УДК 517.52

В. Ю. Слюсарчук

ОПЕРАТОРНИЙ АНАЛОГ ОЗНАКИ БЕРТРАНА

V. Yu. Slyusarchuk. *Operator analogue of Bertrand's test*, Mat. Stud. **35** (2011), 181–195.

We obtain the conditions for convergence of operator series.

В. Е. Слюсарчук. *Операторный аналог признака Бертрана* // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №2. – С.181–195.

Получены условия сходимости операторных рядов.

Нехай E — комплексний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$ і $L(E,E)$ — банахова алгебра лінійних неперервних операторів $A\colon E\to E$ з нормою $\|A\|_{L(E,E)}=\sup_{\|x\|_E=1}\|Ax\|_E$ і одиницею I. Позначимо через $\sigma(A)$, $\partial\sigma(A)$ і $r(A)$ спектр, границю спектра і спектральний радіус оператора A відповідно.

Розглянемо операторний ряд

$$A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots, \tag{1}$$

де $A_n\in L(E,E)$, $n\in\mathbb{N}$. Цей ряд називається *збіжним*, якщо існує такий елемент $S\in L(E,E)$, що $\lim_{n\to\infty}\|S-\sum_{k=1}^n A_k\|_{L(E,E)}=0$. Якщо ж такого елемента не існує, то ряд (1) називається *розбіжним*.

Нас цікавитимуть умови збіжності ряду (1).

Зауважимо, що задача про умови збіжності навіть числових рядів є непростою. Її розв'язанню присвячено багато досліджень, зокрема, й самого автора (див., наприклад, [1]–[4]). Виділимо роботи [3], [4], що присвячені операторним аналогам ознак д'Аламбера і Коші відповідно. У роботі [3] доведено наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для кожного $n\in\mathbb{N}$ оператор A_n має неперервний обернений оператор A_n^{-1} та існує границя*

$$\lim_{n\to\infty}A_{n+1}A_n^{-1}=D. \tag{2}$$

Тоді: 1) ряд (1) збігається, якщо $r(D)<1$; 2) ряд (1) розбігається, якщо $r(D)>1$ і для деякого числа $r\in[1,r(D))$ виконується співвідношення $\sigma(D)\cap\{z\colon |z|=r\}=\varnothing$.

Також у [3] показано, що у випадку нескінченновимірного простору $L(E,E)$ в другій частині твердження теореми 1 не можна відкинути "і для деякого числа $r\in[1,r(D))$ виконується співвідношення $\sigma(D)\cap\{z\colon |z|=r\}=\varnothing$" (твердження теореми буде хибним).

Аналогічні результати мають місце й у випадку операторного аналогу ознаки Коші [4].

2010 *Mathematics Subject Classification:* 47A11.

Очевидно, що у випадку існування границі (2) для членів ряду (1) виконується рекурентне співвідношення

$$A_{n+1} = (D + C_n)A_n, \ n \geq 1, \tag{3}$$

для деяких $C_n \in L(E, E)$, $n \geq 1$, що задовольняють умову $\lim_{n\to\infty} \|C_n\|_{L(E,E)} = 0$.

Важливим для операторних рядів є випадок $D = I$, коли теорема 1 не застосовна до (1). У цьому випадку ряд (1) “повільніше” збігається або “повільніше” розбігається, ніж прогресія.

Метою статті є дослідження збіжності ряду (1), коли для членів цього ряду виконується рекурентне співвідношення

$$A_{n+1} = \Big(I - \frac{1}{n}I - \frac{1}{n\ln n}B + D_n\Big)A_n, \ n \geq 1, \tag{4}$$

аналогічне (3), в якому B і D_n, $n \geq 1$, — елементи алгебри $L(E, E)$, для яких

$$\lim_{n\to\infty} (n\ln n)\|D_n\|_{L(E,E)} = 0 \tag{5}$$

або збігається числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|D_n\|_{L(E,E)}. \tag{6}$$

Зауважимо, що ряд (6) збігається, якщо для деякого числа $\omega \in (0, 1)$ виконується, наприклад, співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} n(\ln n)^{1+\omega}\|D_n\|_{L(E,E)} = 0. \tag{7}$$

1. Основна теорема.

Теорема 2. *Нехай для членів A_n, $n \geq 1$, операторного ряду* (1) *виконується співвідношення* (4).

Тоді: 1) якщо $\sigma(B) \subset \{z\colon \operatorname{Re} z > 1\}$ і виконується співвідношення (5), *то ряд* (1) *збігається; 2) якщо $\sigma(B) \cap \{z\colon \operatorname{Re} z \in (-\infty, 1)\} \neq \varnothing$, збігається числовий ряд* (6) *і кожний оператор A_n, $n \geq 1$, має неперервный обернений, то ряд* (1) *розбігається.*

Доведенню цієї непростої теореми буде приділено основну увагу в подальшому.

При доведенні теореми 2 використовуватимемо ряд допоміжних результатів, які наведемо в наступному параграфі.

Окремим випадком теореми 2 є наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай кожний оператор A_n, $n \geq 1$, має неперервний обернений та існує границя*

$$\lim_{n\to+\infty} \ln n(n(A_nA_{n+1}^{-1} - I) - I) = B.$$

Тоді: 1) якщо $\sigma(B) \subset \{z\colon \operatorname{Re} z > 1\}$, то ряд (1) *збігається; 2) якщо $\sigma(B) \cap \{z\colon \operatorname{Re} z \in (-\infty, 1)\} \neq \varnothing$ і збігається числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big\|A_nA_{n+1}^{-1} - \frac{n+1}{n}I - \frac{1}{n\ln n}B\Big\|_{L(E,E)}, \tag{8}$$

то ряд (1) *розбігається.*

Зазначимо, що ряд (8) збігається, якщо, наприклад, для деякого числа $\omega \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\omega} \| \ln n (n(A_n A_{n+1}^{-1} - I) - I) - B\|_{L(E,E)} = 0.$$

Неважко перевірити, що другі частини тверджень теорем 2 і 3 рівносильні.

Теорема 3, якщо не брати до уваги виконання умови про збіжність ряду (8), є операторним аналогом наступного твердження.

Теорема 4 (**Ознака Бертрана**, [5])**.** *Нехай для числового ряду*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{9}$$

де $a_n \in (0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, *існує границя* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n\Big(n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) - 1\Big) = b$ *(скінченна або нескінченна). Тоді для* $b > 1$ *ряд* (9) *збігається, а для* $b < 1$ *ряд* (9) *розбігається.*

2. Допоміжні твердження.

Лема 1. *Ряд (1) збігається тоді і тільки тоді, коли для довільних відображень* $p_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k = \overline{1,2}$, *для яких* $p_1(n) \le p_2(n)$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty} p_1(n) = +\infty$, *виконується співвідношення* $\lim\limits_{n\to\infty} \Big\| \sum\limits_{k=p_1(n)}^{p_2(n)} A_k \Big\|_{L(E,E)} = 0$.

Ця лема випливає з означення збіжного ряду (1) і повноти простору $L(E,E)$.

Лема 2 ([6])**.** *Для того, щоб дійсному числу* ρ *відповідало додатне число* N_ρ *таке, щоб* $\|e^{tA}\|_{L(E,E)} \le N_\rho e^{\rho t}$, $t \ge 0$, *необхідно, щоб* $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\lambda \le \rho\}$, *і досить, щоб* $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\lambda < \rho\}$.

Лема 3. *Нехай* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *і* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — *довільні додатні числа,* $A \in L(E,E)$ *і* $\delta = \min\limits_{\lambda\in\sigma(A)} \mathrm{Re}\,\lambda$. *Тоді для кожного числа* $\gamma < \delta$ *існує таке число* $M \ge 1$, *що для довільних операторів* $B_1, B_2, \ldots, B_n \in L(E,E)$ *виконуються нерівності*

$$\|(e^{-\xi_n I - \varphi_n A} + B_n) \ldots (e^{-\xi_1 I - \varphi_1 A} + B_1)\|_{L(E,E)} \le M \prod_{k=1}^{n} (e^{-\xi_k - \gamma\varphi_k} + M\|B_k\|_{L(E,E)}),$$

$$\left\| (e^{-\xi_n I - \varphi_n A} + B_n) \ldots (e^{-\xi_1 I - \varphi_1 A} + B_1) - e^{-\sum\limits_{l=1}^{n} \xi_l I - \sum\limits_{l=1}^{n} \varphi_l A} \right\|_{L(E,E)} \le$$

$$\le M \left(\prod_{k=1}^{n} (e^{-\xi_k - \gamma\varphi_k} + M\|B_k\|_{L(E,E)}) - e^{-\sum\limits_{l=1}^{n} \xi_l - \gamma \sum\limits_{l=1}^{n} \varphi_l} \right).$$

Доведення. Використаємо очевидну рівність

$$(e^{-\xi_n I - \varphi_n A} + B_n) \ldots (e^{-\xi_1 I - \varphi_1 A} + B_1) = e^{-(\xi_n + \ldots + \xi_1) I - (\varphi_n + \ldots + \varphi_1) A} + \sum_{l=1}^{n} S_l, \tag{10}$$

в якій S_l — сума $\frac{n!}{l!(n-l)!}$ доданків, кожний з яких має вигляд $A_{m_0} B_{k_1} \ldots A_{m_l - 1} B_{k_l} A_{m_l}$, де $k_1, k_2, \ldots, k_l$ і $m_0, m_1, \ldots, m_l$ — відповідно натуральні і невід'ємні цілі числа, для яких $n \ge k_1 > k_2 > \ldots > k_l \ge 1$, $m_0 + m_1 + \ldots + m_l = n - l$ і

$$A_{m_0} = \begin{cases} I, & \text{якщо } k_1 = n, \\ e^{-(\xi_n + \ldots + \xi_{k_1 - 1}) I - (\varphi_n + \ldots + \varphi_{k_1 - 1}) A}, & \text{якщо } k_1 < n, \end{cases}$$

$$A_{m_1} = \begin{cases} I, & \text{якщо } k_2 = k_1 - 1, \\ e^{-(\xi_{k_1+1}+\ldots+\xi_{k_2-1})I-(\varphi_{k_1+1}+\ldots+\varphi_{k_2-1})A}, & \text{якщо } k_2 < k_1 - 1, \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$A_{m_{l-1}} = \begin{cases} I, & \text{якщо } k_l = k_{l-1} - 1, \\ e^{-(\xi_{k_{l-1}+1}+\ldots+\xi_{k_l-1})I-(\varphi_{k_{l-1}+1}+\ldots+\varphi_{k_l-1})A}, & \text{якщо } k_l < k_{l-1} - 1, \end{cases}$$

$$A_{m_l} = \begin{cases} I, & \text{якщо } k_l = 1, \\ e^{-(\xi_{k_l+1}+\ldots+\xi_1)I-(\varphi_{k_l+1}+\ldots+\varphi_1)A}, & \text{якщо } k_l > 1. \end{cases}$$

Оскільки на підставі леми 2

$$\|A_{m_0}B_{k_1}\cdots A_{m_l-1}B_{k_l}A_{m_l}\|_{L(E,E)} \le$$
$$\le M^{l+1}e^{-\left\{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k+\gamma\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k\right)-\left(\sum\limits_{r=1}^{l}\xi_{k_r}+\gamma\sum\limits_{r=1}^{l}\varphi_{k_r}\right)\right\}}\prod_{q=1}^{l}\|B_{k_q}\|_{L(E,E)}, \text{ то}$$

$$\|S_l\|_{L(E,E)} \le \sum_{n\ge k_1>\ldots>k_l\ge 1} M^{l+1}e^{-\left\{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k+\gamma\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k\right)-\left(\sum\limits_{r=1}^{l}\xi_{k_r}+\gamma\sum\limits_{r=1}^{l}\varphi_{k_r}\right)\right\}}\prod_{q=1}^{l}\|B_{k_q}\|_{L(E,E)}.$$

Тому на підставі (10)

$$\|(e^{-\xi_n I-\varphi_n A}+B_n)\cdots(e^{-\xi_1 I-\varphi_1 A}+B_1)\|_{L(E,E)} \le$$
$$\le \left\|e^{-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)I-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k\right)A}\right\|_{L(E,E)} + \sum_{l=1}^{n}\|S_l\|_{L(E,E)} \le Me^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k-\gamma\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k}+$$
$$+M\sum_{l=1}^{n}\sum_{n\ge k_1>\ldots>k_l\ge 1} e^{-\left\{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k+\gamma\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k\right)-\left(\sum\limits_{r=1}^{l}\xi_{k_r}+\gamma\sum\limits_{r=1}^{l}\varphi_{k_r}\right)\right\}}M^l\prod_{q=1}^{l}\|B_{k_q}\|_{L(E,E)} =$$
$$= M\prod_{k=1}^{n}(e^{-\xi_k-\gamma\varphi_k}+M\|B_k\|_{L(E,E)}),$$

$$\left\|(e^{-\xi_n I-\varphi_n A}+B_n)\cdots(e^{-\xi_1 I-\varphi_1 A}+B_1) - e^{-\left(\sum\limits_{l=1}^{n}\xi_l\right)I-\left(\sum\limits_{l=1}^{n}\varphi_l\right)A}\right\|_{L(E,E)} \le$$
$$\le \sum_{l=1}^{n}\|S_l\|_{L(E,E)} \le \left(Me^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k-\gamma\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k}+\sum_{l=1}^{n}\|S_l\|_{L(E,E)}\right)-Me^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k-\gamma\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k} \le$$
$$\le M\left(\prod_{k=1}^{n}(e^{-\xi_k-\gamma\varphi_k}+M\|B_k\|_{L(E,E)}) - e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k-\gamma\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k}\right). \qquad \square$$

Лема 4. *Співвідношення (4), де оператори D_n, $n \ge 1$, задовольняють (5), (7) або для них збігається ряд (6), рівносильне співвідношенню*

$$A_{n+1} = (e^{-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}B}+B_n)A_n, \ n \ge 1, \tag{11}$$

де B_n — елемент алгебри $L(E,E)$, залежний від D_n, для якого відповідно

$$\lim_{n\to\infty} n(\ln n)\|B_n\|_{L(E,E)} = 0, \ \lim_{n\to\infty} n(\ln n)^{1+\omega}\|B_n\|_{L(E,E)} = 0, \tag{12}$$

де ω — число, що й в (7), або збігається числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|B_n\|_{L(E,E)}. \tag{13}$$

Ця лема випливає з того, що

$$e^{-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}B}=I-\frac{1}{n}\Big(I+\frac{1}{\ln n}B\Big)+\frac{1}{2!n^2}\Big(I+\frac{1}{\ln n}B\Big)^2+$$
$$+\ldots+\frac{(-1)^m}{m!n^m}\Big(I+\frac{1}{\ln n}B\Big)^m+\ldots,\ B_n=D_n+\Big(I-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}B-e^{-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}B}\Big)$$
$$\Big\|I-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}B-e^{-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}B}\Big\|_{L(E,E)}\leq\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!n^m}\Big(\Big\|I+\frac{1}{\ln n}B\Big\|_{L(E,E)}\Big)^m.$$

Лема 5 ([6])**.** *Якщо $\lambda\in\partial\sigma(A)$, то для кожного числа $\varepsilon>0$ існує такий нормований вектор $x\in E$ ($\|x\|_E=1$), що $\|(A-\lambda I)x\|_E<\varepsilon$.*

Лема 6. *Нехай $A\in L(E,E)$, $\alpha+\beta i\in\partial\sigma(A)$, $\delta=\min\limits_{\lambda\in\sigma(A)}\operatorname{Re}\lambda$, $\gamma\in(-\infty,\delta)$ і M — таке число, що $\|e^{-tA}\|_{L(E,E)}\leq Me^{-\gamma t}$ для всіх $t\geq 0$.*

Тоді для довільних натуральних чисел n і m ($n\leq m$), додатних чисел $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m$, $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m$ і операторів $B_1,B_2,\ldots,B_m\in L(E,E)$ виконується нерівність

$$\Big\|\sum_{k=n}^{m}(e^{-\xi_k I-\varphi_k A}+B_k)\cdots(e^{-\xi_1 I-\varphi_1 A}+B_1)\Big\|_{L(E,E)}\geq$$
$$\geq\Big|\sum_{k=n}^{m}e^{-\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l-(\alpha+\beta i)\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l}\Big|-M\sum_{k=n}^{m}\Big(\prod_{l=1}^{k}(e^{-\xi_l-\gamma\varphi_l}+M\|B_l\|_{L(E,E)})-e^{-\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l-\gamma\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l}\Big).$$

Доведення. Очевидно, що

$$\Big\|\sum_{k=n}^{m}(e^{-\xi_k I-\varphi_k A}+B_k)\cdots(e^{-\xi_1 I-\varphi_1 A}+B_1)\Big\|_{L(E,E)}\geq\Big\|\sum_{k=n}^{m}e^{-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l\right)I-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)A}\Big\|_{L(E,E)}-$$
$$-\Big\|\sum_{k=n}^{m}(e^{-\xi_k I-\varphi_k A}+B_k)\cdots(e^{-\xi_1-\varphi_1 A}+B_1)-\sum_{k=n}^{m}e^{-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l\right)I-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)A}\Big\|_{L(E,E)}. \tag{14}$$

Розглянемо нормовані вектори $x_p\in E$, $p\geq 1$, для яких

$$\lim_{p\to\infty}\|(A-(\alpha+\beta i)I)x_p\|_E=0. \tag{15}$$

Такі вектори існують на підставі леми 5 і того, що $\alpha+\beta i\in\partial\sigma(A)$. Оскільки для $p\in\mathbb{N}$

$$\Big\|\sum_{k=n}^{m}e^{-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l\right)I-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)A}\Big\|_{L(E,E)}\geq\Big\|\Big(\sum_{k=n}^{m}e^{-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l\right)I-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)A}\Big)x_p\Big\|_E$$

і на підставі (15)

$$\lim_{p\to\infty}\left\|\left(\sum_{k=n}^{m} e^{-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l\right)I-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)A}\right)x_p\right\|_E=\left|\sum_{k=n}^{m} e^{-\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)(\alpha+\beta i)}\right|,\ \text{то}$$

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} e^{-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l\right)I-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)A}\right\|_{L(E,E)}\geq\left|\sum_{k=n}^{m} e^{-\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)(\alpha+\beta i)}\right|.$$

Звідси і (14) випливає, що

$$\left\|\sum_{k=n}^{m}(e^{-\xi_k I-\varphi_k A}+B_k)\cdots(e^{-\xi_1 I-\varphi_1 A}+B_1)\right\|_{L(E,E)}\geq\left|\sum_{k=n}^{m} e^{-\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)(\alpha+\beta i)}\right|-$$

$$-\left\|\sum_{k=n}^{m}(e^{-\xi_k I-\varphi_k A}+B_k)\cdots(e^{-\xi_1 I-\varphi_1 A}+B_1)-\sum_{k=n}^{m} e^{-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l\right)I-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)A}\right\|_{L(E,E)}\geq$$

$$\geq\left|\sum_{k=n}^{m} e^{-\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)(\alpha+\beta i)}\right|-$$

$$-\sum_{k=n}^{m}\left\|(e^{-\xi_k I-\varphi_k A}+B_k)\cdots(e^{-\xi_1 I-\varphi_1 A}+B_1)-e^{-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l\right)I-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)A}\right\|_{L(E,E)}.$$

На підставі леми 3

$$\sum_{k=n}^{m}\left\|(e^{-\xi_k I-\varphi_k A}+B_k)\cdots(e^{-\xi_1 I-\varphi_1 A}+B_1)-e^{-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l\right)I-\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l\right)A}\right\|_{L(E,E)}\leq$$

$$\leq M\sum_{l=n}^{m}\left(\prod_{l=1}^{k}(e^{-\xi_l-\gamma\varphi_l}+M\|B_l\|_{L(E,E)})-e^{-\sum\limits_{l=1}^{k}\xi_l-\gamma\sum\limits_{l=1}^{k}\varphi_l}\right).$$

Із цієї і попередніх нерівностей випливає твердження леми 6. □

Лема 7. *Нехай γ — дійсне число. Існують такі числа $q_i, Q_i\in(0,+\infty)$ $(q_i\leq Q_i)$ $i=\overline{1,2}$, залежні від γ, що для довільних чисел $n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ і $m\in\mathbb{N}\cap[n,+\infty)$ виконуються співвідношення*

$$q_1\Big(\frac{m}{n-1}\Big)^{\gamma}\leq e^{\gamma\sum\limits_{k=n}^{m}\frac{1}{k}}\leq Q_1\Big(\frac{m}{n-1}\Big)^{\gamma},\tag{16}$$

$$q_2\Big(\frac{\ln m}{\ln n}\Big)^{\gamma}\leq e^{\gamma\sum\limits_{k=n}^{m}\frac{1}{k\ln k}}\leq Q_2\Big(\frac{\ln m}{\ln n}\Big)^{\gamma},\tag{17}$$

Доведення. Застосуємо відому формулу

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+C+\gamma_n,\ n\in\mathbb{N},\tag{18}$$

де C — ейлерова стала і γ_n — деяка нескінченно мала величина при $n\to+\infty$ ([5]). На підставі цієї формули

$$e^{\gamma\sum\limits_{k=n}^{m}\frac{1}{k}}=e^{\gamma\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)}=e^{\gamma\ln\frac{m}{n-1}}e^{\gamma(\gamma_m-\gamma_{n-1})}=\Big(\frac{m}{n-1}\Big)^{\gamma}e^{\gamma(\gamma_m-\gamma_{n-1})}.$$

Звідси випливає співвідношення (16), де $q_1 = \inf\limits_{3\le n\le m} e^{\gamma(\gamma_m-\gamma_{n-1})}$ і $Q_1 = \sup\limits_{3\le n\le m} e^{\gamma(\gamma_m-\gamma_{n-1})}$.

Для доведення (17) використаємо співвідношення

$$\int\limits_{n-1}^{m}\frac{dx}{x\ln x} > \int\limits_{n}^{m+1}\frac{dx}{[x]\ln[x]} = \sum_{n}^{m}\frac{1}{k\ln k} > \int\limits_{n}^{m}\frac{dx}{[x]\ln[x]} > \int\limits_{n}^{m}\frac{dx}{x\ln x},\quad 3\le n\le m,$$

$$\int\limits_{n}^{m}\frac{dx}{x\ln x} = \ln\frac{\ln m}{\ln n},\quad 3\le n\le m, \tag{19}$$

що випливають із властивостей визначеного інтегралу і того, що $\frac{1}{[x]\ln[x]} > \frac{1}{x\ln x}$ для $x\in[3,+\infty)\setminus\mathbb{N}$, де $[x]$ — ціла частина числа x. Оскільки

$$\int\limits_{n-1}^{m}\frac{dx}{x\ln x} - \int\limits_{n}^{m}\frac{dx}{x\ln x} = \ln\frac{\ln n}{\ln(n-1)},\ \text{то}$$

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k\ln k} - \int\limits_{n}^{m}\frac{dx}{x\ln x}\right| < \ln\frac{\ln n}{\ln(n-1)},\quad 3\le n\le m.$$

Тому справджується співвідношення

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k\ln k} = \ln\frac{\ln m}{\ln n} + \gamma_{n,m},\quad 3\le n\le m, \tag{20}$$

де $\gamma_{n,m}$ — величина, для якої

$$|\gamma_{n,m}| \le \ln\frac{\ln n}{\ln(n-1)},\quad 3\le n\le m. \tag{21}$$

Величину $\gamma_{n,m}$ можна подати у вигляді

$$\gamma_{n,m} = C_n + \omega_{n,m},\quad 3\le n\le m, \tag{22}$$

де C_n — стала, залежна від n, і $\omega_{n,m}$ — нескінченно мала величина при $m\to+\infty$ для кожного $n\ge 3$. Справді, для кожного $n\ge 3$ величина

$$a_{n,m} = \sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k\ln k} - \int\limits_{n}^{m}\frac{dx}{x\ln x},\quad m\ge n-1, \tag{23}$$

є монотонно зростаючою, в чому неважко переконатися. Також завдяки (19), (20) і (23)

$$a_{n,m} + \frac{1}{m\ln m} = \gamma_{n,m},\quad m\ge n-1.$$

Звідси, з (21) і монотонності величини $a_{n,m}$, $m\ge n-1$, випливає співвідношення (22).

На підставі (20)

$$e^{\gamma\sum\limits_{k=n}^{m}\frac{1}{k\ln k}} = e^{\gamma(\ln\frac{\ln m}{\ln n}+\gamma_{n,m})} = \left(\frac{\ln m}{\ln n}\right)^{\gamma} e^{\gamma\gamma_{n,m}},\quad 3\le n\le m.$$

Тому виконується співвідношення (17), де $q_2 = \inf\limits_{3\le n\le m} e^{\gamma\gamma_{n,m}}$ і $Q_2 = \sup\limits_{3\le n\le m} e^{\gamma\gamma_{n,m}}$.

Нерівності $0 < q_i \le Q_i$, $i=\overline{1,2}$, очевидні. □

Лема 8 (Операторний аналог ознаки Абеля). *Якщо операторний ряд* (1) *збігається, а числа* a_n, $n \geq 1$, *утворюють монотонну і обмежену послідовність, то операторний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n A_n$ *збігається.*

Доведення. Нехай M — таке число, що $\sup\limits_{n \geq 1} |a_n| \leq M$, і $p_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k = \overline{1,2}$, — довільні відображення, для яких $p_1(n) \leq p_2(n)$, $n \in \mathbb{N}$, і $\lim\limits_{n \to \infty} p_1(n) = +\infty$.

Покажемо, що

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=p_1(n)}^{p_2(n)} a_k A_k \right\|_{L(E,E)} = 0. \tag{24}$$

На підставі перетворення Абеля ([5]) для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=p_1(n)}^{p_2(n)} a_k A_k = a_{p_2(n)} \sum_{l=p_1(n)}^{p_2(n)} A_l - \sum_{k=p_1(n)}^{p_2(n)-1} (a_{k+1} - a_k) \sum_{l=p_1(n)}^{k} A_l.$$

Тому на підставі монотонності і обмеженості послідовності $(a_n)_{n \geq 1}$

$$\begin{gathered} \left\| \sum_{k=p_1(n)}^{p_2(n)} a_k A_k \right\|_{L(E,E)} \leq |a_{p_2(n)}| \left\| \sum_{k=p_1(n)}^{p_2(n)} A_k \right\|_{L(E,E)} + \sum_{k=p_1(n)}^{p_2(n)-1} |a_{k+1} - a_k| \left\| \sum_{l=p_1(n)}^{k} A_l \right\|_{L(E,E)} \leq \\ \leq \left(|a_{p_2(n)}| + \sum_{k=p_1(n)}^{p_2(n)-1} |a_{k+1} - a_k| \right) \max_{p_1(n) \leq k \leq p_2(n)} \left\| \sum_{l=p_1(n)}^{k} A_l \right\|_{L(E,E)} = (|a_{p_2(n)} - a_{p_1(n)}| + \\ + |a_{p_2(n)}|) \max_{p_1(n) \leq k \leq p_2(n)} \left\| \sum_{l=p_1(n)}^{k} A_l \right\|_{L(E,E)} \leq 3M \max_{p_1(n) \leq k \leq p_2(n)} \left\| \sum_{l=p_1(n)}^{k} A_l \right\|_{L(E,E)}. \end{gathered} \tag{25}$$

Оскільки ряд (1) збігається, то $\lim\limits_{n \to \infty} \left\| \sum\limits_{k=1}^{k} A_k - S \right\|_{L(E,E)} = 0$ для деякого $S \in L(E,E)$. Тому

$$\lim_{n \to \infty} \max_{p_1(n) \leq k \leq p_2(n)} \left\| \sum_{l=p_1(n)}^{k} A_l \right\|_{L(E,E)} = 0.$$

Тоді на підставі (25) виконується співвідношення (24). Завдяки лемі 1 виконання цього співвідношення досить для збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k A_k$. □

3. Доведення першої частини твердження теореми 2. Нехай виконується співвідношення $\sigma(B) \subset \{z \colon \operatorname{Re} z > 1\}$. Позначимо $\alpha = \min_{\lambda \in \sigma(B)} \operatorname{Re} \lambda$. Зафіксуємо числа γ і $\hat{\gamma}$, для яких $1 < \gamma < \hat{\gamma} < \alpha$. На підставі леми 2 існує таке число $M \geq 1$, що $\|e^{-tB}\|_{L(E,E)} \leq Me^{-\hat{\gamma} t}$ для всіх $t \geq 0$. Використаємо лему 4. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} A_n, \tag{26}$$

де n_0 — таке натуральне число, що

$$e^{-\frac{1}{k} - \hat{\gamma} \frac{1}{k \ln k}} + M \|B_k\|_{L(E,E} \leq e^{-\frac{1}{k} - \gamma \frac{1}{k \ln k}} \tag{27}$$

для всіх $k \geq n_0$. Це співвідношення виконується на підставі (12). Завдяки (11)

$$A_{n+1} = (e^{-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}B} + B_n)\cdots(e^{-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n_0\ln n_0}B} + B_{n_0})A_{n_0},\ n \geq n_0, \tag{28}$$

де B_n — елемент алгебри $L(E,E)$, що задовольняє (12). Звідси і леми 3 випливає, що

$$\|(e^{-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}B} + B_n)\cdots(e^{-\frac{1}{n_0}I-\frac{1}{n_0\ln n_0}B} + B_{n_0})\|_{L(E,E)} \leq$$

$$\leq M\prod_{k=n_0}^{n}(e^{-\frac{1}{k}-\hat{\gamma}\frac{1}{k\ln k}} + M\|B_k\|_{L(E,E)}),\ n \geq n_0. \tag{29}$$

Тому на підставі (27)–(29) і леми 7 для деяких чисел $Q_1 > 0$ і $Q_2 > 0$

$$\|A_{n+1}\|_{L(E,E)} \leq M\left(\prod_{k=n_0}^{n} e^{-\frac{1}{k}-\gamma\frac{1}{k\ln k}}\right)\|A_{n_0}\|_{L(E,E)} = Me^{-\sum\limits_{k=n_0}^{n}\frac{1}{k}}e^{-\gamma\sum\limits_{k=n_0}^{n}\frac{1}{k\ln k}}\|A_{n_0}\|_{L(E,E)} \leq$$

$$\leq MQ_1Q_2\Big(\frac{n}{n_0-1}\Big)^{-1}\Big(\frac{\ln n}{\ln n_0}\Big)^{-\gamma}\|A_{n_0}\|_{L(E,E)},\ n \geq n_0.$$

Отже,

$$\|A_{n+1}\|_{L(E,E)} \leq \frac{a}{n(\ln n)^{\gamma}},\ n \geq n_0, \tag{30}$$

де $a = MQ_1Q_2(n_0-1)(\ln n_0)^{\gamma}\|A_{n_0}\|_{L(E,E)}$.

Із (30) і того, що $\gamma > 1$, випливає збіжність числового ряду $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\|A_n\|_{L(E,E)}$. Тому збіжним є і ряд (26), що можна показати за допомогою леми 1.

Збіжності ряду (26) досить для збіжності ряду (1).

Таким чином, першу частину твердження теореми 2 доведено.

4. Доведення другої частини твердження теореми 2.

4.1. Випадок $\sigma(B)\cap\{z\colon \mathrm{Re\,z}\in(0,1)\}\neq\varnothing$ і $\sigma(B)\subset\{z\colon\ \mathrm{Re}\,z\in(0,+\infty)\}$.

Нехай $\alpha = \min_{\lambda\in\sigma(B)}\mathrm{Re}\,\lambda$, $\alpha+\beta i\in\partial\sigma(B)$ и γ — довільне число з інтервалу $(0,\alpha)$. Завдяки лемі 2 існує число $M \geq 1$, для якого $\|e^{-tB}\|_{L(E,E)} \leq Me^{-\gamma t}$, $t \geq 0$. Отже, на підставі леми 6

$$\left\|\sum_{k=n}^{m}(e^{-\frac{1}{k}I-\frac{1}{k\ln k}B} + B_k)\cdots(e^{-\frac{1}{3}I-\frac{1}{3\ln 3}B} + B_3)\right\|_{L(E,E)} \geq \left|\sum_{k=n}^{m} e^{-\sum\limits_{l=3}^{k}\frac{1}{l}-(\alpha+\beta i)\sum\limits_{l=3}^{k}\frac{1}{l\ln l}}\right| -$$

$$-M\sum_{k=n}^{m}\left(\prod_{l=3}^{k}(e^{-\frac{1}{l}-\gamma\frac{1}{l\ln l}} + M\|B_l\|_{L(E,E)}) - e^{-\sum\limits_{l=3}^{k}\frac{1}{l}-\gamma\sum\limits_{l=3}^{k}\frac{1}{l\ln l}}\right) \tag{31}$$

для натуральних чисел n і m ($3 \leq n \leq m$), де B_n, $n \geq 3$, — ті самі елементи алгебри $L(E,E)$, що й у співвідношенні (11).

Оцінимо доданки у співвідношенні (31). На підставі (18) і (20) отримуємо

$$\left|\sum_{k=n}^{m} e^{-\sum\limits_{l=3}^{k}\frac{1}{l}-(\alpha+\beta i)\sum\limits_{l=3}^{k}\frac{1}{l\ln l}}\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} e^{-(\ln k-\ln 3+\gamma_k-\gamma_3)-(\alpha+\beta i)(\ln\ln k-\ln\ln 3+\gamma_{3,k})}\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{3(\ln 3)^{\alpha}}{k(\ln k)^{\alpha}}e^{\gamma_3-\gamma_k-\alpha\gamma_{3,k}}\Big\{\cos\Big(\beta\Big(\frac{\ln\ln k}{\ln\ln 3}+\gamma_{3,k}\Big)\Big) - i\sin\Big(\beta\Big(\frac{\ln\ln k}{\ln\ln 3}+\gamma_{3,k}\Big)\Big)\Big\}\right| \geq$$

$$= \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{3(\ln 3)^{\alpha}}{k(\ln k)^{\alpha}}e^{\gamma_3-\gamma_k-\alpha\gamma_{3,k}}\cos\Big(\beta\Big(\frac{\ln\ln k}{\ln\ln 3}+\gamma_{3,k}\Big)\Big)\right|.$$

На підставі (18), (20), (21), збіжності ряду (13) і того, що $\sup_{k\geq 3} e^{3\gamma\ln 3+\gamma_3-\gamma_k+\gamma\gamma_{3,k}} \leq \Omega_1$ і $e^{Me^{\gamma+1}\sum_{l=3}^{\infty}\|B_l\|_{L(E,E)}}-1\leq \Omega_2$ для деяких додатних чисел Ω_1 і Ω_2, отримуємо, що для всіх $n\geq n_0$ (n_0 — достатньо велике натуральне число)

$$M\sum_{k=n}^{m}\left(\prod_{l=3}^{k}(e^{-\frac{1}{l}-\gamma\frac{1}{l\ln l}}+M\|B_l\|_{L(E,E)})-e^{-\sum\limits_{l=3}^{k}\frac{1}{l}-\gamma\sum\limits_{l=3}^{k}\frac{1}{l\ln l}}\right)=$$

$$=M\sum_{k=n}^{m}e^{-\sum\limits_{l=3}^{k}\frac{1}{l}-\gamma\sum\limits_{l=3}^{k}\frac{1}{l\ln l}}\left(\prod_{l=3}^{k}(1+M\|B_l\|_{L(E,E)}e^{\frac{1}{l}+\gamma\frac{1}{l\ln l}})-1\right)\leq$$

$$\leq M\sum_{k=n}^{m}e^{-(\ln k-\ln 3+\gamma_k-\gamma_3+\gamma(\ln\ln k-\ln\ln 3+\gamma_{3,k}))}\left(\prod_{l=3}^{k}(1+Me^{\gamma+1}\|B_l\|_{L(E,E)})-1\right)\leq$$

$$\leq M\Omega_1\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\ln k)^{\gamma}}\left(\prod_{l=3}^{\infty}(1+Me^{\gamma+1}\|B_l\|_{L(E,E)})-1\right)<$$

$$<M\Omega_1\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\ln k)^{\gamma}}\left(e^{Me^{\gamma+1}\sum\limits_{l=3}^{\infty}\|B_l\|_{L(E,E)}}-1\right)<M\Omega_1\Omega_2\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\ln k)^{\gamma}}<$$

$$<M\Omega_1\Omega_2\int\limits_{n-1}^{m}\frac{dt}{t(\ln t)^{\gamma}}=\frac{M\Omega_1\Omega_2}{1-\gamma}((\ln m)^{1-\gamma}-(\ln(n-1))^{1-\gamma})<\frac{M\Omega_1\Omega_2}{1-\gamma}(\ln m)^{1-\gamma}.$$

Отже, на підставі (31) для всіх $n\geq n_0$

$$\left\|\sum_{k=n}^{m}(e^{-\frac{1}{k}I-\frac{1}{k\ln k}B}+B_k)\dots(e^{-\frac{1}{3\ln 3}I-\frac{1}{3}B}+B_3)\right\|_{L(E,E)}\geq$$

$$\geq\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{3(\ln 3)^{\alpha}}{k(\ln k)^{\alpha}}e^{\gamma_3-\gamma_k-\alpha\gamma_{3,k}}\cos\Big(\beta\Big(\frac{\ln\ln k}{\ln\ln 3}+\gamma_{3,k}\Big)\Big)\right|-\frac{M\Omega_1\Omega_2}{1-\gamma}(\ln m)^{1-\gamma}. \tag{32}$$

Далі дослідимо випадок $\beta\neq 0$. Розглянемо послідовність $(q_l)_{l\geq 1}$ цілих чисел, для якої $\lim_{l\to+\infty}q_l=+\infty$ і $\lim_{l\to+\infty}\cos(\beta(\frac{\ln\ln q_l}{\ln\ln 3}+\gamma_{3,q_l}))=1$. Така послідовність існує, оскільки $\lim_{k\to+\infty}(\ln\ln(k+1)-\ln\ln k)=0$ і послідовність $(\gamma_{3,k})_{k\geq 3}$ є збіжною (див. доведення леми 7).

Також розглянемо послідовність $(\tilde q_l)_{l\geq 1}$, де $\tilde q_l$ — ціла частина числа $e^{(\ln q_l)e^{\frac{\pi\ln\ln 3}{4|\beta|}}}$.

Позначимо через ε додатне число, для якого

$$\inf_{k\geq 1}3(\ln 3)^{\alpha}e^{\gamma_3-\gamma_k-\alpha\gamma_{3,k}}\geq\varepsilon. \tag{33}$$

Таке число існує на підставі (21) та рівності $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що число n_0 є таким, що $\cos(\beta(\frac{\ln\ln k}{\ln\ln 3}+\gamma_{3,k}))\geq\frac{1}{2}$ для $k=\overline{q_l,\tilde q_l}$ і $q_l>n_0$. Тоді для всіх $q_l>n_0$

$$\left|\sum_{k=q_l}^{\tilde q_l}\frac{3(\ln 3)^{\alpha}}{k(\ln k)^{\alpha}}e^{\gamma_3-\gamma_k-\alpha\gamma_{3,k}}\cos\Big(\beta\Big(\frac{\ln\ln k}{\ln\ln 3}+\gamma_{3,k}\Big)\Big)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=q_l}^{\tilde q_l}\frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}}\geq\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{q_l}^{\tilde q_l}\frac{dt}{t(\ln t)^{\alpha}}=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)}((\ln\tilde q_l)^{1-\alpha}-(\ln q_l)^{1-\alpha})=\frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)}\Big(\Big(\ln\Big[e^{(\ln q_l)e^{\frac{\pi\ln\ln 3}{4|\beta|}}}\Big]\Big)^{1-\alpha}-(\ln q_l)^{1-\alpha}\Big).$$

Тому на підставі (32) для $q_l > n_0$

$$\left\| \sum_{k=q_l}^{\tilde{q}_l} (e^{-\frac{1}{k}I-\frac{1}{k\ln k}B}+B_k)\dots(e^{-\frac{1}{3}I-\frac{1}{3\ln 3}B}+B_3)\right\|_{L(E,E)} \geq$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)}\left(\left(\ln\left[e^{(\ln q_l)e^{\frac{\pi \ln\ln 3}{4|\beta|}}}\right]\right)^{1-\alpha} - (\ln q_l)^{1-\alpha}\right) - \frac{M\Omega_1\Omega_2}{1-\gamma}\left(\ln\left[e^{(\ln q_l)e^{\frac{\pi \ln\ln 3}{4|\beta|}}}\right]\right)^{1-\gamma}. \qquad (34)$$

Тепер розглянемо випадок $\beta = 0$. У цьому випадку співвідношення (32) для $n \geq n_0$ має вигляд

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} (e^{-\frac{1}{k}I-\frac{1}{k\ln k}B}+B_k)\cdots(e^{-\frac{1}{3}I-\frac{1}{3\ln 3}B}+B_3)\right\|_{L(E,E)} \geq$$

$$\geq \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{3(\ln 3)^{\alpha}e^{\gamma_3-\gamma_k-\alpha\gamma_{3,k}}}{k(\ln k)^{\alpha}}\right| - \frac{M\Omega_1\Omega_2}{1-\gamma}(\ln m)^{1-\gamma}.$$

Покладемо $m = n^2$. В силу (33) для $n \geq n_0$

$$\left\| \sum_{k=n}^{n^2} (e^{-\frac{1}{k}I-\frac{1}{k\ln k}B}+B_k)\cdots(e^{-\frac{1}{3}I-\frac{1}{3\ln 3}B}+B_3)\right\|_{L(E,E)} \geq \left|\sum_{k=n}^{n^2}\frac{3(\ln 3)^{\alpha}e^{\gamma_3-\gamma_k-\alpha\gamma_{3,k}}}{k(\ln k)^{\alpha}}\right| -$$

$$-\frac{M\Omega_1\Omega_2}{1-\gamma}(\ln n^2)^{1-\gamma} \geq \varepsilon\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} - \frac{M\Omega_1\Omega_2}{1-\gamma}(\ln n^2)^{1-\gamma} \geq$$

$$\geq \varepsilon\int_{n}^{n^2}\frac{dt}{t(\ln t)^{\alpha}} - \frac{M\Omega_1\Omega_2}{1-\gamma}(\ln n^2)^{1-\gamma} = \frac{\varepsilon}{1-\alpha}((\ln n^2)^{1-\alpha}-(\ln n)^{1-\alpha}) - \frac{M\Omega_1\Omega_2}{1-\gamma}(\ln n^2)^{1-\gamma}.$$

Таким чином, у випадку $\beta = 0$

$$\left\| \sum_{k=n}^{n^2} (e^{-\frac{1}{k}I-\frac{1}{k\ln k}B}+B_k)\cdots(e^{-\frac{1}{3}I-\frac{1}{3\ln 3}B}+B_3)\right\|_{L(E,E)} \geq$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{1-\alpha}((2\ln n)^{1-\alpha}-(\ln n)^{1-\alpha}) - \frac{M\Omega_1\Omega_2}{1-\gamma}(2\ln n)^{1-\gamma},\ n \geq n_0. \qquad (35)$$

Тепер покажемо, що операторний ряд (1) розбігається.

Оскільки всі члени цього ряду мають неперервні обернені, то на підставі леми 4

$$\sum_{n=3}^{\infty} A_n = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty}(e^{-\frac{1}{k}I-\frac{1}{k\ln k}B}+B_k)\cdots(e^{-\frac{1}{3}I-\frac{1}{3\ln 3}B}+B_3)\right)A_3. \qquad (36)$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(e^{-\frac{1}{k}I-\frac{1}{k\ln k}B}+B_k)\cdots(e^{-\frac{1}{3}I-\frac{1}{3\ln 3}B}+B_3)$$

розбігається в силу леми 1 і того, що на підставі (34), (35) і співвідношення $0 < \gamma < \alpha < 1$

$$\overline{\lim_{n,m\to+\infty}}\left\| \sum_{k=n}^{m} (e^{-\frac{1}{k}I-\frac{1}{k\ln k}B}+B_k)\cdots(e^{-\frac{1}{3}I-\frac{1}{3\ln 3}B}+B_3)\right\|_{L(E,E)} = +\infty.$$

Отже, на підставі (36) і оборотності оператора A_3 операторний ряд (1) розбігається.

Таким чином, доведення другої частини твердження теореми 2 у випадку

$$\sigma(B) \cap \{z\colon \mathrm{Re\,z} \in (0,1)\} \neq \varnothing \ \text{ i } \ \sigma(B) \subset \{z\colon \mathrm{Re}\, z \in (0,+\infty)\}$$

завершено.

4.2. Випадок $\sigma(B) \cap \{z\colon \mathrm{Re}\, z \in (-\infty,0]\} \neq \varnothing$.

Припустимо, що операторний ряд (1) збігається. Зафіксуємо таке додатне число μ, для якого

$$\sigma(\mu I + B) \subset \{\lambda\colon \mathrm{Re}\,\lambda \in (0,+\infty)\} \ \text{ i } \ \sigma(\mu I + B) \cap \{\lambda\colon \mathrm{Re}\,\lambda \in (0,1)\} \neq \varnothing. \tag{37}$$

Розглянемо операторний ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \tilde{A}_n, \tag{38}$$

де

$$\tilde{A}_n = (\ln n)^{-\mu} A_n. \tag{39}$$

В силу (39) і леми 4 виконується співвідношення

$$\tilde{A}_{n+1} = (e^{-\frac{1}{n}I - \frac{1}{n\ln n}(\mu I + B)} + \tilde{B}_n)\tilde{A}_n, \ n \geq 3, \tag{40}$$

де $\tilde{B}_n = e^{\frac{\mu}{n\ln n}} B_n + o(\frac{1}{n^2}) I$ $(n \to +\infty)$. Звідси і збіжності ряду (13) випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \|\tilde{B}_n\|_{L(E,E)}$.

Отже, на підставі (37), (40) і проведених у п. 4.1 досліджень операторний ряд (38) є розбіжним. Однак на підставі леми 8, співвідношення (39) і припущення, що ряд (1) збігається, збіжним буде й ряд (38). Отримане протиріччя вказує на хибність припущення про збіжність ряду (1).

Теорему 2 доведено.

5. Умови збіжності операторного ряду $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} n^{-1}(\ln n)^{-A}$. Застосуємо теорему 2 до дослідження збіжності ряду

$$\sum_{n=3}^{+\infty} n^{-1}(\ln n)^{-A}, \tag{41}$$

де $A \in L(E,E)$.

Нагадаємо, що $(\ln n)^{-A} = e^{-(\ln\ln n)A}$, $n \geq 3$. Тому для кожного $n \geq 3$ оператор $(\ln n)^{-A}$ має неперервний обернений $((\ln n)^{-A})^{-1}$, $((\ln n)^{-A})^{-1} = (\ln n)^{A} = e^{(\ln\ln n)A}$ і

$$\begin{aligned}
(n+1)^{-1}(\ln(n+1))^{-A}(n^{-1}(\ln n)^{-A})^{-1} &= (n+1)^{-1} n (\ln(n+1))^{-A}(\ln n)^{A} = \\
&= e^{-\ln(n+1)} e^{\ln n} e^{-(\ln\ln(n+1))A} e^{(\ln\ln n)A} = e^{-\ln\frac{n+1}{n}} e^{-(\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n})A} = \\
&= e^{-\frac{1}{n}} e^{-(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n})} e^{-\frac{1}{n\ln n}A} e^{-(\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{1}{n\ln n})A} = \\
&= e^{-\frac{1}{n}I - \frac{1}{n\ln n}A} \ e^{-(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n})I - (\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{1}{n\ln n})A}.
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\Big(\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) - \frac{1}{n}\Big) = -\frac{1}{2} \ \text{ i } \ \lim_{n\to+\infty} n^2 \ln n\Big(\ln\Big(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\Big) - \frac{1}{n\ln n}\Big) = -\frac{1}{2},$$

в чому неважко переконатися, то

$$e^{-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}A}\,e^{-(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n})I-(\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-\frac{1}{n\ln n})A}=e^{-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}A}+B_n,$$

де $B_n=e^{-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}A}(e^{-(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n})I-(\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-\frac{1}{n\ln n})A}-I)$ і для кожного $\omega\in(0,1)$

$$\lim_{n\to+\infty}n(\ln n)^{1+\omega}\|B_n\|_{L(E,E)}=0.$$

Тому ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\|B_n\|_{L(E,E)}$ збігається, $(n+1)^{-1}(\ln(n+1))^{-A}(n^{-1}(\ln n)^{-A})^{-1}=e^{-\frac{1}{n}A}+B_n,\ n\geq 3$, і, отже, $(n+1)^{-1}(\ln(n+1))^{-A}=(e^{-\frac{1}{n}I-\frac{1}{n\ln n}A}+B_n)n^{-1}(\ln n)^{-A},\ n\geq 3$.

Таким чином, для дослідження операторного ряду (41) застосовна теорема 2 у випадках

$$\sigma(A)\subset\{\lambda\colon\ \operatorname{Re}\lambda\in(1,+\infty)\}\ \text{ і }\ \sigma(A)\cap\{\lambda\colon\ \operatorname{Re}\lambda\in(-\infty,1)\}\neq\varnothing.$$

У цих випадках ряд (41) відповідно збігається і розбігається.

Однак за допомогою теореми 2 не можна дослідити збіжність ряду (41), якщо

$$\sigma(A)\subset\{\lambda\colon\ \operatorname{Re}\lambda\in[1,+\infty)\}\ \text{ і }\ \sigma(A)\cap\{\lambda\colon\ \operatorname{Re}\lambda=1\}\neq\varnothing. \tag{42}$$

Покажемо, що в цьому випадку ряд (41) розбігається.

Нехай $1+\beta i\in\sigma(A)$, де $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді $1+\beta i\in\partial\sigma(A)$ на підставі (42). Розглянемо послідовність нормованих векторів $x_l\in E$, $l\geq 1$, для якої $\lim\limits_{l\to\infty}\|Ax_l-(1+\beta i)x_l\|_E=0$. Така послідовність існує на підставі леми 5. Тоді $\lim\limits_{l\to\infty}\|A^m x_l-(1+\beta i)^m x_l\|_E=0$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, і, отже, для кожного $k\geq 3$

$$\begin{aligned}\varlimsup_{l\to\infty}\|(\ln k)^{-A}x_l-(\ln k)^{-(1+\beta i)}x_l\|_E&=\varlimsup_{l\to\infty}\|e^{-(\ln\ln k)A}x_l-e^{-(\ln\ln k)(1+\beta i)}x_l\|_E=\\&=\varlimsup_{l\to\infty}\left\|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\ln\ln k)^m}{m!}A^m x_l-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\ln\ln k)^m}{m!}(1+\beta i)^m x_l\right\|_E\leq\\&\leq\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\ln\ln k)^m}{m!}\varlimsup_{l\to\infty}\|A^m x_l-(1+\beta i)^m x_l\|_E=\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\ln\ln k)^m}{m!}\lim_{l\to\infty}\|A^m x_l-(1+\beta i)^m x_l\|_E=0.\end{aligned}$$

Звідси і з нерівностей

$$\left\|\sum_{k=n}^{m}k^{-1}(\ln k)^{-A}\right\|_{L(E,E)}\geq\left\|\sum_{k=n}^{m}k^{-1}(\ln k)^{-A}x_l\right\|_E,\ l\geq 1,$$

де $n,m\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ і $n\leq m$, випливає, що

$$\left\|\sum_{k=n}^{m}k^{-1}(\ln k)^{-A}\right\|_{L(E,E)}\geq\left|\sum_{k=n}^{m}k^{-1}(\ln k)^{-(1+\beta i)}\right| \tag{43}$$

Далі приділимо увагу випадку $\beta\neq 0$. Розглянемо числа $t_k=\exp\{\exp\{\frac{2k\pi}{|\beta|}\}\}$ і $\tau_k=\exp\{\exp\{\frac{(4k+1)\pi}{2|\beta|}\}\}$, $k\in\mathbb{N}$. Очевидно, що $\cos(\beta\ln\ln t_k)=1$, $\cos(\beta\ln\ln\tau_k)=0$, $k\in\mathbb{N}$, і

$$\cos(\beta\ln\ln t)>0 \tag{44}$$

для всіх $t \in \cup_{k\in\mathbb{N}}[t_k, \tau_k)$. Використаємо натуральні числа $n_k = [t_k]+1$ і $m_k = [\tau_k]$, $k \in \mathbb{N}$, де $[x]$ — ціла частина числа x. Оцінимо знизу $|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1}(\ln n)^{-(1+\beta i)}|$. Оскільки

$$\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1}(\ln n)^{-(1+\beta i)} = \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1}(\ln n)^{-1}(\cos(\beta \ln\ln n) - i\sin(\beta\ln\ln n)),$$

то для всіх досить великих $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1}(\ln n)^{-(1+\beta i)}\right| \geq \left|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1}(\ln n)^{-1}\cos(\beta\ln\ln n)\right| = \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1}(\ln n)^{-1}\cos(\beta\ln\ln n) >$$
$$> \int\limits_{n_k}^{m_k-1} t^{-1}(\ln t)^{-1}\cos(\beta\ln\ln t)dt > \int\limits_{t_k+1}^{\tau_k-2} t^{-1}(\ln t)^{-1}\cos(\beta\ln\ln t)dt =$$
$$= \frac{1}{|\beta|}\int\limits_{|\beta|\ln\ln(t_k+1)}^{|\beta|\ln\ln(\tau_k-2)} \cos s\, ds > \frac{1}{|\beta|}\int\limits_{2k\pi+\frac{\pi}{3}}^{2k\pi+\frac{\pi}{6}} \cos s\, ds = \frac{\sqrt{3}-1}{2|\beta|}.$$

Тут ураховано співвідношення (44) і те, що для досить великих $k \in \mathbb{N}$ $|\beta|\ln\ln(t_k+1) < 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ і $|\beta|\ln\ln(\tau_k - 2) > 2k\pi + \frac{\pi}{3}$.

Отже, для всіх досить великих $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1}(\ln n)^{-(1+\beta i)}\right| > \frac{\sqrt{3}-1}{2|\beta|}.$$

Тому $\overline{\lim}_{k\to\infty} \left\| \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1}(\ln n)^{-A}\right\|_{L(E,E)} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2|\beta|}$. Звідси і леми 1 випливає розбіжність ряду (41) у випадку $\beta \neq 0$.

Тепер розглянемо випадок $\beta = 0$. У цьому випадку нерівність (43) має вигляд

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} k^{-1}(\ln k)^{-A}\right\|_{L(E,E)} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k\ln k}.$$

Покладемо $m = n^2$. На підставі (20) і (21) $\sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k\ln k} = \ln\frac{\ln n^2}{\ln n} + \gamma_{n,n^2} = \ln 2 - \gamma_{n,n^2} > \ln 2 - \ln\frac{\ln n}{\ln(n-1)}$, $n \geq 3$. Тому

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\sum_{k=n}^{n^2} k^{-1}(\ln k)^{-A}\right\|_{L(E,E)} = \ln 2.$$

Звідси і леми 1 випливає розбіжність ряду (41) й у випадку $\beta = 0$.

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 5. *Ряд* (41) *збігається лише у випадку* $\sigma(A) \subset \{\lambda\colon\ \mathrm{Re}\,\lambda \in (1,+\infty)\}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Слюсарчук В.Ю. Загальні теореми про збіжність числових рядів. – Рівне: Рівненський державний технічний ун-т, 2001. – 240 с.
2. Слюсарчук В.Е. *Применение разностных уравнений к исследованию сходимости числовых рядов*// Математика сьогодні '08. – Київ: Вид-во “Факт”, 2008. – С. 135–150.
3. Слюсарчук В.Е. *Операторный аналог признака д'Аламбера*// Математика сьогодні '09. – Київ: Вид-во “Факт”, 2009. – С. 101–115.
4. Slyusarchuk V.Yu. *Operator analogue of Cauchy's test*// Mat. Stud. – 2010. – V.33, №1. – P. 97–100. (in Ukrainian)
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.2, М.: Наука, 1966. – 800 с.
6. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.

Рівненський національний університет
водного господарства та природокористування
V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

Надійшло 20.01.2010