УДК 517.51

О. В. Маслюченко

РОЗКЛАД НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ В СУМУ КВАЗІНЕПЕРЕРВНИХ І КОЛИВАННЯ МАЙЖЕ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

O. V. Maslyuchenko. *Decomposition of semi-continuous functions into the sum of quasi-continuous functions and the oscillation of almost continuous functions*, Mat. Stud. **35** (2011), 205–214.

We prove that every semi-continuous function on a metrizable space is decompose into sum of two quasi-continuous functions. And then we obtain a new characterization of the oscillation of almost continuous functions.

О. В. Маслюченко. *Разложение полунепрерывных функций в сумму квазинепрерывных и колебания почти непрерывных функций* // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №2. – С.205–214.

Доказывается, что каждая полунепрерывная функция на метризуемом пространстве разлагается в сумму квазинепрерывных функций. Получена новая характеризация колебаний почти непрерывных функций.

1. Вступ. В одній із попередніх робіт автора [1] було описано коливання *майже неперервних функцій*, тобто таких функцій $f\colon X \to \mathbb{R}$, що для довільної відкритої множини $G \subseteq \mathbb{R}$ виконується, що $f^{-1}(G) \subseteq \operatorname{int} \overline{f^{-1}(G)}$. Зокрема, там було встановлено такий результат.

Теорема А ([1, Наслідок 3]). *Нехай X — нормальний простір і $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ така, що множина $\operatorname{int} \operatorname{supp} g$ — зліченно розкладна. Тоді для того, щоб існувала майже неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$, для якої $\omega_f = g$, необхідно і досить, щоб існували такі квазінеперервні напівнеперервні зверху функції $g_1, g_2\colon X \to [0, +\infty]$, для яких $g = g_1 + g_2$.*

Як бачимо, ця теорема дає опис коливань майже неперервних функцій у класі нормальних зліченно розкладних просторів. Проте ці дослідження не можна вважати завершеними, адже не зрозуміло, які саме напівнеперервні функції подаються у вигляді суми невід'ємних квазінеперервних функцій, навіть для випадку $X = \mathbb{R}$. З'ясуванню цього питання і присвячена дана робота.

Наведемо деякі позначення з [1]. Нехай X — топологічний простір і $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, де $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. *Перші верхня та нижня граничні функції* визначаються формулами

$$f^{\vee}(x) = \limsup_{u \to x} f(u) = \inf_{U\text{ — окіл } x} \sup_{u \in U} f(u), \quad f^{\wedge}(x) = \liminf_{u \to x} f(u) = \sup_{U\text{ — окіл } x} \inf_{u \in U} f(u).$$

Другі верхня та нижня граничні функції — це $f^{\vee\!\wedge} = (f^{\vee})^{\wedge}$, і відповідно, $f^{\wedge\!\vee} = (f^{\wedge})^{\vee}$. І нарешті, *треті верхня та нижня граничні функції* — це $f^{\vee\!\wedge\!\vee} = (f^{\vee\!\wedge})^{\vee}$ і $f^{\wedge\!\vee\!\wedge} = (f^{\wedge\!\vee})^{\wedge}$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C10, 54C30.

Подальше застосування операцій $^\vee$ та $^\wedge$ не приведе до утворення нових граничних функцій, адже в [1, Наслідок 2], $(f^\vee)^\vee = f^\vee$, $(f^\wedge)^\wedge = f^\wedge$, $(f^{\vee\wedge})^{\vee\wedge} = f^{\vee\wedge}$ і $(f^{\wedge\vee})^{\wedge\vee} = f^{\wedge\vee}$. *Коливання* ω_f функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ визначається формулою

$$\omega_f(x) = \limsup_{u',u''\to x} |f(u') - f(u'')| = \inf_{U\text{ — окіл } x} \sup_{u',u''\in U} |f(u') - f(u'')|$$

Добре відомо, що $\omega_f = f^\vee - f^\wedge$.

Зауважимо, що в [1, твердження 7] доведено, що якщо функція g є коливанням деякої майже неперервної функції, то $g \le 2g^{\wedge\vee}$. Виявляється, що ця умова є ключовою, для розв'язання поставленої задачі. А саме, в цій роботі ми одержуємо наступний результат.

Теорема 1. *Нехай X — метризовний простір і $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Тоді для того, щоб існували такі квазінеперервні напівнеперервні зверху функції $g, h\colon X \to [0, +\infty]$, що $f = g + h$, необхідно і досить, щоб $0 \le f \le 2f^{\wedge\vee}$.*

Звідси, користуючись теоремою А, і зліченною розкладністю метризовних просторів без ізольованих точок, випливає наступна характеризація.

Теорема 2. *Нехай X — метризовний простір і $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Тоді для того, щоб існувала майже неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$, для якої $\omega_f = g$, необхідно і досить, щоб g була напівнеперервною зверху функцією, для якої $0 \le g \le 2g^{\wedge\vee}$, і носій $\operatorname{supp} g$ не містив ізольованих точок простору X.*

2. Леми про σ-дискретні множини. Підмножину S метричного простору X називатимемо *ε-відокремною*, якщо $|s-t|_X \ge \varepsilon$ для довільних різних точок $s, t \in S$, і називатимемо *відокремною*, якщо S є ε-відокремною для деякого $\varepsilon > 0$. Множину S називатимемо *σ-дискретною*, якщо існує послідовність дискретних множин S_n, така, що $S = \bigcup_{n=1}^\infty S_n$. Для множини $S \subseteq X$ символом $\mathbf{1}_S$ позначатимемо *характеристичну функцію множини* S, тобто $\mathbf{1}_S(x) = 1$ при $x \in S$ і $\mathbf{1}_S(x) = 0$ при $x \in X \setminus S$. Крім того, для функції $\varphi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ і числа $\varepsilon \in [0, +\infty]$ позначимо $\operatorname{supp}\varphi = \{x \in X\colon \varphi(x) \ne 0\}$ і $\operatorname{supp}_\varepsilon \varphi = \{x \in X\colon |\varphi(x)| \ge \varepsilon\}$.

Лема 1. *Нехай X — метризовний простір і $E \subseteq X$. Тоді існує σ-дискретна множина $S \subseteq E$, така, що $\overline{S} \supseteq E$.*

Доведення. Зрозуміло, що ε-відокремність — це властивість скінченного характеру. Тому за лемою Тейхмюллера-Тьюкі ([2, с.12]) для кожного номера n існує максимальна $\frac{1}{n}$-відокремна підмножина S_n множини E. За рахунок максимальності матимемо, що для довільного номера n і точки $x \in E$ існує $s \in S_n$, таке, що $|x - s|_X < \frac{1}{n}$. Отже, σ-дискретна множина $S = \bigcup_{n=1}^\infty S_n$ буде щільною в E. □

В попередній лемі σ-дискретна множина подається у вигляді зліченного об'єднання відокремних множин. Проте виявляється, що таку властивість мають всі σ-дискретні множини.

Лема 2. *Нехай X — метричний простір і S — σ-дискретна підмножина X. Тоді існує диз'юнктна послідовність відокремних множин T_n, така, що $S = \bigsqcup_{n=1}^\infty T_n$.*

Доведення. Застосувавши міркування з доведення леми 1 до деякої дискретної множини E побудуємо послідовність відокремних множин, об'єднання яких щільне в E, а значить, і рівне E. Отже, і для σ-дискретної множини S існує послідовність деяких відокремних підмножин S_n, така, що $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Покладаючи $T_n = S_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k$ матимемо, що T_n відокремні і $S = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} T_n$. □

Лема 3. *Нехай X — метризовний простір і $f\colon X \to [0, +\infty]$ — деяка напівнеперервна зверху функція. Тоді існує функція $g\colon X \to [0, +\infty]$ із σ-дискретним носієм, така, що $g^{\vee} = f$.*

Доведення. Нехай $\mathbb{Q}^{+} = \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$. Для кожного $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+}$ покладемо $F_{\varepsilon} = f^{-1}([\varepsilon, +\infty])$. Оскільки функція f напівнеперервна зверху, то множини F_{ε} замкнені. За лемою 1 для кожного $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+}$ виберемо σ-дискретну множину S_{ε} таку, що $\overline{S}_{\varepsilon} = F_{\varepsilon}$. Покладемо $S = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+}} S_{\varepsilon}$ і $g = f \mathbf{1}_{S}$. Покажемо, що g — шукана. По-перше, носій функції g дорівнює S і тому він є σ-дискретним. Далі, оскільки $g \leq f$ і f напівнеперервна зверху, то $g^{\vee} \leq f^{\vee} = f$.

Залишилось довести, що $g^{\vee} \geq f$. Нехай це не так і для деякого $a \in X$ виконується, що $g^{\vee}(a) < f(a)$. Візьмемо $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+}$ таке, що $g^{\vee}(a) < \varepsilon < f(a)$. Тоді $a \in F_{\varepsilon}$. З іншого боку, існує окіл U точки a такий, що $g(x) < \varepsilon$ при $x \in U$. Але $a \in F_{\varepsilon} = \overline{S}_{\varepsilon}$. Тому існує $s \in S_{\varepsilon} \cap U$. Тоді $g(s) = f(s) \geq \varepsilon$, що суперечить тому, що $s \in U$. □

Лема 4. *Нехай X — метризовний простір, $f\colon X \to [0, +\infty]$ — деяка напівнеперервна зверху функція і $\varphi = f^{\wedge}$. Тоді існує функція $\psi\colon X \to [0, +\infty]$ з σ-дискретним носієм, така, що $(\varphi + \psi)^{\vee} = f$, $\psi^{\vee\wedge} = 0$ і $\operatorname{supp} \psi \cap \varphi^{-1}(+\infty) = \varnothing$.*

Доведення. Перш за все переконаємося, що для довільної функції $\psi\colon X \to [0, +\infty]$

$$\psi^{\vee\wedge} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \operatorname*{supp}_{\varepsilon} \psi \text{ — ніде не щільна.} \tag{1}$$

Справді, якщо $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi^{\vee\wedge} < \varepsilon$, то для довільної відкритої непорожньої множини U матимемо, що $\inf\limits_{x \in U} \psi^{\vee}(x) < \varepsilon$. Тому $\psi^{\vee}(a) < \varepsilon$, для деякого $a \in U$. А, тому існує такий окіл $V \subseteq U$ точки a, що $\psi(x) < \varepsilon$ на V. Отже, $V \cap \operatorname{supp}_{\varepsilon} \psi = \varnothing$. Нехай тепер $\psi^{\vee\wedge}(a) > \varepsilon > 0$ для деякого $a \in X$. Тоді існує такий відкритий окіл U точки a, що $\psi^{\vee}(x) > \varepsilon$ на U. Звідси, для довільної відкритої непорожньої множини $V \subseteq U$ матимемо, що $\sup_{x \in V} \psi(x) > \varepsilon$. Отже, $\overline{\operatorname{supp}_{\varepsilon} \psi} \supseteq U$.

Виберемо g за лемою 3. Покладемо $S = \{x \in X\colon g(x) > \varphi(x)\}$. Перевіримо, чи функція $\psi = (g - \varphi)\mathbf{1}_{S}$ є шуканою. Зауважимо, що $\varphi + \psi = \varphi \vee g$. Тому

$$(\varphi + \psi)^{\vee} = (\varphi \vee g)^{\vee} = \varphi^{\vee} \vee g^{\vee} = \varphi \vee f = f.$$

Крім того, $S \cap \varphi^{-1}(+\infty) = \varnothing$. Доведемо тепер, що $\psi^{\vee\wedge} = 0$. Для цього досить показати, що $S_{\varepsilon} = \operatorname{supp}_{\varepsilon} \psi$ ніде не щільна для кожного $\varepsilon > 0$. Нехай це не так, і для деякого $\varepsilon > 0$ множина $U = \operatorname{int} \overline{S}_{\varepsilon}$ непорожня. Тоді $V = U \cap G \neq \varnothing$. Але

$$f(x) \geq g(x) \geq \varphi(x) + \varepsilon \geq \varphi^{\wedge}(x) + \varepsilon = f^{\wedge}(x) + \varepsilon$$

на S_{ε}, адже з напінеперервності зверху функції f і наслідку 2 з [1] випливає, що $\varphi^{\wedge} = f^{\wedge\wedge} = (f^{\vee})^{\wedge\wedge} = f^{\vee\wedge} = f^{\wedge}$. Тоді $f(x) - f^{\wedge}(x) \geq \varepsilon$ на S_{ε}. Врахувавши, що $f - f^{\wedge}$ напівнеперервна зверху на G і $\overline{S}_{\varepsilon} \supseteq V$, матимемо, що $f(x) \geq f^{\wedge}(x) + \varepsilon$ на V. Звідси, $f^{\wedge}(x) \geq f^{\wedge}(x) + \varepsilon$ на V, що неможливо. □

3. Леми про стежки. Для точки $b \in [0, +\infty]$ позначимо $W_n(b) = (b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$, якщо $b < +\infty$ і $W_n(b) = (n, +\infty]$, якщо $b = +\infty$. Для послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ підмножин топологічного простору X і точки $a \in X$ запис $A_n \to a$ означає, що для довільного околу U точки a існує номер n_0, такий, що $A_n \subseteq U$ при $n > n_0$. Нехай $\varphi \colon X \to [0, +\infty]$ — деяка функція. Послідовність $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *φ-стежкою* до a, якщо множини U_n відкриті в X, послідовність $\big(\overline{U}_n\big)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктна, $U_n \to a$, $\varphi(U_n) \subseteq W_n\big(\varphi(a)\big)$ і U_n непорожні для всіх n починаючи з деякого номера n_0. Позначатимемо $\mathrm{Gr}(\varphi) = \big\{(x, \varphi(x)) \colon x \in X\big\}$ графік φ. Множину $G \subseteq X$ називатимемо *φ-дотичною до множини $E \subseteq X$*, якщо $\mathrm{Gr}\big(\varphi|_E\big) \subseteq \overline{\mathrm{Gr}\big(\varphi|_G\big)}$. Множину G називаємо *φ-дотичною до точки a*, якщо вона є φ-дотичною до множини $\{a\}$, тобто, якщо $(a, \varphi(a)) \in \overline{\mathrm{Gr}\big(\varphi|_G\big)}$.

Лема 5. *Нехай X — регулярний топологічний простір з першою аксіомою зліченності, $f \colon X \to [0, +\infty]$ — деяка квазінеперервна функція, a — неізольована точка X, $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність відкритих в X φ-дотичних до a множин. Тоді існує φ-стежка $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ до a, для якої $\varnothing \neq \overline{U}_n \subseteq G_n$ для кожного n.*

Доведення. Нехай $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ — деяка база околів a, причому V_n відкриті і $V_{n+1} \subseteq V_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $W_n = W_n\big(\varphi(a)\big)$. Побудуємо диз'юнктну послідовність відкритих непорожніх множин U_n, таку, що $\overline{U}_n \subseteq G_n \cap V_n \setminus \{a\}$ $\varphi(V_n) \subseteq W_n$. Нехай для деякого номера n уже побудовані множини U_m при $m < n$ для яких в иконуються відповідні властивості. Покладемо $V_n' = V_n \setminus \bigcup_{m<n} \overline{U}_m$. Тоді $\big(V_n' \times W_n\big) \cap \mathrm{Gr}\big(\varphi|_G\big) \neq \varnothing$. Отже, існує точка $a_n \in V_n' \cap G_n$, для якої $\varphi(a_n) \in W_n$. Але φ — квазінеперервна. Тому існує така відкрита непорожня множина U_n, що $\overline{U}_n \subseteq V_n' \cap G_n \setminus \{a\}$ і $\varphi(U_n) \subseteq W_n$, тобто, послідовність (U_n) повністю визначена. Оскільки $U_n \subseteq V_n$, то $U_n \to a$. Крім того, $\varphi(U_n) \subseteq W_n$. Отже, (U_n) є шуканою φ-стежкою до a. □

Лема 6. *Нехай X — метризовний топологічний простір, $f \colon X \to [0, +\infty]$ — деяка квазінеперервна функція, S — ніде не щільна σ-дискретна підмножина X, $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ — спадна послідовність φ-дотичних до E відкритих в X множин. Тоді існує сім'я $(U_n^s)_{s \in S, n \in \mathbb{N}}$, для якої виконуються такі умови:*

$$\text{для довільного } s \in S \text{ послідовність } (U_n^s)_{n=1}^{\infty} \text{ є } \varphi\text{-стежкою до } s; \tag{2}$$

$$\text{для довільних } n \in \mathbb{N} \text{ та } s \in S \text{ виконується, що } \overline{U_n^s} \subseteq G_n; \tag{3}$$

$$\text{для довільного } T \subseteq S \text{ сім'я } (U_n^t)_{t \in T, n \in \mathbb{N}} \text{ дискретна на } X \setminus \overline{T}; \tag{4}$$

$$\text{для довільного } n \in \mathbb{N} \text{ сім'я } (U_n^s)_{s \in S} \text{ дискретна.} \tag{5}$$

Доведення. За лемою 2 існують відокремні множини T_k, такі, що $S = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} T_k$. Візьмемо таку спадну послідовність чисел $\varepsilon_k < 1$, що $\varepsilon_k \to 0$ і множини T_k є $3\varepsilon_k$-відокремними. Покладемо $S_k = \bigsqcup_{j<k} T_j$. Зараз ми індукцією по k побудуємо сім'ї $(U_n^t)_{t \in T_k, n \in \mathbb{N}}$ відкритих непорожніх множин, такі, що виконувались умови (2) (3), і для довільного k

$$\begin{aligned}
&U_n^t \subseteq B(t, \tfrac{\varepsilon_k}{n}) \setminus \overline{S} \text{ при } t \in T_k \\
&\text{сім'я } \big(\overline{U_n^s}\big)_{s \in S_k, n \in \mathbb{N}} \text{ диз'юнктна,} \\
&U_n^t = \varnothing \text{ при } k > n \text{ і } t \in T_k \\
&U_n^t \neq \varnothing \text{ при } k \leq n \text{ і } t \in T_k.
\end{aligned}$$

Припустимо, що для деякого $k \in \mathbb{N}$ уже побудовані множини U_m^s при $s \in S_k$ і $m \in \mathbb{N}$ так, що виконуються відповідні властивості. Візьмемо деяке $t \in T_k$ і побудуємо множини

U^t_n. Оскільки відокремні множини є замкненими, то множина S_k також замкнена. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, для якого $B(t, 2\varepsilon) \cap S_k = \varnothing$. Але $\frac{\varepsilon_j}{m} < \frac{1}{m}$ для довільного j. Тому $B(t,\varepsilon) \cap U^s_m = \varnothing$ при $s \in S_k$ і $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Далі, врахувавши, що сім'ї $\big(B(s,\varepsilon_j)\big)_{s\in T_j}$ при $j < k$ дискретні, одержуємо локальну скінченність сім'ї $(U^s_m)_{s\in S_k, m\le\frac{1}{\varepsilon}}$. Тому

$$B(t,\varepsilon) \cap \overline{\bigcup_{s\in S_k}\bigcup_{m\in\mathbb{N}} U^s_m} \subseteq \overline{\bigcup_{s\in S_k}\bigcup_{m\le\frac{1}{\varepsilon}} U^s_m} = \bigcup_{s\in S_k}\bigcup_{m\le\frac{1}{\varepsilon}} \overline{U^s_m} \not\ni t.$$

Отже, множина $U_k = X \setminus \overline{\bigcup_{s\in S_k}\bigcup_{m\in\mathbb{N}} U^s_m}$ є околом точки t. Тоді множини $G^t_n = U_k \cap B(t, \frac{\varepsilon_k}{n}) \cap G_n$ є φ-дотичними до t. Далі, за лемою 5 побудуємо φ-стежку (U^t_n) до t, для якої $\varnothing \ne \overline{U^t_n} \subseteq G^t_n$. Замінюючи перші $k-1$ множини на порожні, можна вважати, що $U^t_n = \varnothing$ при $n < k$ і $U^t_n \ne \varnothing$ при $n \ge k$. Тоді сім'я $(U^t_n)_{t\in T_k}$ очевидним чином задовольняє всі необхідні умови.

Покажемо, що побудована сім'я $(U^s_n)_{s\in S, n\in\mathbb{N}}$ шукана. Властивості (2) і (3) перевірялись при побудові. Перевіримо (4). Візьмемо $T \subseteq S$ і точку $a \in X \setminus \overline{T}$. Оскільки сім'я $\big(\overline{U^s_n}\big)_{s\in S, n\in\mathbb{N}}$, очевидним чином, є диз'юнктною, то досить перевірити локальну скінченність сім'ї $(U^t_n)_{t\in T, n\in\mathbb{N}}$ в точці a. Для цього візьмемо таке $\varepsilon > 0$, що $B(a, 2\varepsilon) \cap T = \varnothing$. При $n > \frac{1}{\varepsilon}$ виконується, що $\frac{\varepsilon_k}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Тому $U^t_n \cap B(a,\varepsilon) = \varnothing$ при $t \in T$. Далі, оскільки $\varepsilon_k \downarrow 0$ то існує таке k, що $\varepsilon_k < \varepsilon$. Тоді $B(a,\varepsilon) \cap U^t_n = \varnothing$ при $j \ge k$ і $t \in T \cap T_j$. Але сім'ї $\big(B(s,\varepsilon_j)\big)_{s\in T_j}$ дискретні. Тому для довільних n та j сім'я $(U^t_n)_{t\in T_j}$ також дискретна, і, отже сім'я $(U^t_n)_{t\in T, n\in\mathbb{N}}$ локально скінченна в точці a. Нарешті, оскільки $U^t_n = \varnothing$ при $k > n$ та $t \in T_k$ і сім'ї $(U^t_n)_{t\in T_j}$ дискретні, то сім'я $(U^s_n)_{s\in S}$ є локально скінченною, а тому, і дискретною. □

Лема 7. *Нехай X — метризовний топологічний простір, $\varphi\colon X \to [0,+\infty]$ — деяка квазінеперервна функція, $(S_k)_{k=1}^\infty$ — послідовність ніде не щільних σ-дискретних підмножин X, для яких $\overline{S}_j \cap S_k = \varnothing$ при $j < k$, $T_k = \bigsqcup_{j=1}^k S_j$, $S = \bigsqcup_{k=1}^\infty S_k$, G — відкрита в X множина така, що $S \subseteq \operatorname{int}\overline{G}$. Тоді існує така сім'я $(U^s_m)_{s\in S, m\in\mathbb{N}}$ підмножин G, що для довільних s, t, j, k, m, n виконуються умови*

$$\text{послідовність } (U^s_m)_{m=1}^\infty \text{ є } \varphi\text{-стежкою до } s \text{ при } s \in S; \tag{6}$$
$$U^s_m \cap U^t_n = \varnothing \text{ якщо } j \le k \le j+m,\ s \in S_j,\ t \in S_k, \text{ і } (s,m) \ne (t,n); \tag{7}$$
$$\overline{U^s_m} \cap \overline{T}_{j+m} = \varnothing \text{ при } s \in T_j; \tag{8}$$
$$\text{сім'я } (U^t_m)_{t\in T_n, m<n} \text{ локально скінченна на } X; \tag{9}$$
$$\text{для довільного } T \subseteq T_n \text{ сім'я } (U^t_m)_{t\in T, m\in\mathbb{N}} \text{ локально скінченна на } X \setminus \overline{T}; \tag{10}$$
$$\text{множина } X \setminus \overline{\bigcup_{t\in T_n}\bigcup_{m\ge n} U^t_m} \text{ є } \varphi\text{-дотичною до } \overline{T}_n, \tag{11}$$

Доведення. Покладемо $T_0 = F_0 = E_0 = \varnothing$, $F_k = \overline{T}_k$ і $E_k = F_k \setminus F_{k-1}$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Тоді $S_k \subseteq E_k$. За лемою 1 для довільного k існує множина B_k, яка є σ-дискретною в $X \times \overline{\mathbb{R}}$ щільною підмножиною $\mathrm{Gr}(\varphi|_{F_k})$. Нехай $A_k = \mathrm{pr}_X(B_k)$. Зрозуміло, що $A_k \subseteq F_k$. Зауважимо, що за теоремою Куратовського про замкненість проекції паралельно до компакта ([2]), проекція на X довільної замкненої дискретної в $X \times \overline{\mathbb{R}}$ множини є замкненою і дискретною. Але, з леми 2 випливає, що множина B_k подається у вигляді об'єднання послідовності замкнених дискретних множин. Тому, множина A_k є σ-дискретною. Розглянемо σ-дискретні множини $T'_k = A_k \cup T_k$, $S' = \bigcup_{k=1}^\infty T'_k$ і $S'_k = E_k \cap S'$. Оскільки $S_k \subseteq E_k$, то $S_k \subseteq S'_k \subseteq E_k$. Але $\overline{T'_k} = F_k$. Тому $\overline{S'_j} \cap S'_k = \varnothing$ при $j < k$.

Спочатку ми побудуємо відкриту сім'ю $(V^s_m)_{s\in S',m\in\mathbb{N}}$ таку, що виконуються властивості $(6')$–$(10')$, які отримуються з (6)–(10) заміною U^s_m на V^s_m, T_k на T'_k і S_n на S'_n. Припустимо, що для деякого k уже побудовані множини V^s_m при $s\in T'_{k-1}$ і $m\in\mathbb{N}$ так, що виконуються відповідні властивості. Розглянемо множину $I_k=\{(s,m)\colon j<k\le j+m, s\in S'_j\}$. Тоді з $(8')$ одержуємо, що $\overline{V^s_m}\cap S'_k=\varnothing$ при $(s,m)\in I_k$, а з $(10')$ випливає, що сім'я $(V^s_m)_{(s,m)\in I_k}$ локально скінченна на S'_k, адже $\overline{T'_{k-1}}\cap S'_k=\varnothing$. Отже, множина $U_k=X\setminus\bigcup_{(s,m)\in I_k}\overline{V^s_m}$ є околом множини S'_k. Оскільки φ квазінеперервна а множини T_j ніде не щільні, то множина $G_{kn}=U_k\setminus\overline{T}_{k+n}$ є φ-дотичною до S'_k. Тепер за лемою 6 побудуємо сім'ю $(V^s_n)_{s\in S'_k}$ для яких виконуються властивості $(2')$–$(5')$, які отримуються з (2)–(5) заміною U^s_m на V^s_m, S на S'_k і G_n на G_{kn}. Тоді очевидно, що виконуються властивості $(6')$–$(10')$ очевидним чином виконуватимуться. Отже, сім'ю $(V^s_m)_{s\in S',m\in\mathbb{N}}$ повністю визначено.

Покладемо тепер $U^s_m=G\cap V^s_{2m}$ для довільних $s\in S$ і $m\in\mathbb{N}$. Тоді властивості (6)–(10) випливатимуть з $(6')$–$(10')$. Перевіримо (11). По-перше, зауважимо, що з $(7')$ випливає, що сім'я $(V^t_m)_{t\in T_n,m\ge n}$ диз'юнктна. Тому множина $X\setminus\overline{\bigcup_{t\in T_n}\bigcup_{m\ge n}U^t_m}=X\setminus\overline{\bigcup_{t\in T_n}\bigcup_{m\ge n}V^t_{2m}}$ містить множину $H=\bigcup_{t\in T'_n}\bigcup_{m\ge n}V^t_{2m+1}$. Отже, досить довести, що множина H є φ-дотичною до $F_n=\overline{T}_n$. Візьмемо точку $a\in F_n$ і прямокутний відкритий окіл $V\times W$ точки $(a,\varphi(a))$. Але $(a,\varphi(a))\in\mathrm{Gr}(\varphi|_{F_n})\subseteq\overline{B}_n$. Тоді існує деяка точка $b\in B_n\cap(V\times W)$. Але $t=\mathrm{pr}_X(b)\in A_n\subseteq T'_n$ причому $t\in V$. Тоді, за рахунок $(6')$, існує такий номер $m{>}n$, для якого $\varnothing{\ne}V^t_{2m+1}\subseteq V$ і $\varphi(V^t_{2m+1})\subseteq W$. Тоді $(V{\times}W)\cap\mathrm{Gr}(\varphi|_H)\supseteq\mathrm{Gr}(\varphi|_{V^t_{2m+1}})\ne\varnothing$. □

4. Леми про усереднення. Нехай X — топологічний простір, $\varphi\colon X\to[0,+\infty]$ та $u\colon X\to\mathbb{R}$. Функцію $[u]_\varphi=\frac12\big((\varphi{+}u)^\vee{+}(\varphi{-}u)^\vee\big)$ називатимемо *φ-усередненням* функції u. Почнемо з деяких найпростіших властивостей усереднення

Лема 8. *Нехай X — топологічний простір, $\varphi\colon X\to[0,+\infty]$ — напівнеперервна зверху функція, $u,v\colon X\to\mathbb{R}$ і $a\in X$. Тоді*

(i) $\varphi\le[u]_\varphi\le\varphi+\frac12\omega_u$;

(ii) якщо $|v|\le\varepsilon$ для деякого $\varepsilon>0$, то $[u]_\varphi-\varepsilon\le[u+v]_\varphi\le[u]_\varphi+\varepsilon$;

(iii) якщо функція $v\colon X\to\mathbb{R}$ неперервна в точці a, то $[u+v]_\varphi(a)=[u]_\varphi(a)$;

(iv) якщо $\varphi+|u|\le\gamma$ для деякої константи γ, то $[u]_\varphi\le\gamma$;

(v) якщо $a_n\to a$, $\varphi(a_n)\to\alpha$ і $(-1)^nu(a_n)\to\beta$, то $[u]_\varphi(a)\ge\alpha+\beta$.

Доведення. (i) По-перше, $[u]_\varphi=\frac12\big((\varphi+u)^\vee+(\varphi-u)^\vee\big)\ge\frac12(\varphi+u+\varphi-u)=\varphi$. По-друге, $[u]_\varphi=\frac12\big((\varphi+u)^\vee+(\varphi-u)^\vee\big)\le\frac12\big(\varphi^\vee+u^\vee+\varphi^\vee+(-u)^\vee\big)=\varphi+\frac12(u^\vee-u^\wedge)=\varphi+\frac12\omega_u$.

(ii) Справді, з одного боку $[u+v]_u=\frac12\big((\varphi+u)^\vee+(\varphi-u)^\vee\big)\le\frac12\big((\varphi+\varepsilon)^\vee+(\varphi+\varepsilon)^\vee\big)=[u]_\varphi+\varepsilon$. Подібно, $[u+v]_u=\frac12\big((\varphi+u)^\vee+(\varphi-u)^\vee\big)\ge\frac12\big((\varphi-\varepsilon)^\vee+(\varphi-\varepsilon)^\vee\big)=[u]_\varphi-\varepsilon$.

(iii) Неперервну функцію можна виносити з-під знаку операції $^\vee$. Тому $[u+v]_\varphi(a)=\frac12\big((\varphi+u)^\vee(a)+v(a)+(\varphi-u)^\vee(a)-v(a)\big)=[u]_\varphi(a)$.

(iv) Справді, $[u+v]_u=\frac12\big((\varphi+u)^\vee+(\varphi-u)^\vee\big)\le\frac12(\gamma+\gamma)=\gamma$.

(v) Розглянемо деякий окіл U точки a. Оскільки $a_n\to a$, то існує номер m, такий, що $a_n\in U$ при $m>n$. Тоді $a_{2m},a_{2m+1}\in U$. Звідси, $\sup\limits_{x\in U}(\varphi(x)+u(x))\ge\varphi(a_{2m})+u(a_{2m})\to\alpha+\beta$ і $\sup\limits_{x\in U}(\varphi(x)-u(x))\ge\varphi(a_{2m+1})-u(a_{2m+1})\to\alpha+\beta$. Отже, $(\varphi+u)^\vee(a)\ge\alpha+\beta$ і $(\varphi-u)^\vee(a)\ge\alpha+\beta$. Тому $[u]_\varphi\ge\alpha+\beta$. □

Лема 9. *Нехай X — топологічний простір, $\varphi\colon X \to [0,+\infty]$ — напівнеперервна зверху функція, $\psi\colon X \to [0,+\infty]$, $S = \operatorname{supp}\psi$, $u_s\colon X \to \mathbb{R}$ — неперервні на $X \setminus \{s\}$, $U_s = \operatorname{supp} u_s$ — відкриті, $a_n^s \in U_s$ при $s \in S$, причому сім'я $\left(\overline{U_s}\right)_{s\in S}$ диз'юнктна і для довільного $T \subseteq S$ сім'я $(U_t)_{t\in T}$ дискретна на $X \setminus \overline{T}$, $|u_s(x)| \le \psi(s)$ при $x \in X$, $|\varphi(x) - \varphi(s)| \le \varepsilon$ при $x \in U_s$, $\varphi(a_n^s) \to \varphi(s)$, $a_n^s \to s$ і $(-1)^n u_s(a_n^s) \to \psi(s)$ для довільного $s \in S$. Тоді для функції $u = \sum_{s\in S} u_s$ виконується нерівність $(\varphi + \psi)^\vee \le [u]_\varphi \le (\varphi + \psi)^\vee + \varepsilon$.*

Доведення. Позначимо $f = (\varphi + \psi)^\vee$. Зафіксуємо деяку точку $a \in X$ і доведемо, що $[u]_\varphi(a) \le f(a) + \varepsilon$. Якщо $f(a) = +\infty$, то доводити нічого. Отож, вважатимемо, що $f(a) < +\infty$. Візьмемо $\gamma > f(a)$. З означення верхньої граничної функції випливає, що існує такий відкритий окіл U точки a, для якого $\varphi(x) + \psi(x) < \gamma$ при $x \in U$. Покладемо $T' = S \cap U$, $T'' = S \setminus U$, $u' = \sum_{t\in T'} u_t$ і $u'' = \sum_{t\in T''} u_t$. Оскільки $a \notin \overline{T''}$, то сім'я $(U_t)_{t\in T''}$ локально скінченна в точці a. Тому, функція u'' неперервна в точці a, звідси за лемою 8(iii) маємо, що $[u]_\varphi = [u']_\varphi$. Тоді, якщо $x \in U_t$ для деякого $t \in T'$, то $\varphi(x) + |u'(x)| \le \varphi(t) + \varepsilon + \psi(t) \le \gamma + \varepsilon$, адже $T' \subseteq U$. Якщо ж $x \in U \setminus \bigcup_{t\in T'} U_t$, то $\varphi(x) + |u'(x)| = \varphi(x) \le \varphi(x) + \psi(x) \le \gamma$. Таким чином, $\varphi(x) + |u'(x)| \le \gamma + \varepsilon$ на U. Тому за лемою 8(iv) матимемо, що $[u]_\varphi = [u']_\varphi(a) \le \gamma + \varepsilon$. Залишилось спрямувати $\gamma \to f(a)$.

Доведемо тепер, що $f \le [u]_\varphi$. Візьмемо деяку точку $s \in S$. Оскільки $a_n^s \to s$ і $(-1)^n u(a_n^s) = (-1)^n u_s(a_n^s) \to \varphi(s)$, то за лемою 8$(v)$ матимемо, що $[u]_\varphi(s) \ge \varphi(s) + \psi(s)$. Візьмемо тепер точку $x \notin S$. Тоді $\psi(x) = 0$. Звідси, за лемою 8(i) матимемо, що $[u]_\varphi(x) \ge \varphi(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Отже, $[u]_\varphi \ge \varphi + \psi$. Тому, оскільки $[u]_\varphi$ напівнеперервна зверху, то $[u]_\varphi(a) \ge (\varphi + \psi)^\vee = f$. □

Нехай X та Y — топологічні простори і $f, g\colon X \to Y$. Функції f та g називаються *одностайно квазінеперервними*, якщо відображення $(f,g)\colon X \to Y^2$, яке діє з формулою $(f,g)(x) = (f(x), g(x))$, є квазінеперервним.

Лема 10. *Нехай X — топологічний простір і $\varphi\colon X \to [0,+\infty]$ та $u\colon X \to \mathbb{R}$ одностайно квазінеперервні функції. Тоді функції $g = (\varphi+u)^\vee$ та $h = (\varphi-u)^\vee$ також квазінеперервні.*

Доведення. Перевіримо спочатку квазінеперервність функції g. Оскільки g напівнеперервна зверху, то достатньо довести, що g квазінеперервна знизу. Візьмемо деяку точку $a \in X$, число $\gamma < g(a)$ і відкритий окіл U точки a. Далі виберемо таке $\varepsilon > 0$, що $\gamma + \varepsilon < g(a)$. Тоді існує таке $x \in U$, що $\varphi(x) + u(x) > \gamma + \varepsilon$. Оскільки φ та u одностайно квазінеперервні, то існує така відкрита непорожня множина $V \subseteq U$, що $\varphi(y) > \gamma - u(x) + \varepsilon$ і $u(y) > u(x) - \varepsilon$ при $y \in V$. Тоді

$$g(y) \ge \varphi(y) + u(y) > \gamma - u(x) + \varepsilon + u(x) - \varepsilon = \gamma$$

при $y \in V$.

Далі зауважимо, що функції φ та $-u$ також є одностайно квазінеперервними, адже відображення $(\varphi, -u)$ є композицією неперервної симетрії $(s,t) \mapsto (s,-t)$ і квазінеперервного відображення (φ, u), а тому $(\varphi, -u)$ квазінеперервне. Таким чином, квазінеперервність функції $h = (\varphi - u)^\vee$ випливає з випадку, розглянутого вище. □

5. Доведення головного результату. Ми готові тепер довести теорему 1. Доведемо спочатку необхідність. Оскільки $g = g^\wedge$ і $h = h^\wedge$ ([1, наслідок 1]) і $f \ge g$ та $f \ge h$, то $f^\wedge \ge g$ і $f^\wedge \ge h$. Тому $2f^\wedge \ge g + h = f \ge 0$.

Доведемо тепер достатність. Покладемо $\varphi = f^\wedge$. Використовуючи твердження 1 з [1], матимемо, що φ квазінеперервна. Далі, виберемо ψ за лемою 4. Покладемо

$S = \operatorname{supp}\psi$, $F = \varphi^{-1}(+\infty)$ і $G = X \setminus F$. Зрозуміло, що F — замкнена, а G — відкрита. Оскільки, за вибором ψ, маємо, що $S \cap F = \varnothing$, то $S \subseteq X \setminus F = G$. Розглянемо деяку спадну послідовність чисел $\varepsilon_k > 0$, для якої ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ збіжний. Тоді для залишків $\delta_k = \sum_{i=k}^{\infty} \varepsilon_i$ цього ряду матимемо, що $\delta_k \to 0$. Оскільки $\psi^{\vee\wedge} = 0$, то з (1) одержуємо, що множини $F_k = \overline{\operatorname{supp}_{\varepsilon_k}\psi}$ ніде не щільні. Покладемо $S_1 = S \cap F_1$ і $S_k = S \cap (F_k \setminus F_{k-1})$ при $k > 1$ і $T_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} S_k$. Позначимо $\varepsilon_0 = +\infty$. Зауважимо одразу, що $\psi(s) \le \varepsilon_{k-1}$ при $k \in \mathbb{N}$ і $s \in S_k$. За лемою 7 побудуємо таку сім'ю $(U_n^s)_{s\in S, n\in\mathbb{N}}$, що для кожного k виконуються умови (6)–(11).

Для довільних $n, k \in \mathbb{N}$ та $s \in S_k$ розглянемо числа

$$\alpha_n^s = \inf_{x\in U_n^s} \varphi(x),\ \ \beta_n^s = \min\bigl\{(\alpha_n^s - \delta_{k+n})^+, \psi(s), n\bigr\},$$

(тут вважається, що супремум порожньої множини дорівнює 0 і, як звичайно, $t^+ = \max\{t, 0\}$ — це додатна частина числа $t \in \mathbb{R}$). Доведемо, що для довільних $k, n \in \mathbb{N}$ та $s \in S_k$ виконуються такі властивості:

$$\alpha_n^s \to \varphi(s) \text{ і } \beta_n^s \to \psi(s) \text{ при } n \to \infty; \tag{12}$$

$$0 \le \beta_n^s \le \psi(s) \le \varepsilon_{k-1}; \tag{13}$$

$$\text{якщо } \beta_n^s > 0, \text{ то } \beta_n^s + \delta_{k+n} \le \alpha_n^s; \tag{14}$$

По-перше, з (6) випливає, що $|\varphi(x) - \varphi(s)| < \frac{1}{n}$ при $x \in U_n^s$, звідси одержуємо, що $\alpha_n^s \to \varphi(s)$. Але $\delta_{k+n} \to 0$ при $n \to \infty$, звідси $(\alpha_n^s - \delta_{k+n})^+ \to \varphi(s)$ при $n \to \infty$. Тому, $\beta_n^s \to \min\{\varphi(s), \psi(s)\}$. Але за умовою теореми $\varphi(s) + \psi(s) \le f(s) \le 2\varphi(s)$. Врахувавши, що $\varphi(s) < +\infty$, одержуємо, що $\psi(s) \le \varphi(s)$, тобто, (12) виконується. Властивість (13) очевидна. Перевіримо нарешті (14). Якщо $\beta_n^s > 0$, то $(\alpha_n^s - \delta_{k+n})^+ > 0$. Отже, $(\alpha_n^s - \delta_{k+n})^+ = \alpha_n^s - \delta_{k+n}$. Тому $\beta_n^s \le \alpha_n^s - \delta_{k+n}$.

Тепер для довільних $n \in \mathbb{N}$ та $s \in S$ виберемо таку неперервну функцію $\varphi_n^s \colon X \to [0, 1]$, що $\operatorname{supp}\varphi_n^s \subseteq U_n^s$ і $\max\limits_{x\in U_n^s} \varphi_n^s(x) = 1$, якщо $U_n^s \ne \varnothing$. Покладемо

$$u_n^s = (-1)^n \beta_n^s \varphi_n^s,\ \ u^s = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n^s,\ \ u_k = \sum_{s\in S_k} u^s,\ \ u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k,\ \ r_n = \sum_{k>n} u_k,$$

$$v_{kn} = \textstyle\sum_{s\in S_k} u_n^s,\ \ v_n = \sum_{k,m=1}^{n} v_{km},\ \ w_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m\ge n} v_{km},\ \ w_n^s = \sum_{m\ge n} u_m^s,$$

і покажемо, що функції $g = \frac{1}{2}(\varphi + u)^{\vee}$ та $h = \frac{1}{2}(\varphi - u)^{\vee}$ шукані. Перевіримо спочатку, що для довільного номера n виконуються такі властивості:

$$\text{сім'я } (U_m^s)_{s\in S_n, m\in\mathbb{N}} \text{ диз'юнктна}; \tag{15}$$

$$\text{сім'я } (U_m^t)_{t\in T_n, m\ge n} \text{ диз'юнктна}; \tag{16}$$

$$u = v_n + w_n + r_n; \tag{17}$$

$$v_n \text{ — неперервна}; \tag{18}$$

$$|r_n| \le \delta_n. \tag{19}$$

По-перше, (15) і (16) негайно випливають з (7). Рівність (17) очевидна. Неперервність v_n випливає з властивості (9). З (13), за рахунок (15), випливає, що $|u_k| \le \varepsilon_{k-1}$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Тому $|r_n| \le \sum_{k>n} |u_k| \le \sum_{k>n} \varepsilon_{k-1} = \delta_n$.

Тепер перевіримо, що $g, h \ge 0$. Для цього досить переконатись, що $|u(x)| \le \varphi(x)$ на X. Зафіксуємо деяке $x \in X$. Якщо $\beta_n^s = 0$ для довільних s та n з $x \in U_n^s$, то

$|u(x)| = 0 \le \varphi(x)$. Нехай тепер $\beta^s_n > 0$ для деяких s та n з $x \in U^s_n$. Позначимо через j найменший з таких номерів, що існують $s \in S_j$ та $m \in \mathbb{N}$ такі, що $\beta^s_m > 0$ і $x \in U^s_m$. Тоді з (7) матимемо, що $x \notin U^t_n$ при $j < k \le j+m$, $t \in S_k$ і $n \in \mathbb{N}$. Тому $u_k(x) = 0$ при $j < k \le j+m$. Отже, $u(x) = u^s_m(x) + r_{j+m}(x)$. Але $|r_{j+m}(x)| \le \delta_{j+m}$. Таким чином, скориставшись (14), матимемо, що $|u(x)| \le \beta^s_m + \delta_{j+m} \le \alpha^s_m \le \varphi(x)$.

Доведемо квазінеперервність функцій g та h. За лемою 10 досить переконатись, що функції φ та u одностайно квазінеперервні. Візьмемо деяку точку $a \in X$. Розглянемо також деякий відкритий прямокутний окіл $V \times W$ точки $(\varphi(a), u(a))$ в $\overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і $n \in \mathbb{N}$ такі, що $\big(u(a) - 4\varepsilon, u(a) + 4\varepsilon\big) \subseteq W$ і $\delta_n < \varepsilon$. Користуючись (18), виберемо такий відкритий окіл $U_0 \subseteq V$ точки a, що $|v_n(x) - v_n(a)| < \varepsilon$ при $x \in U_0$.

Перевіримо тепер, що існує така відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U_0$, для якої $\varphi(U_1) \subseteq V$ і $|w_n(x) - w_n(a)| < \varepsilon$ на U_1. Якщо $a \notin \overline{T}_n$, то за рахунок (10) функція u_n неперервна в точці a. А значить, (φ, u_n) — квазінеперервна в точці a. Звідси і випливає потрібна властивість. Нехай тепер $a \in \overline{T}_n$. Покладемо $U = X \setminus \overline{\bigcup_{t \in T_n} \bigcup_{m \ge n} U^t_m}$. Тоді з (11) випливає, що $(a, \varphi(a)) \in \mathrm{Gr}(\varphi|_{\overline{T}_n}) \subseteq \overline{\mathrm{Gr}(\varphi|_U)}$. Отже, $(U_0 \times W) \cap \mathrm{Gr}(\varphi|_U) \ne \varnothing$. Тому існує деяка точка $x_0 \in U \cap U_0$, така, що $\varphi(x_0) \in W$. Але φ квазінеперервна. Тому існує така відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U \cap U_0$, для якої $\varphi(U_1) \subseteq W$. Але $w_n(a) = 0$ і $w_n(x) = 0$ при $x \in U_1$, тобто, U_1 задовольняє потрібні умови.

Тепер для довільного $x \in U_1$ матимемо, що $\varphi(x) \in W$ і

$$|u(x) - u(a)| \le |v_n(x) - v_n(a)| + |w_n(x) - w_n(a)| + |r_n(x)| + |r_n(a)| < 2\varepsilon + 2\delta_n < 4\varepsilon,$$

а значить, $(\varphi(x), u(x)) \in V \times W$. Отже, функції φ та u одностайно неперервні.

І нарешті з'ясуємо, що $g + h = f$. По-перше, $g + h = [u]_\varphi$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. З леми 8 (*iii*), (17) і (18) одержуємо, що $[u]_\varphi = [w_n + r_n]_\varphi$. А тому, за рахунок леми 8 (*ii*) і (19) матимемо, що $[w_n]_\varphi - \delta_n \le [u]_\varphi \le [w_n]_\varphi + \delta_n$. Позначимо, $W^t_n = \operatorname{supp} w^t_n$ при $t \in T_n$ і $\psi_n = \psi \mathbf{1}_{T_n}$. Зафіксуємо $t \in T_n$. Тоді з (6) маємо, що існує такий номер n_t, що $U^t_{2n_t+m} \ne \varnothing$ при $m \in \mathbb{N}$. Виберемо $a^t_m \in U^t_{2n_t+m}$, для якого $\varphi^t_{2n_t+m}(a^t_m) = 1$. Тоді з (12) маємо, що $(-1)^m w^t_n(a^t_m) = \beta_{2n_t+m} \to \psi(t) = \psi_n(t)$. Крім того, з (6) випливає, що $U^t_m \to t$ і $|\varphi(x) - \varphi(t)| < \frac{1}{m}$ при $x \in U^t_m$. Тому $a^t_m \to t$. Далі, оскільки $W^t_n \subseteq \bigcup_{m \ge n} U^s_m$, то $|\varphi(x) - \varphi(t)| < \frac{1}{n}$ при $x \in W^t_n$. І нарешті, за рахунок (10) матимемо, що w^t_n неперервна на $X \setminus \{t\}$. Отже, оскільки $w^t_n(t) = 0$, то W^t_n — відкрита. Застосовуючи лему 9 із заміною ψ на ψ_n, S на T_n, u_s на w^t_n, U_s на W^t_n, ε на $\frac{1}{n}$ і u на w_n, одержуємо, що $(\varphi + \psi_n)^\vee \le [w_n]_\varphi \le (\varphi + \psi_n)^\vee + \frac{1}{n}$. Тоді

$$(\varphi + \psi_n)^\vee - \delta_n \le [w_n]_\varphi - \delta_n \le [u]_\varphi \le [w_n]_\varphi + \delta_n \le (\varphi + \psi_n)^\vee + \tfrac{1}{n} + \delta_n.$$

Але $\varphi + \psi_n \le (\varphi + \psi_n)^\vee \le (\varphi + \psi)^\vee$. Тому $\varphi + \psi_n - \delta_n \le [u]_\varphi \le (\varphi + \psi)^\vee + \frac{1}{n} + \delta_n$. Але, оскільки $T_n \uparrow S$, то $\psi_n(x) = \psi(x)\mathbf{1}_{T_n}(x) \to \psi(x)\mathbf{1}_S(x) = \psi(x)$ для кожного $x \in X$. Отже, переходячи в попередній нерівності до поточкової границі матимемо, що $\varphi + \psi \le [u]_\varphi \le (\varphi + \psi)^\vee$. І нарешті, оскільки $[u]_\varphi$ напівнеперервна зверху, то застосовуючи до цієї нерівності операцію $^\vee$ одержимо, що $[u]_\varphi = (\varphi + \psi)^\vee = f$. Це завершує доведення теореми 1.

ЛІТЕРАТУРА

1. Маслюченко О.В. *Коливання майже неперервних функцій*// Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2010. – V.528. – С. 104–110.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 752с.

Кафедра математичного аналізу
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича,
ovmasl@gmail.com

Надійшло 5.09.2010