УДК 512.64

А. М. Романів

УНІТАЛЬНІ ДІЛЬНИКИ З КАНОНІЧНОЮ ДІАГОНАЛЬНОЮ ФОРМОЮ $\operatorname{diag}(1,\dots,1,\varphi(x),\dots,\varphi(x))$ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ НАД НЕСКІНЧЕННИМ ПОЛЕМ

A. M. Romaniv. *Monic divisors with canonical diagonal form* $\operatorname{diag}(1,\dots,1,\varphi(x),\dots,\varphi(x))$ *of polynomial matrices over infinite field*, Mat. Stud. **36** (2011), 12–20.

Necessary and sufficient conditions existence of monic divisors with canonical diagonal form $\operatorname{diag}(1,\dots,1,\varphi(x),\dots,\varphi(x))$ of polynomial matrices over infinite field established.

А. М. Романив. *Унитальные делители с канонической диагональной формой* $\operatorname{diag}(1,\dots,1,\varphi(x),\dots,\varphi(x))$ *многочленных матриц над бесконечным полем* // Мат. Студії. – 2011. – Т.36, №1. – С.12–20.

Для неособенной многочленной матрицы над бесконечным полем указаны необходимые и достаточные условия выделения унитального множителя с канонической диагональной формой $\operatorname{diag}(1,\dots,1,\varphi(x),\dots,\varphi(x))$.

Проблема виділення унітального дільника із матричного многочлена над полем була однією з найбільш досліджуваних задач у теорії матриць в середині та другій половині минулого століття. Над її розв'язанням працювала не одна математична школа. Для її розв'язання, в основному, використовувались методи, що базувались на понятті жорданових ланцюгів [1, 2]. Однак, проблема виділення регулярного множника із матричного многочлена була розв'язана П. С. Казімірським [3] методами, які грунтувались на введених ним поняттях визначальної матриці та значення матриці на системі коренів многочлена. Потрібно також відзначити значний внесок учнів П. С. Казімірського та В. М. Петричковича [4], у співавторстві з яким він ввів поняття напівскалярної еквівалентності, та В. Р. Зеліска [5], який вперше розглянув групу матриць, що квазікомутують із діагональною матрицею, у розв'язання цієї проблеми.

Різні аспекти цієї задачі продовжують цікавити алгебраїстів і тепер. Так у роботі M. Slusky [6] робиться оцінка кількості унітальних дільників многочленних матриць другого порядку. J. Maroulas, P. Psarrakos [7] досліджують можливість розкладу унітальної матриці в добуток унітальних лінійних множників в залежності від розташування коренів характеристичного многочлена на комплексній площині. Н. С. Джалюк та В. М. Петричкович [8] вивчають унітальні дільники із заданими канонічними діагональними формами многочленних матриць за умов паралельності відповідних факторизацій матриць до факторизації їх канонічних діагональних форм.

В цій роботі, при деяких обмеженнях на канонічну діагональну форму дільника, вказуються необхідні та достатні умови його існування над нескінченним полем. Незважаючи на ці обмеження, клас полів, для яких є правильним цей результат є суттєво

2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A23.

ширшим від алгебраїчно замкнутих полів характеристики нуль, зокрема поля можуть мати і скінченну характеристику. Це і обумовлює новизну підходу до розв'язання цієї задачі, що базується на поняттях породжуючої множини та визначальної матриці.

Нехай F — поле, $A(x)$ — неособлива $n \times n$ матриця над $F[x]$, що записана у вигляді матричного многочлена:

$$A(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_0.$$

Матриця $A(x)$ називається унітальною, якщо $A_k = E$ — одинична матриця та регулярною, якщо $\det A_k \neq 0$. Будемо говорити, що матриця $A(x)$ регуляризується справа, якщо існує така оборотна матриця $U(x)$, що

$$A(x)U(x) = Ex^r + D_{r-1}x^{r-1} + \dots + D_0.$$

Для матриці $A(x)$ існують такі оборотні матриці $P(x)$ та $Q(x)$, що

$$P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)) = \Psi(x),$$

$\varepsilon_i(x) | \varepsilon_{i+1}(x)$, $i = 1, \dots, n-1$. При цьому матриця $\Psi(x)$ називається канонічною діагональною формою (к.д.ф.) або ж формою Сміта матриці $A(x)$, а матриці $P(x)$ та $Q(x)$ — відповідно, лівими та правими перетворювальними матрицями матриці $A(x)$. Нехай $A(x) = B(x)\,C(x)$, де $B(x)$ має к.д.ф. $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$. Згідно з [9] $\Phi(x)\,|\Psi(x)$. Окрім того, якщо $B(x)$ — унітальний матричний многочлен степеня r, то $\deg\det\Phi(x) = nr$.

Нехай тепер $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{m-1}, \varphi(x), \dots, \varphi(x))$, $1 \leq m \leq n$, причому $\Phi(x)\,|\Psi(x)$. У цьому випадку визначальна матриця $V(\Psi, \Phi)$ [10] має вигляд:

$$V(\Psi,\Phi) = V(\Psi,\Phi,x,k) = \left\| \begin{array}{ccccccccc} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi}{(\varphi,\varepsilon_1)}k_{m1} & \dots & \frac{\varphi}{(\varphi,\varepsilon_{m-1})}k_{m,m-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi}{(\varphi,\varepsilon_1)}k_{m+1,1} & \dots & \frac{\varphi}{(\varphi,\varepsilon_{m-1})}k_{m+1,m-1} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varphi}{(\varphi,\varepsilon_1)}k_{n1} & \dots & \frac{\varphi}{(\varphi,\varepsilon_{m-1})}k_{n,m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad (1)$$

де

$$k_{ij} = \begin{cases} 0, & (\varphi, \varepsilon_j) = 1, \\ k_{ij0} + k_{ij1}x + \ldots + k_{ijh_{ij}}x^{h_{ij}}, & (\varphi, \varepsilon_j) \neq 1, \end{cases}$$
$$h_{ij} = \deg(\varphi, \varepsilon_j) - 1, \; i = m, m+1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m-1,$$

де k_{ijl} — параметри, $i = m, m+1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m-1$. Позначимо через $F(k)[x]$ — трансцедентне розширення поля F за рахунок приєднання всіх k_{ijl}. Основним результатом цієї роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай F — нескінченне поле. Для того, щоб із неособливого матричного многочлена*

$$A(x) = P^{-1}(x)\Psi(x)Q^{-1}(x), \Psi(x) = \mathrm{diag}\left(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)\right), i = 1, \ldots, n-1$$

можна було виділити лівий унітальний дільник з к.д.ф.

$$\Phi(x) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}, \varphi(x), \ldots, \varphi(x)),\ 1 \leq m \leq n,\ \deg\det\Phi(x) = nr,$$

необхідно та достатньо, щоб матриця $\left(V(\Psi,\Phi)P(x)\right)^{-1}\Phi(x)$ регуляризувалася справа над $F(k)[x]$.

Зауважимо, що для того, щоб переконатись у тому, що матриця $\left(V(\Psi,\Phi)P(x)\right)^{-1}\Phi(x)$ регуляризується справа можна використати один із методів запропонованих у роботах [3, 10, 16].

Перед доведенням цієї теореми встановимо декілька допоміжних тверджень. Нехай

$$\Psi(x) = \mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)),\ \varepsilon_i(x)|\varepsilon_{i+1}(x),\ \Phi(x) = \mathrm{diag}\left(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right),$$
$$\varphi_i(x)|\varphi_{i+1}(x),\ i = 1, \ldots, n-1,\ \Phi(x)\,|\Psi(x)\,.$$

Розглянемо наступні множини матриць:

$$\mathbf{G}_\Phi = \{H(x) \in GL_n(F[x]) \mid H(x)\Phi(x) = \Phi(x)H_1(x),\ \text{де } H_1(x) \in GL_n(F[x])\},$$
$$\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \{L(x) \in GL_n(F[x]) \mid L(x)\Psi(x) = \Phi(x)L_1(x),\ \text{де } L_1(x) \in M_n(F[x])\ \},$$

які, згідно з результатами робіт [5, 11], складаються з оборотних матриць вигляду

$$\left\|\begin{array}{ccccc} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1,\,n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2,\,n-1} & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n\,,n-1} & h_{nn} \end{array}\right\|, \tag{2}$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1,\,n-1} & l_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2\,,n-1} & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}l_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}l_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}l_{n\,,n-1} & l_{nn} \end{array}\right\|, \tag{3}$$

відповідно. При цьому множина $\mathbf{G}_\Phi$ є мультиплікативною групою, а множину $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$ будемо називати породжуючою множиною. Аналогічно вводиться множина $\mathbf{G}_\Psi$. Позначимо через $\mathbf{G}^*_\Phi$ та $\mathbf{L}^*(\Psi,\Phi)$ множини матриць вигляду (2) і (3) над $F(k)[x]$, відповідно.

Позначимо через $\mathbf{V}(\Psi,\Phi)$ множину нижніх унітрикутних матриць, які отримуються із матриці $V(\Psi,\Phi)$, коли параметри k_{ijl} незалежно один від одного пробігають всеможливі значення із поля F.

Теорема 2. *Виконується рівність $\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \mathbf{G}_\Phi\mathbf{V}(\Psi,\Phi)\mathbf{G}_\Psi$.*

Доведення. Нехай $n = 2$ і L — довільна матриця із $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$. Оскільки матриця L — оборотна і має вигляд (3), то $\left(\dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}l_{21},\, l_{22}\right) = 1$. Тому і $\left(\dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}l_{21},\, l_{22},\, \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1$. Тоді, існує таке $s \in F\,[x]$, що $\left(l_{22} + \dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}l_{21}s,\, \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1$. Отже, виконується рівність

$$\underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ \dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2,\, \varepsilon_1)}l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S_2} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}s + l_{12} \\ \dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}l_{21} & \dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}l_{21}s + l_{22} \end{pmatrix} = L_1 \in \mathbf{L}\,(\Psi, \Phi)\,.$$

На підставі леми 3 з [12] в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_1, що H_1L_1 — нижня унітрикутна матриця. Тоді за лемою 3 з [13] в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_2, що $H_2H_1LS_2 = V \in \mathbf{V}(\Psi, \Phi)$, тобто $L = (H_2^{-1}H_1^{-1})VS_2^{-1}$. Оскільки $S_2 \in \mathbf{G}_\Psi$, то $\mathbf{L}(\Psi, \Phi) \subseteq \mathbf{G}_\Phi\mathbf{V}(\Psi, \Phi)\mathbf{G}_\Psi$.

Припустимо правильність такого включення для матриць порядку $n-1$. Нехай L — оборотна матриця вигляду (3). Тоді

$$\left(\frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)}l_{n1}, \dots, \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}l_{n,n-1}, l_{nn}\right) = 1,$$

а отже, і

$$\left(\frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)}l_{n1}, \dots, \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}l_{n,n-1}, l_{nn}, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) = 1.$$

В кільці $F\,[x]$ існують такі $s_1, \dots, s_{n-1}$, що

$$\Bigg(\underbrace{l_{nn} + \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)}l_{n1}s_1 + \ldots + \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}l_{n,n-1}s_{n-1}}_{l'_{nn}},\, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\Bigg) = \left(l'_{nn},\, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Отже, виконується рівність

$$\underbrace{\begin{Vmatrix} l_{11} & \dots & l_{1\,n-1} & l_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}l_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}l_{n,n-1} & l_{nn} \end{Vmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}}_{S_n} =$$

$$= \begin{Vmatrix} l_{11} & \dots & l_{1\,n-1} & l'_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}l_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}l_{n,n-1} & l'_{nn} \end{Vmatrix} = L_1 \in \mathbf{L}(\Psi, \Phi).$$

Звідси випливає, що $(l'_{1n}, \dots, l'_{nn}) = 1$. Оскільки

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1} = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} \cdot \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\varphi_3}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1},$$

то

$$\left(l'_{nn},\, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right) = \ldots = \left(l'_{nn},\, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Таким чином,

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}l'_{1n},\, \frac{\varphi_n}{\varphi_2}l'_{2n}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}l'_{n-1,\,n},\, l'_{nn}\right) = 1.$$

Отже, існують такі h_{n1}, h_{n2}, $\ldots$, $h_{n,\,n-1}$, $h_{nn} \in F\,[x]$, що

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1}l'_{1n} + \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2}l'_{2n} + \cdots + h_{nn}l'_{nn} = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1}, \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2}, \cdots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n,n-1}, h_{nn}\right) = 1.$$

На підставі властивості 2 з [14] рядок $\left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} \ldots \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n,n-1}\; h_{nn} \right\|$ можна доповнити до оборотної матриці з групи $\mathbf{G}_\Phi$ вигляду

$$H_1 = \begin{Vmatrix} & & * & & \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n,n-1} & h_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Згідно з властивістю 2 із [15] $\mathbf{G}_\Phi\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. Тому

$$H_1L_1 = \begin{Vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,n-1} & g_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varphi_{n-1}}{(\varphi_{n-1},\varepsilon_1)}g_{n-1\,,1} & \cdots & g_{n-1,\,n-1} & g_{n-1\,,n} \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}g_{n\,1} & & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}g_{n\,,n-1} & 1 \end{Vmatrix} = L_2 \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi).$$

Домноживши матрицю L_2 зліва на матрицю

$$H_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -g_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -g_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

із $\mathbf{G}_\Phi$, отримаємо

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} c_{11} & \cdots & c_{1\,,n-1} & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}c_{21} & \cdots & c_{2,\,n-1} & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varphi_{n-1}}{(\varphi_{n-1},\varepsilon_1)}c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,\,n-n1} & 0 \\ \hline \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}g_{n\,1} & \cdots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}g_{n,\,n-1} & 1 \end{array}\right\| = \begin{Vmatrix} C & \mathbf{0} \\ g & 1 \end{Vmatrix} = L_3 \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi).$$

Оскільки $\det L_3 = \det C$, то C — оборотна матриця порядку $(n-1)$ з множини $\mathbf{L}\,(\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}),\, \mathrm{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}))$. Згідно з припущенням індукції знайдуться такі матриці $H_3 \in \mathbf{G}_{\mathrm{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}$ та $S \in \mathbf{G}_{\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})}$, що

$$H_3CS = V \in \mathbf{V}\left(\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}), \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\right).$$

Тоді

$$\left\| \begin{matrix} H_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} C & \mathbf{0} \\ g & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} H_3CS & \mathbf{0} \\ gS & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ * & & & 1 \end{matrix} \right\| = L_4 \in \mathbf{L}(\Psi, \Phi),$$

при цьому $\left\| \begin{matrix} H_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{G}_\Phi$, $\left\| \begin{matrix} S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{G}_\Psi$. На підставі леми 3 з [13] в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_4, що $H_4L_4 \in \mathbf{V}(\Psi, \Phi)$. Отже, $\mathbf{L}(\Psi, \Phi) \subseteq \mathbf{G}_\Phi\mathbf{V}(\Psi, \Phi)\mathbf{G}_\Psi$.

Згідно з властивостями 2 та 3 з [15] $\mathbf{G}_\Phi\mathbf{L}(\Psi, \Phi) = \mathbf{L}(\Psi, \Phi)$ та $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)\mathbf{G}_\Psi = \mathbf{L}(\Psi, \Phi)$. Оскільки $\mathbf{V}(\Psi, \Phi) \subseteq \mathbf{L}(\Psi, \Phi)$, то $\mathbf{G}_\Phi\mathbf{V}(\Psi, \Phi)\mathbf{G}_\Psi \subseteq \mathbf{L}(\Psi, \Phi)$. Отже, $\mathbf{L}(\Psi, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi\mathbf{V}(\Psi, \Phi)\mathbf{G}_\Psi$. Теорему доведено. □

Лема 1. *Якщо у визначальній матриці* (1) *елемент* $k_{ij}(x) \equiv 0$, *то*

$$k_{j+1,j}(x) \equiv k_{j+2,j}(x) \equiv \ldots \equiv k_{i-1,j}(x) \equiv 0,\ i = m, m+1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m-1,\ i > j.$$

Доведення. Згідно з означенням $k_{ij}(x) \equiv 0$ тоді і лише тоді, коли $(\varphi_i, \varepsilon_j) = 1$. Оскільки $\varphi_i(x) = \varphi(x)$, то $k_{j+1,j}(x) \equiv k_{j+2,j}(x) \equiv \ldots \equiv k_{i-1,j}(x) \equiv 0$. □

Наслідок. *Якщо у визначальній матриці* (1) *елемент* $k_{ij}(x) \not\equiv 0$, $i > j$, *то*

$$k_{i+1,\,j}(x) \not\equiv 0, k_{i+2,j}(x) \not\equiv 0, \ldots, k_{n,j}(x) \not\equiv 0,\ i = m, m+1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m-1.$$

Розглянемо добуток матриць $V(\Psi, \Phi)T(x) = U(x)$, де $T(x) = \|t_{ij}\|_1^n \in \mathbf{G}_\Psi$. Позначимо через $U_i(x)$ — підматрицю матриці $U(x)$, отриману внаслідок викрислення перших i рядків та перших i стовпців матриці $U(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Згідно з формулою Біне-Коші маємо:

$$\det U_i(x) = \sum_j |V_{ij}(\Psi, \Phi)| \cdot |T_{ji}(x)| + \det T_i(x),$$

де $\sum_j |V_{ij}(\Psi, \Phi)| \cdot |T_{ji}(x)|$ — сума добутків усіх можливих мінорів максимального $(n-i)$–порядку матриці $V_{ij}(\Psi, \Phi)$, за винятком мінора унітрикутної матриці, що дорівнює одиниці, на відповідні мінори того ж порядку матриці $T_{ji}(x)$. $T_i(x)$ — підматриця матриці $T(x)$, отримана внаслідок викрислення перших i рядків та перших i стовпців матриці $T(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Лема 2. *Для того, щоб*

$$\det U_{m-1}(\alpha) \equiv \sum_j |V_{m-1,j}(\Psi, \Phi, \alpha)| \cdot |T_{j,m-1}(\alpha)| + \det T_{m-1}(\alpha) \equiv 0, \tag{4}$$

де $\alpha \in F$, *необхідно та достатньо, щоб кожен доданок цієї суми дорівнював нулю.*

Доведення. Достатність очевидна.

Необхідність. Для доведення необхідності досить зауважити, що мінори $|V_{m-1,j}(\Psi,\Phi,\alpha)|$ є сумою добутків елементів поля F та параметрів k_{ijl}, $i=m,m{+}1,\dots,n$, $j=1,\dots,m-1$. При цьому набір параметрів, які зустрічаються в кожному такому мінорі не повторюється в жодному іншому мінорі. □

Лема 3. *Якщо* $\varphi(\alpha)=0$ *та* $\dfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_s}(\alpha)\neq 0$, *то* $k_{ms}(x)\not\equiv 0$, $s=1,\dots,m-1$.

Доведення. Нехай $k_{ms}(x)\equiv 0$. Тоді $(\varphi,\varepsilon_s)=1$. Отже,

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_s}=\frac{\varphi\varepsilon_m(\varphi,\varepsilon_s)}{(\varphi,\varepsilon_s)\varphi\varepsilon_s}=\varphi\cdot\frac{(\varepsilon_m\varphi,\varepsilon_m\varepsilon_s)}{\varphi\varepsilon_s}.$$

Оскільки $\varphi\,|\varepsilon_m$, то $\varphi\left|\dfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_s}\right.$. Звідси випливає, що $\dfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_s}(\alpha)=0$, а це суперечить умові леми. □

Лема 4. *Виконується рівність* $(\varphi(x),\det U_{m-1}(x))=1$.

Доведення. Припустимо, що $(\varphi(x),\det U_{m-1}(x))=\delta(x)\neq\mathrm{const}$. Нехай F' — поле розкладу многочлена $\varphi(x)$ і $\delta(\alpha)=0$, $\alpha\in F'$. Тоді $\varphi(\alpha)=0$ та

$$\det U_{m-1}(\alpha)=\sum_j|V_{m-1,j}(\Psi,\Phi,\alpha)|\cdot|T_{j,m-1}(\alpha)|+\det T_{m-1}(\alpha)\equiv 0 \tag{5}$$

Нехай j — перший індекс, для якого $\dfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_j}(\alpha)\neq 0$, а $\dfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{j+1}}(\alpha)\neq 0$, $0\le j<m$, де $\varepsilon_0(x)=1$. Якщо $\dfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_j}=\dfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{j+1}}\cdot\dfrac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}$, то $\dfrac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}(\alpha)=0$, $0\le j<m$. Оскільки $\dfrac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}\left|\dfrac{\varepsilon_{j+1+t}}{\varepsilon_{j-l}}\right.$, то $\dfrac{\varepsilon_{j+1+t}}{\varepsilon_{j-l}}(\alpha)=0$, $t=0,1,\dots,n-j-1$, $l=0,1,\dots,j-1$.

Із того, що $\dfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{j+1}}(\alpha)\neq 0$ випливає, що $\dfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_s}(\alpha)\neq 0$, $s=j+1,j+2,\dots,m-1$. Оскільки $\dfrac{\varphi}{(\varphi,\varepsilon_s)}\left|\dfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_s}\right.$, то $\dfrac{\varphi}{(\varphi,\varepsilon_s)}(\alpha)\neq 0$, $s=j+1,j+2,\dots,m-1$. За лемою 3 $k_{ms}\not\equiv 0$. Згідно з наслідком $k_{qs}\not\equiv 0$, $q=m,m{+}1,m{+}2,\dots,n$, $s=j{+}1,j{+}2,\dots,m{-}1$. Звідси бачимо, що в матриці $V(\Psi,\Phi)$ всі елементи $\dfrac{\varphi}{(\varphi,\varepsilon_s)}k_{qs}$, $q=m,m{+}1,m{+}2,\dots,n$, $s=j{+}1,j{+}2,\dots,m{-}1$ відмінні від нуля. Тому всеможливі мінори максимального $(n-(m-1))$-го порядку, побудовані на останніх $(n-(m-1))$ рядках та на останніх $(n-j)$ стовпцях матриці $V(\Psi,\Phi)$, відмінні від нуля.

З тотожності (5), врахувавши лему 2, випливає, що відповідні всеможливі мінори максимального $(n-(m-1))$-го порядку, побудовані на останніх $(n-j)$ рядках та на останніх $(n-(m-1))$ стовпцях матриці $T(\alpha)$, дорівнюють нулю. Таким чином, матриця $T(\alpha)$ має вигляд:

$$T(\alpha)=\left\|\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 0_{(n-j)\times j} & S_{(n-j)\times(m-1-j)} & T_{(n-j)\times(n-(m-1))}\end{array}\right\|,$$

де $0_{(n-j)\times j}$ — нульова $(n-j)\times j$ матриця, $T_{(n-j)\times(n-(m-1))}$ — матриця, яка складається з нульових мінорів $(n-(m-1))$-го порядку. Зауважимо, що коли $j=0$, то матриця $0_{(n-j)\times j}$ — порожня. Легко бачити, що $\det T(\alpha)=0$, що суперечить оборотності матриці $T(x)$. □

Перейдемо до доведення теореми 1.

Доведення. Достатність. Розглянемо матрицю $A(x)$, як матрицю над $F(k)[x]$. Нехай матриця $(V(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\,\Phi(x)=B(x)$ регуляризується справа над $F(k)[x]$. Тобто існує така матриця $U(x)\in GL_n(F(k)[x])$, що

$$B(x)U(x)=Ex^r+B_{r-1}x^{r-1}+\ldots+B_1x+B_0=D(x).$$

Згідно з твердженням 1 із [12], всі ліві дільники матриці $A(x)$ з к.д.ф. $\Phi(x)$ над $F(k)[x]$ утворюють множину $(\mathbf{L}^*(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\,\Phi(x)GL_n(F[x])$. Оскільки $V(\Psi,\Phi)\in\mathbf{L}^*(\Psi,\Phi)$, то $D(x)$ є лівим дільником матриці $A(x)$: $A(x)=D(x)C(x)$. На підставі леми 4 з [16] матриця $B(x)$, регуляризується справа над $F(k)[x]$ тоді і лише тоді, коли $\det M_B=f(k_{n10},\ldots,k_{n,n-1,h_{n,n-1}},x)\not\equiv 0$, де M_B — відповідна матриця до матричного многочлена $B(x)$. Згідно з лемою 5 із [16] коефіцієнти унітального матричного многочлена $B(x)U(x)$, мають вигляд $B_k=\sum_{i=0}^{k}T_iM_{(r-k)+i,r}=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{\det M_B}T_iM_{ij}$, $k=0,1,\ldots,r-1$, $i,j=0,1,\ldots,n$, де T_i — коефіцієнти матричного многочлена $B(x)$, $M_{(r-k)+i,r}$ — відповідні блоки матриці M_B^{-1}. У нескінченному полі F знайдуться такі елементи $p_{n10},p_{n20},\ldots,p_{n,n-1,h_{n,n-1}},p_{nn}$, що $f(p_{n10},\ldots,p_{nn})\neq 0$. Тоді матриця $\overline{D}(x)$, яка отримується із матриці $D(x)$ заміною змінних $k_{n10},\ldots,k_{n,n-1,h_{n,n-1}},x$ на відповідні елементи $p_{n10},\ldots,p_{n,n-1,h_{n,n-1}},p_{nn}$ із поля F і буде шуканим унітальним дільником матриці $A(x)$.

Необхідність. Нехай $A(x)=B(x)C(x)$, де $B(x)$ — унітальний дільник матриці $A(x)$ з к.д.ф. $\Phi(x)$. Згідно з твердженням 1 з [12], всі дільники матриці $A(x)$ утворюють множину $(\mathbf{L}(\Psi,\Phi)P(x))^{-1}\,\Phi(x)GL_n(F[x])$. Тому матрицю $B(x)$ можна записати у вигляді $B(x)=(L(x)P(x))^{-1}\,\Phi(x)K(x)$, де $L(x)\in\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$, $K(x)\in GL_n(F[x])$. На підставі теореми 2 $L(x)=H(x)V_0(x)S(x)$, де $H(x)\in\mathbf{G}_\Phi$, $V_0(x)\in\mathbf{V}(\Psi,\Phi)$, $S(x)\in\mathbf{G}_\Psi$. Тоді

$$B(x)=(L(x)P(x))^{-1}\,\Phi(x)K(x)=(H(x)V_0(x)S(x)P(x))^{-1}\,\Phi(x)K(x).$$

Згідно з роботами [5, 15], множина всіх лівих перетворювальних матриць матриці $A(x)$ має вигляд $P_A=\mathbf{G}_\Psi P$. Отже, $S(x)P(x)=P_0(x)$ — ліва перетворювальна матриця матриці $A(x)$. Тоді,

$$B(x)=(H(x)V_0(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)K(x)=P_0^{-1}(x)V_0^{-1}(x)H^{-1}(x)\Phi(x)K(x).$$

Оскільки $H^{-1}(x)\Phi(x)=\Phi(x)H_1(x)$, де $H_1(x)\in GL_n(F[x])$, то

$$B(x)=P_0^{-1}(x)V_0^{-1}(x)\Phi(x)H_1(x)K(x)=(V_0(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)K_1(x).$$

Матриця $B(x)$ — унітальна, а тому матриця $(V_0(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)$ регуляризується справа. Замінивши в матриці $V_0(x)$ коефіцієнти многочленів на відповідні параметри k_{ijl}, отримаємо, що матриця $(V(\Psi,\Phi)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)$ регуляризується справа над $F(k)[x]$.

Покажемо, що незалежно від вибору перетворювальної матриці $P_1(x)$ матриця $D(x)=(V(\Psi,\Phi)P_1(x))^{-1}\Phi(x)$ також регуляризується справа. Оскільки $P_1(x)=N(x)P_0(x)$, де $N(x)\in\mathbf{G}_\Psi$, то

$$D(x)=(V(\Psi,\Phi)P_1(x))^{-1}\,\Phi(x)=(V(\Psi,\Phi)N(x)P_0(x))^{-1}\,\Phi(x)=$$
$$=((V(\Psi,\Phi)N(x))\,P_0(x))^{-1}\,\Phi(x).$$

Взявши до уваги лему 3 з [12], та врахувавши лему 4, отримаємо, що існує така матриця $T(x)\in\mathbf{G}_\Phi^*$, що $T(x)V(\Psi,\Phi)N(x)$ є нижньою унітрикутною матрицею із $F(k)[x]$. Згідно з лемою 3 із [13] існує така матриця $T_1(x)\in\mathbf{G}_\Phi^*$, що

$$T_1(x)T(x)V(\Psi,\Phi)N(x) = V_1(\Psi,\Phi) \in \mathbf{V}(\Psi,\Phi).$$

Тоді

$$D(x) = \left(T_1(x)T(x)\left(V(\Psi,\Phi)N(x)\right)P_0(x)\right)^{-1} T_1(x)T(x)\Phi(x) =$$
$$= \left(\left(T_1(x)T(x)V(\Psi,\Phi)N(x)\right)P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x)\left(\tilde{T}(x)\tilde{T}_1(x)\right) = \left(V_1(\Psi,\Phi)P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x)T_2(x).$$

Перепозначивши в матриці $V_1(\Psi,\Phi)$ параметри k_{ijl} через k'_{ijl} отримаємо, що матриця $\left(V(\Psi,\Phi)P_0(x)\right)^{-1}\Phi(x)$ регуляризується справа над $F(k)[x]$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Gochberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrix Polynomials. – New York: Academic Press, 1982. – 409p.
2. Малышев А.Н. *Факторизация матричных полиномов*// Сиб. Мат. Журн. – 1982. – Т.23, №3. – С. 136–146.
3. Казимирский П.С. *Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена*// Укр. мат. журн. – 1980. – Т.32, №4. – С. 483–498.
4. Казимирскый П.С., Петричкович В.М. *Про еквівалентність поліноміальних матриць*// Теор. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. Київ: Наук. думка. – 1977. — С. 61–66.
5. Зелиско В.Р. *О строении одного класса обратимых матриц*// Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Т.12. – С. 14–21.
6. Slusky M. *Zeros of 2x2 Matrix Polynomials*// arXiv: 0912.1030v1 [math.RA], 2009.
7. J. Maroulas, P. Psarrakos *On factorization of matrix polynomials*// Linear Algebra and its Applications. – 2000. – V.304. – P. 131–139.
8. Джалюк Н.С., Петричкович В.М. *Про спільні унітальні дільники многочленних матриць із заданою канонічною діагональною формою*// Мат. методи і фіз.- мех. поля. – 2002. – Т.45, №3. – С. 7–13.
9. Newman M. Integral Matrices. — New York: Academic Press, 1972. — 224p.
10. Зеліско В.Р., Щедрик В.П. *Матриця значень на системі коренів діагональних елементів матриці та її застосування*// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т.48, №4. – С. 20–29.
11. Щедрик В.П. *Structure and properties of divisors of matrices over commutative elementary divisors domain*// Mat. Stud. – 1998. – V.10, №2. – P. 115–120.
12. Щедрик В.П. *Про один клас дільників матриць*// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – Т.40, №3 – С. 13–19.
13. Shchedryk V.P. *A class of divisors of matrices over a commutative elementary divisor domain*// Mat. Stud. – 2002. – V.17, №1. – P. 23–28.
14. Shchedryk V.P. *Some determinant properties of primitive matrices over Bezout B-domain*// Algebra and Discrete Mathematics. – 2005. – V.2. – P. 46–57.
15. Shchedryk V.P. *Factorization of matrices over elementary divisor rings*// Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – V.2. – P. 79–98.
16. Петричкович В.М. *Про розкладність матричних многочленів в добуток унітальних множників*// Алгебра і топологія. Темат. зб. наук. праць. Львів: Львівський державний університет. – 1996. – С. 112–124.

Ін-т. прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло 01.11.2010

Після переробки 15.04.2011