y)$ для $y \in P_{2,n}$. Пусть $y = [y_0, \dots, y_n(t_1, \dots, t_n)]$ — произвольный элемент группы Калужнина $P_{2,n}$, $y_i(t_1, \dots, t_i) = \sum_{j=1}^{2^i} y_{i,j} t(j)$. Обозначим, $Y = f_n(y)$ и посмотрим на эту матрицу, как на матрицу с набором неизвестных переменных $y_{0,1}, y_{1,1}, \dots, y_{n,2^n}$, пробегающих кольцо $\mathbb{Z}_2$. Целью нашей работы является получения общего вида элементов матрицы $Y_{i,j}$, $2^n + 1 \geq i > j \geq 1$ от этого набора переменных.

Из определения матрицы Y следует, что любой элемент $Y_{i,j}$ является многочленом от переменных $y_{0,1}, y_{1,1}, \dots, y_{n,2^n}$, который является суммой одночленов вида $y_{h_1,r_1} \cdots y_{h_q,r_q}$ с условием попарного неравенства $h_s \neq h_{s'}$ для всех $s \neq s'$. Нетрудно видеть из определения Y также тот факт, что в каждой строке этой матрицы любой одночлен вида $y_{h_1,r_1} \cdots y_{h_q,r_q}$ встречается не более одного раза.

Из леммы 1 следует описание многочленов $Y_{i,j}$ для $i = 2^k + 1$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Получим описание многочленов в общем случае. Для этого, рассмотрим номер строки или столбца матрицы в двоичном виде. А именно, для натурального $k \leq n$ и $0 \leq i \leq 2^k - 1$, рассмотрим двоичную последовательность длины k: $i|_2^k = i_k \dots i_1$, удовлетворяющую равенству

$$i = \sum_{s=1}^{k} i_s \cdot 2^{s-1}$$

(индексация последовательности ведется справа налево и начинается с единицы).

На множестве двоичных последовательностей длины k введем операцию $\vee$ "побитового или", полагая $i_k \dots i_1 \vee j_k \dots j_1 = d_k \dots d_1$, где $d_s = \max\{i_s, j_s\}$ — в обычном понимании максимума $(0 < 1)$ среди двух чисел множества $X = \{0, 1\}$.

Для некоторой двоичной последовательности $\tilde{i}$ длины k, рассмотрим множество $\rho(\tilde{i})$, состоящее из индексов элементов, равных 1 в последовательности $\tilde{i}$ с правилом индексации, описанным выше. Заметим, что в многочлене $y_s(t_1, \dots, t_s)$ $(s \leq k)$ индекс j коэффициента $y_{s,j}$ при одночлене $t(j) = t_{i_1} \cdots t_{i_l}$ удовлетворяет соотношению:

$$\rho((j-1)|_2^k) = \{i_1, \dots, i_l\}. \tag{1}$$

Для $1 \leq i \leq k$, обозначим $\mu_k(i) = 2^{i-1}|_2^k$ двоичную последовательность длины k, состоящую из нулей за исключением одной единицы на i-том месте.

Лемма 2. *Пусть $i = 2^k$, $k \leq n$. Тогда одночлен $\theta(y) = y_{h_1,r_1} \cdots y_{h_q,r_q}$, $q \geq 1$ попадает в многочлен $Y_{i,j}$ тогда и только тогда, когда*

$$(j-1)|_2^k = \bigvee_{u=1}^{k} \delta^{\{k\}}(u, \theta(y)),$$

где

$$\delta^{\{k\}}(u, \theta(y)) = \begin{cases} (r_s - 1)|_2^k, & \text{если } u = h_s + 1 \text{ для некоторого } s = 1, \dots, q \\ \mu_k(u), & \text{если } u \notin \{h_1 + 1, \dots, h_q + 1\}. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим строку матрицы с номером $i = 2^k$. По определению матрицы Y, многочлен $Y_{i,j}$ является коэффициентом при одночлене $t(j)$ в выражении

$$(t_1 \cdots t_k)^y = (t_1 + y_{0,1}) \cdots (t_k + y_{k-1,1} + \cdots + y_{k-1,2^{k-1}} t_1 \cdots t_{k-1}). \tag{2}$$

Как было замечено выше, любой одночлен вида $y_{h_1,r_1}\cdots y_{h_q,r_q}$ попадает не более, чем в один многочлен $Y_{i,j}$ при фиксированном номере строки i. Поэтому, нам необходимо выяснить при каком одночлене $t(j)$ в выражении (2) находится коэффициент $\theta(y)$. Заметим теперь, что произведение вида $t(r)\cdot t(r')$ является одночленом $t(\bar{s})$, где $(\bar{s}-1)|_2^k = (r-1)|_2^k \vee (r'-1)|_2^k$. Поэтому, $y_{h,r}t(r)\cdot y_{h',r'}t(r') = (y_{h,r}\cdot y_{h',r'})t(\bar{s})$. Продолжая наши рассуждения, получаем верность равенства

$$\prod_{s=1}^{q}(y_{h_s,r_s}t(r_s)) = \Big(\prod_{s=1}^{q}y_{h_s,r_s}\Big)t(\bar{j}),$$

где $(\bar{j}-1)|_2^k = \bigvee_{s=1}^q (r_s-1)|_2^k$. В выражении (2) каждое слагаемое получается из k сомножителей (по одному из каждой скобки). Поэтому, одночлен $\theta(y)$ является коэффициентом при одночлене $t(\bar{s})\cdot \prod\limits_{\substack{u=1\\ u\notin\{h_1+1,\ldots,h_q+1\}}}^{k} t_u$. Таким образом, каждый сомножитель последнего произведения присутствует в одночлене $t(j)$. Это присутствие можно отметить "побитовым или" с последовательностью $\mu_k(u)$ для всех u из этого произведения. Но других множителей при коэффициенте $\theta(y)$ нет. Поэтому, $\theta(y)$ является коэффициентом при одночлене $t(j)$ с указанным в лемме j. $\square$

Зафиксируем натуральное число i с условием $2^{k-1}+1 < i < 2^k$. Из определения матрицы Y нетрудно увидеть, что в строке с номером i матрицы Y расположены многочлены $Y_{i,1},\ldots,Y_{i,i-1}$, в которые могут входить только одночлены вида $y_{h_1,r_1}\cdots y_{h_q,r_q}$ с условием $\{h_1+1,\ldots,h_q+1\}\subseteq\rho(i-1)$.

Пусть $\theta(y) = y_{h_1,r_1}\cdots y_{h_q,r_q}$. Обозначим, $H(\theta(y)) = \{h_1+1,\ldots,h_q+1\}$ и рассмотрим функцию

$$\delta_i^{\{k\}}(u,\theta(y)) = \begin{cases} (r_s-1)|_2^k, & \text{если } u = h_s+1 \text{ для некоторого } s = 1,\ldots,q\\ \mu_k(u), & \text{если } u\in\rho(i-1)\setminus H(\theta(y))\\ 0|_2^k, & \text{если } u\notin\rho(i-1).\end{cases}$$

Лемма 3. *Пусть i удовлетворяет неравенству $2^{k-1}+1 < i < 2^k$, $k\le n$. Тогда одночлен $\theta(y) = y_{h_1,r_1}\cdots y_{h_q,r_q}$ попадает в многочлен $Y_{i,j}$ тогда и только тогда, когда $H(\theta(y))\subseteq\rho(i-1)$ и*

$$(j-1)|_2^k = \bigvee_{u\in\rho(i-1)}\delta_i^{\{k\}}(u,\theta(y)).$$

Доказательство. По аналогии с доказательством предыдущей леммы, рассмотрим одночлен $t(i) = t_{i_1}\ldots t_{i_l}$ высоты i и выражение

$$(t_{i_1}\ldots t_{i_l})^y = (t_{i_1}+y_{i_1-1,1})\cdots(t_{i_l}+y_{i_l-1}(t_1,\ldots,t_{i_l-1})). \tag{3}$$

Пусть $\theta(y) = y_{h_1,r_1}\cdots y_{h_q,r_q}$ удовлетворяет условию $H(\theta(y))\subseteq\rho(i-1)$. Следовательно, этот одночлен присутствует в выражении (3) в виде коэффициента при некотором $t(j)$. Найдем это j.

Среди l множителей выражения (3), найдется q множителей, каждое из которых имеет по одному слагаемому из множества $\{y_{h_1,r_1}t(r_1),\ldots,y_{h_q,r_q}t(r_q)\}$. Причем, других элементов с коэффициентами $y_{h_1,r_1}, \ldots, y_{h_q,r_q}$ в (3) нет. Отсюда, в одночлен $t(j)$ входит произведение $t(r_1)\cdots t(r_q) = t(\bar{j})$, где

$$(\bar{j}-1)|_2^k = \bigvee_{s=1}^{q} (r_s - 1)|_2^k.$$

Остальные $l-q$ сомножителей произведения (3) дают в слагаемое с коэффициентом $\theta(y)$ одночлены вида t_u, для всех $u \notin H(\theta(y))$. Как и в лемме 2, вклад одночленов вида t_u в формирование одночлена $t(j)$ можно выразить в виде последовательности $\mu_k(u)$ при получении номера $j-1$ с помощью "побитового или". Осталось заметить, что среди одночленов t_u все индексы $u \in \rho(i-1)$ и других вкладов в формирование одночлена $t(j)$ нет. Следовательно, j удовлетворяет условию леммы. □

Леммы 2 и 3 позволяют получить полное описание элементов матрицы $f_n(y)$ как многочленов от переменных $y_{0,1}, y_{1,1}, \ldots$. Рассмотрим, например, строение 4-ой строки матрицы $Y = f_2(y)$. По определению представления, в 4-ой строке встречаются одночлены вида: $y_{0,1}$, $y_{1,1}$, $y_{1,2}$, $y_{0,1}y_{1,1}$, $y_{0,1}y_{1,2}$, причем каждый одночлен встречается один и только один раз. Осталось определиться в каких столбцах матрицы Y они лежат. Применение леммы 2 отразим в следующей таблице:

Многочлен	Применение леммы 2	Номер столбца
$y_{0,1}$	$00 \vee 10 = 10$	$2+1=3$
$y_{1,1}$	$01 \vee 00 = 01$	$1+1=2$
$y_{1,2}$	$01 \vee 01 = 01$	$1+1=2$
$y_{0,1}y_{1,1}$	$00 \vee 00 = 00$	$0+1=1$
$y_{0,1}y_{1,2}$	$00 \vee 01 = 01$	$1+1=2$

В итоге, имеем, $Y_{4,1} = y_{0,1}y_{1,1}$, $Y_{4,2} = y_{1,1} + y_{1,2} + y_{0,1}y_{1,2}$ и $Y_{4,3} = y_{0,1}$.

Следующий результат позволяет установить рекуррентную зависимость между расположением одночленов определенного вида в строках с номерами 2^{k-1} и 2^k матрицы Y.

Лемма 4. *Пусть одночлен $\theta(y) = y_{h_1,r_1}\cdots y_{h_q,r_q}$ входит в многочлен $Y_{2^{k-1},j}$, $k \le n$. Тогда, в строке с номером 2^k матрицы Y одночлен $\bar{\theta}(y) = y_{h_1,r_1}\cdots y_{h_q,r_q}y_{k-1,\bar{i}}$ лежит в столбце с номером $\bar{j}$, для которого выполняется равенство*

$$(\bar{j}-1)|_2^k = (j-1)|_2^k \vee (\bar{i}-1)|_2^k.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение (2) для выбранного k. Выражение, состоящее из первых $k-1$ множителей в (2) справа содержат слагаемое вида $\theta(y)t(j)$ так как это слагаемое входит в многочлен $Y_{2^{k-1},j}$ по условию леммы. А последний множитель в (2) дает этому слагаемому множитель $y_{k-1,\bar{i}}t(\bar{i})$. Таким образом, в выражении (2) коэффициент $\bar{\theta}(y) = \theta(y)y_{k-1,\bar{i}}$ находится при одночлене $t(j)t(\bar{i})$. Как было замечено в доказательстве леммы 2, высота этого одночлена равна $\bar{j}$, для $\bar{j}$, указанного в условии леммы 4. Лемма доказана. □

Отметим, что в обозначениях предыдущей леммы, $j, \bar{i} \le 2^{k-1}$. Следовательно, номер столбца $\bar{j}$ в котором находится одночлен $\bar{\theta}(y)$, согласно лемме, также ограничен числом 2^{k-1}. То есть, многочлены вида $\bar{\theta}(y)$ встречаются в строке с номером 2^k только среди элементов первых 2^{k-1} столбцов матрицы $f_n(y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaloujnine L.A. *La structure des p-groupes de Sylow des proupes symetriques finis*// Ann. Sci. Ecole Norm. Super. – 1948. – V.65. – P. 239–276.
2. Калужнин Л.А. Избранные главы теории групп. – Киев. Изд-во КГУ, 1979. – 52с.
3. Леонов Ю.Г., Некрашевич В.В., Сущанский В.I. *Зображення вінцевих добутків унітрикутними матрицями*// Допов. НАН України. – 2005. – №4. – С. 29–33.
4. Leonov Yu.G. *Representations of residually-finite* 2*-groups by infinite-dimensional unitriangular matrices*// Mat. Stud. – 2004. – V.22, №2. – P. 134–140. (in Ukrainian)
5. Leonov Yu.G. *Immersing wreath powers of the groups* $\mathbb{Z}_2$ *into the Kaloujnine groups*// Mat. Stud. – 2007. – V.28, №1. – P. 18–24. (in Ukrainian)

Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова

кафедра информационных технологий

leonov_yu@yahoo.com

Поступило 24.03.2011