УДК 512.552.12

О. В. Домша

ПРАВЕ КІЛЬЦЕ БЕЗУ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 2, НАД ЯКИМ ТРАНСПОНОВАНА МАТРИЦЯ ДО ЗВОРОТНОЇ МАТРИЦІ ЗВОРОТНА, Є ПРАВИМ КІЛЬЦЕМ ЕРМІТА

O. V. Domsha. *A right Bezout ring with stable range 2, over which transpose matrix to invertible matrix is invertible, is the right Hermite ring*, Mat. Stud. **36** (2011), 31–33.

It is proved that a right Bezout ring with stable range 2, over which transpose matrix to invertible matrix is invertible matrix, is the right Hermite ring.

О. В. Домша. *Правое кольцо Безу стабильного ранга 2, над которым транспонированая матрица к обратимой матрице обратима, является правым кольцом Эрмита* // Мат. Студії. – 2011. – Т.36, №1. – С.31–33.

Доказано, что правое кольцо Безу стабильного ранга 2, над которым транспонированая матрица к обратимой матрице является обратимой, является правым кольцом Эрмита.

Задача діагоналізації матриць є класичною і на сучасному етапі далека до свого завершення [1]. Особливу роль в розв'язанні даної задачі відіграють кільця Безу та кільця Ерміта. Якщо в комутативному випадку є деякі напрацювання [2,3], то нічого такого не можна сказати про некомутативні кільця. В той же час зараз спостерігається прогрес у розв'язанні проблеми діагоналізації матриць над кільцями з використанням у даних дослідженнях такого важливого інваріанту як стабільний ранг кілець. Дане поняття було введено Х. Басом [4] для розв'язання ряду відкритих проблем K-теорії. Виявилося, що стабільний ранг правого кільця Ерміта не перевищує 2. Відомо, що в комутативному випадку кільце Безу є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг не перевищує 2 [5]. Б. В. Забавським [6] поставлене питання: чи буде праве кільце Безу стабільного рангу 2 правим кільцем Ерміта?

В даній роботі отримана відповідь на дане питання для класу правих кілець Безу, над якими транспонована матриця до зворотньої матриці є також зворотньою матрицею.

Під кільцем R будемо розуміти асоціативне кільце з 1 $(1 \neq 0)$.

Означення 1 ([7])**.** *Праве кільце Безу* — це кільце, в якому довільний скінченнопороджений правий ідеал є головним.

Означення 2 ([1])**.** Кільце R називається *правим кільцем Ерміта*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують елемент $d \in R$ і зворотна матриця $P \in GL_2(R)$ такі, що

$$(a, b)P = (d, 0).$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 19B10.

Означення 3 ([8])**.** Кільце R назвемо *кільцем стабільного рангу 2*, якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$, виконується рівність

$$(a + cx)R + (b + cy)R = R$$

для деяких елементів $x, y \in R$.

Теорема 1. *Нехай R — праве кільце Безу стабільного рангу 2, над довільна транспонована матриця до зворотньої матриці є зворотньою матрицею. Тоді R — праве кільце Ерміта.*

Доведення. Згідно із [9] кільце R є кільцем, над яким довільна транспонована матриця до зворотньої матриці є зворотньою матрицею тоді і тільки тоді, коли $R/J(R)$ є комутативним кільцем ($J(R)$ — радикал Джекобсона). Зауважимо, що якщо $J(R) = 0$, то дана теорема очевидно випливає з роботи [5].

Отже, нехай $J(R) \neq 0$. Відповідно до [8] з того, що стабільний ранг кільця R дорівнює 2 випливає, що стабільний ранг $R/J(R)$ теж дорівнює 2. Отже, $R/J(R)$ — комутативне кільце Безу стабільного рангу 2. Враховуючи [5], $R/J(R)$ є кільцем Ерміта.

Доведемо, що довільний унімодулярний рядок над кільцем R може бути доповнений до зворотньої матриці.

Нехай $\bar{R} = R/J(R)$ і $aR + bR = R$. Тоді $\bar{a}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$.

Оскільки R — кільце Ерміта, то відповідно до [5] унімодулярний рядок $(\bar{a}, \bar{b})$ над кільцем R можна доповнити до зворотної матриці

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{u} & \bar{v} \end{pmatrix}.$$

Отже, $\bar{A}\bar{C} = \bar{C}\bar{A} = \bar{J}$, для деякої матриці

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{c} & \bar{x} \\ \bar{d} & \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Тоді $ac + bd = 1 + j_1$, $ax + by = j_2$, $uc + vd = j_3$, $ux + vy = 1 + j_4$ для деяких елементів $j_1, j_2, j_3, j_4 \in J(R)$.

Покладемо

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c & x \\ d & y \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$AC = \begin{pmatrix} 1 + j_1 & j_2 \\ j_3 & 1 + j_4 \end{pmatrix} = J,$$

де $1 + j_1 = u_1$, $1 + j_4 = u_4$, причому за властивостями радикала Джекобсона u_1, u_4 — зворотні елементи.

Доведемо, що для матриці $J = AC$ існує така матриця W, що $JW = WJ = I$, де I — одинична матриця.

Розглянемо

$$\begin{pmatrix} u_1 & j_2 \\ j_3 & u_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{-1} & 0 \\ 0 & u_4^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j_2' \\ j_3' & 1 \end{pmatrix},$$

де $j_2', j_3' \in J(R)$. Тоді $\begin{pmatrix} 1 & j_2' \\ j_3' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -j_2' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j_3' & 1+j \end{pmatrix}$, для деякого елемента $j \in J(R)$. Звідси

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j_3' & 1+j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+j)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j_3' & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j_3' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -j_3' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто для матриці J ми знайшли таку матрицю J_1, що $JJ_1 = I$.

Аналогічно доводимо, що $J_2J = I$ для деякої матриці J_2. Таким чином, матриця $AC = J$ — зворотна. Звідси, $ACJ^{-1} = I$.

Таким самим методом доводимо, що матриця $CA = V$ — зворотна. Тоді $V^{-1}CA = I$ Отже, матриця A — зворотна.

Доведемо, що R є правим кільцем Ерміта. Нехай $a, b \in R$. Оскільки R — праве кільце Безу, то

$$aR + bR = dR$$

для деякого елемента $d \in R$. Звідси $d(a_0u + b_0v - 1) = 0$ і $a_0R + b_0R + c_0R = R$ для деякого елемента $c_0 \in R$ такого, що $dc_0 = 0$. Оскільки стабільний ранг дорівнює 2, то

$$(a_0 + c_0x)R + (b_0 + c_0y)R = R$$

для деяких елементів $x, y \in R$. Згідно доведеного вище, можна знайти зворотну матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} a_0 + c_0x & b_0 + c_0x \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $(d, 0)P = (a, b)$ і звідси

$$(a, b)P^{-1} = (d, 0),$$

тобто R — праве кільце Ерміта. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*// TAMS. – 1949. – V.66. – P. 464–491.
2. Larsen M., Lewis W., Shores T. *Elementary divisor rings and finitelly presented modules*// TAMS. – 1974. – V.187. – P. 231–248.
3. Zabavsky B.V. *Fractionally regular Bezout rings*// Mat. Stud. – 2009. – V.32, №1. – P. 76–80.
4. Bass H. *K-theory and stable algebra*// J. Hautes Etudes S. Publ. Math. – 1964. – V.22. – P. 485–544.
5. Забавський Б.В. *Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2*// Укр. мат. журнал – 2003. – Т.55. – №4. – С. 550–554.
6. Забавський Б.В. Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу 2. – Третя між. алг. конф. в Україні, Суми, 2001.– 179с.
7. Cohn P.M. *Unique factorization domains*// Amer. Math. Monthly. – 1973. – V.80. – P. 1–17.
8. Vaserstein L.N. *The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces*// Funct. Anal. Appl. – 1971. – V.5. – P. 102–110.
9. Gupta R.N., Khuran Anjana, Khuran Dinesh, Lam T.Y. *Rings over which the transpose of every invertible matrix is invertible*// J. Algebra – 2009. – V.322. – P. 1627–1636.

Львівський національний університет ім. І. Франка,
механіко-математичний факультет

Надійшло 10.06.2010