УДК 514.765.1+512.813.4

В. А. Кіосак

ПРО ЕКВІДІСТАНТНІ ПСЕВДОРІМАНОВІ ПРОСТОРИ

V. A. Kiosak. *On equidistant pseudo-riemannian spaces*, Mat. Stud. **36** (2011), 21–25.

Paper treats special pseudo-Riemannian spaces — equidistant manifolds. Author found tensor characteristic necessary and sufficient condition for a space to admit exactly $n-2$ equidistant vector field.

Research was carried out locally, in a tensor form, without any limitation of signature of studied spaces.

В. А. Киосак. *Об эквидистантных псевдоримановых пространствах* // Мат. Студії. – 2011. – Т.36, №1. – С.21–25.

Работа посвящена изучению специальных псевдоримановых пространств — эквидистантных пространств. Найдена тензорная характеристика, необходимые и достаточные условия того, что пространство допускает точно $n-2$ эквидистантных векторных поля.

Исследования ведутся локально, в тензорной форме, без ограничений на сигнатуру изчаемых пространств.

1. Вступ. Робота присвячена вивченню спеціальних псевдоріманових просторів — еквідістантних просторів. Знайдена тензорна характеристика, необхідна і достатня умови того, що допускає точно $n-2$ еквідістантних векторних поля.

Дослідження ведуться локально, в тензорній формі, без обмежень на сигнатуру просторів, що вивчаються.

2. Еквідістантні простори. Псевдоріманів простір V_n з метричним тензором g_{ij} називається еквідістантним, якщо в ньому існує векторне поле $\varphi_i \neq 0$, що задовольняє рівняння

$$\varphi_{i,j} = \tau g_{ij} \ , \tag{1}$$

де τ — деякий інваріант, а кома “,“ — знак коваріантної похідної в V_n. При $\tau \neq 0$ це — еквідістантний простір основного випадку, а при $\tau = 0$ — особливого [1].

Векторне поле, що задовольняє рівняння (1), К. Яно називав *конциркулярним* ([2]). Ми, вслід за Н. С. Сінюковим ([1]), називатимемо його *еквідістантним векторним полем.*

Умови інтегровності основних рівнянь (1) мають вигляд

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = g_{ij}\tau_{,k} - g_{ik}\tau_{,j} \ ,$$

тут R^h_{ijk} — тензор Рімана V_n, З останнього неважко отримати

$$\tau_{,i} = \frac{1}{n-1}\varphi_\alpha R^\alpha_i. \tag{2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 17B66, 53C25, 58B20.

де $R_i^h = g^{\alpha h} R_{\alpha i}, R_{ij}$ — тензор Річчі, g^{ij} — елементи оберненої матриці до g_{ij}. Сукупність рівнянь (1) і (2) носить замкнений характер. Вона є системою лінійних диференціальних рівнянь в коваріантних похідних першого порядку типу Коші з коефіцієнтами, однозначно визначеними простором V_n, відносно невідомого вектора φ_i і інваріанта τ.

Система рівнянь (1) і (2) в просторі V_n для будь-яких початкових значень шуканих функцій

$$\varphi_i(x_0) = \overset{o}{\varphi}_i; \ \tau(x_0) = \overset{o}{\tau},$$

заданих в точці $M_0(x_0)$, має не більше одного розв'язку. Отже, число довільних постійних в загальному розв'язку системи не перевищує числа $\nu = n + 1$.

Оскільки система (1) і (2) лінійна, то вона має не більше ніж ν лінійно незалежних розв'язків зі сталими коефіцієнтами. Відомо, що $n + 1$ лінійно незалежне еквідістантне векторне поле допускають простори постійної кривизни і тільки вони.

3. Еквідістантні простори з не менше ніж $(n-2)$ еквідістантними векторними полями. З умов інтегровності (1) неважко отримати, що

$$\tau_{,k} = B\varphi_k, \tag{3}$$

тут B — деякий інваріант.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо рімановий простір $V_n (n > 2)$ допускає принаймні два лінійно незалежних з сталими коефіцієнтами еквідістантних векторних поля, то в рівняннях (3) інваріант B — деяка стала, однозначно визначена для заданого простору V_n.*

Доведення. Нехай в V_n існують принаймні два лінійно незалежних з сталими коефіцієнтами еквідістантних векторних поля φ_i і $\tilde{\varphi}_i$. Тоді для них виконуються тотожності

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = B(g_{ij}\varphi_k - g_{ik}\varphi_j), \tag{4}$$

$$\tilde{\varphi}_\alpha R^\alpha_{ijk} = \tilde{B}(g_{ij}\tilde{\varphi}_k - g_{ik}\tilde{\varphi}_j), \tag{5}$$

де B, $\tilde{B}$ — деякі інваріанти.

Помноживши (4) на $\tilde{\varphi}_k$ і згортаючи по k, з врахуванням (5), отримаємо

$$(B - \tilde{B})(g_{ij}\varphi_\alpha\tilde{\varphi}^\alpha - \tilde{\varphi}_i\varphi_j) = 0.$$

Припустимо, що $B \neq \tilde{B}$, тоді $g_{ij}\varphi_\alpha\tilde{\varphi}^\alpha - \tilde{\varphi}_i\varphi_j = 0$. З останнього видно, що $\varphi_\alpha\tilde{\varphi}^\alpha = 0$ і $\tilde{\varphi}_i\varphi_j = 0$, а це суперечить нашому припущенню про те, що вектори ненульові. Отже, необхідно має місце $B = \tilde{B}$.

Таким чином, інваріант B однозначно визначається для заданого V_n.

Коваріантно продиференціювавши (4), з урахуванням (1), отримаємо

$$\tau R_{hijk} + \varphi_\alpha R^\alpha_{ijk,h} = (\varphi_k g_{ij} - \varphi_j g_{ik})B_{,h} + \tau B(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) \tag{6}$$

Проциклюємо (6) по індексах h, j, k, а потім результат згорнемо з g^{ij}, будемо мати формулу $B_{,k}\varphi_h - B_{,h}\varphi_k = 0$. З останнього неважко переконатися, що

$$B_{,k} = \gamma\varphi_k, \tag{7}$$

де γ — деякий інваріант.

Аналогічна рівність має місце і для вектора $\tilde{\varphi}_k$: $B_{,k} = \tilde{\gamma}\tilde{\varphi}_k$. Тоді, порівнюючи останнє з (7), внаслідок того, що вектори φ_k і $\tilde{\varphi}_k$ неколінеарні, легко бачити, що $\tilde{\gamma} = \gamma = 0$. Отже, $B_{,k} = 0$, тобто B — стала. □

Зауважимо, що приведена теорема аналогічна раніше доведеним результатам за деяких додаткових умов [3].

Теорема 2. *Не існує ріманових просторів V_n, відмінних від просторів сталої кривини, що допускають більш ніж $n-2$ лінійно незалежних з сталими коефіцієнтами еквідістантних векторних полів.*

Доведення. Доведення проведемо методом від протилежного. Припустимо, що існує V_n відмінне від простору сталої кривини, що допускає більш ніж $(n-2)$ лінійно незалежних з сталими коефіцієнтами еквідістантних векторних полів. Це означає, що на компоненти вектора φ_i і інваріанта τ не повинні накладатися більш ніж 3 залежності.

Умови інтегровності (1) запишемо у вигляді

$$\varphi_\alpha Z^\alpha_{ijk} = 0, \tag{8}$$

де $Z^\alpha_{ijk} \overset{def}{=} R^h_{ijk} - B(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})$; δ^h_i — символи Кронекера. Диференціюючи (8) і враховуючи (1), отримаємо $\tau Z_{hijk} + \varphi_\alpha Z^\alpha_{ijk,h} = 0$. Тут $Z_{hijk} = g_{\alpha h} Z^\alpha_{ijk}$.

Оскільки $Z_{hijk} \neq 0$, то випливає, що інваріант τ виражається через компоненти вектора φ_i і об'єкти, що визначаються метрикою V_n.

Тензор Z^h_{ijk} можна представити у вигляді

$$Z^h_{ijk} = \sum_{s=1}^{m} \underset{s}{b}{}^h \underset{s}{\Omega}{}_{ijk}, \tag{9}$$

де $\underset{s}{b}{}^h$ — лінійно незалежні вектори, а $\underset{s}{\Omega}{}_{ijk}$ — лінійно незалежні тензори. Оскільки V_n не є простором сталої кривини, то $m \geq 2$.

З умов (8), враховуючи представлення тензора (9), випливає

$$\varphi_\alpha \underset{1}{b}{}^\alpha = 0, \quad \varphi_\alpha \underset{2}{b}{}^\alpha = 0, \quad \ldots \quad \varphi_\alpha \underset{m}{b}{}^\alpha = 0. \tag{10}$$

Внаслідок того, що $m \geq 2$, серед системи (10) знайдуться хоча б два істотні рівняння. Отже, на вектор φ_i і інваріант τ накладаються, принаймні, три залежності. А це суперечить припущенню. □

4. Еквідістантні простори з максимальною кількістю еквідістантних векторних полів.

Теорема 3. *У псевдоріманових просторах $V_n (n > 3)$, що допускають $n-2$ лінійно незалежних еквідістантних векторних поля і тільки в них, виконуються умови*

$$R_{hijk} = B(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) + e(a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j), \tag{11}$$

$$a_{i,j} = \overset{1}{\xi}_j a_i + \overset{2}{\xi}_j b_i + c_i a_j; \tag{12}$$

$$b_{i,j} = \overset{3}{\xi}_j a_i + \overset{4}{\xi}_j b_i + c_i b_j; \tag{13}$$

$$c_{i,j} = \overset{5}{\xi}_j a_i + \overset{6}{\xi}_j b_i + c_i c_j - B g_{ij}, \tag{14}$$

де a_i і b_i — неколінеарні ортогональні вектори; $c_i, \overset{s}{\xi}_j (s = 1, \ldots, 6)$ — деякі вектори; $e = \pm 1, B = \text{const}$.

Доведення. Необхідність. Нехай $V_n(n > 3)$ допускає $n-2$ лінійно незалежних еквідістантних векторних поля. Тоді має місце теорема 2, і можна використовувати хід її доведення. Аналізуючи систему рівнянь (10), легко бачити, що серед векторів $\underset{s}{b}{}^i$ існує не більше двох ненульових векторів. Використовуючи те, що $Z^h_{ijk} \neq 0$, (9) і визначення тензора Z^h_{ijk} і його властивості, отримаємо умови (11).

Підставляючи (11) в (4), маємо $\varphi^\alpha a_\alpha b_i - \varphi^\alpha b_\alpha a_i = 0$. Оскільки a_i і b_i — неколінеарні вектори, то звідси випливає

$$\varphi^\alpha a_\alpha = 0, \tag{15}$$

$$\varphi^\alpha b_\alpha = 0. \tag{16}$$

Коваріантно диференціюючи (15) з урахуванням рівнянь (1) отримаємо

$$\varphi^\alpha a_{\alpha,i} + \tau a_i = 0, \tag{17}$$

$$\varphi^\alpha b_{\alpha,i} + \tau b_i = 0. \tag{18}$$

Тензор a_{ij} можна представити у вигляді

$$a_{i,j} = c_i a_j + \sum_{s=1}^{m} \overset{s}{q}_i \overset{s}{\nu}_j \ , \tag{19}$$

де $a_j, \overset{s}{\nu}_j (s = 1, \ldots, m, m \leq n-1)$ — деякі неколінеарні вектори; $c_i, \overset{s}{q}_i$ — деякі вектори.

Підставляючи (19) в (17), неважко переконатися, що

$$(\varphi^\alpha c_\alpha + \tau) a_i + \sum_{s=1}^{m} \varphi^\alpha \overset{s}{q}_\alpha \overset{s}{\nu}_i = 0$$

З останнього випливає

$$\tau = -\varphi^\alpha c_\alpha, \quad \varphi^\alpha \overset{s}{q}_\alpha = 0. \tag{20}$$

Але тоді, зважаючи на умови (15), (16), (20) і кількість $n-2$ незалежних еквідістантних векторів виходить, що усі вектори $\overset{s}{q}_i$ лінійно виражаються через вектори a_i і b_i. В цьому випадку формула (19) приймає вид (12). Аналогічно, можемо переконатися в справедливості формули (13).

Коваріантно продиференціюємо (20), на основі (1) і (3) можна записати результат таким чином $\varphi^\alpha (c_{\alpha,i} + B g_{\alpha i}) + \tau c_i = 0$.

Звідси, аналогічно, витікають формули (14). Отже, V_n є по необхідності простором, в якому виконуються умови (11)–(14).

Достатність. Розглянемо в просторі V_n змішану систему диференціальних рівнянь (1) при додаткових умовах (11)–(16) та (20).

Умови інтегровності рівнянь (1) в таких просторах виконуються тотожно. Диференціальні продовження (20) також виконуються тотожно. Отже, система (1), (3) має в таких просторах розв'язки для усіх початкових значень $\overset{o}{\varphi}, \overset{o}{\tau}$, які задовольняють умови (20).

Легко бачити, що для цих рівнянь в просторі V_n існує точно $n-2$ лінійно незалежних еквідістантних векторних поля. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Синюков Н.С. Геодезические ототбражения римановых пространств. – М.: Наука, 1979. – 256с.
2. Yano K. Differential geometry on.complex and almost complex spaces. – Oxford: Pergamon press, 1965. – 326p.
3. Vries H.L. *Über riemannsche Raume die infinitesimale konforme Transformationen gestätten*// Math. Zeitschr. – 1954. – V.60, №3. – P. 328–347.

Zaporizhzhya National University
buenasdiaz@gmail.com

Надійшло 23.12.2010