УДК 517.518

Г. А. Волошин, В. К. Маслюченко

ПОРІВНЯННЯ РІЗНИХ УЗАГАЛЬНЕНЬ ОБЕРНЕНОЇ ТЕОРЕМИ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ F-ПРОСТОРІВ

H. A. Voloshyn, V. K. Maslyuchenko. *Comparability of some generalization of the inverse Bernstein theorem to F-spases*, Mat. Stud. **35** (2011), 165–171.

We shove that our generalization of the inverse Bernstein theorem to F-spases and Svedov's generalization of this theorem are not comparable.

Г. А. Волошин, В. К. Маслюченко. *Сравнение различных обобщений обратной теоремы Бернштейна для F-пространств* // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №2. – С.165–171.

Доказывается, что два обобщения обратной теоремы Бернштейна на F-пространства, принадлежащие авторам и А. С. Шведову не сравнимы между собой.

1. У 1938 році С. Н. Бернштейн [1] розпочав дослідження обернених задач теорії наближень, встановивши, що для довільної спадної послідовності невід'ємних чисел α_n, яка прямує до нуля, існує така неперервна функція $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, що для кожного n найкраще наближення $E_n(f)$ функції f многочленами степеня $\le n$ дорівнює α_n. С. М. Нікольський [2] без доведення зауважив, що цей результат Бернштейна можна перенести на банахові простори, що й було реалізовано у монографії А. Ф. Тімана [3, с.50].

Останнім часом з'явився цілий ряд подальших узагальнень оберненої теореми Бернштейна [4–11] у різних напрямках. Зокрема, в працях [5, 6, 8, 10] результат Бернштейна був перенесений на F-простори. При цьому використовувалась первісна ідея Бернштейна, реалізація якої вимагає певних додаткових умов на F-простори. Ці умови в працях [5, 6, 8] і [10] виявилися різними, що привело до отримання різних результатів. Тому постало природне питання про дослідження зв'язків між цими узагальненнями, щоб з'ясувати яке з них сильніше. Виявилося, що ці узагальнення не порівнянні між собою, і це є предметом даної публікації.

2. Загальна задача, яка виникає при узагальненні теореми Бернштейна формулюється так. Нехай X — векторний простір над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел і $|\cdot|\colon\ X \to [0,+\infty)$ — деяка невід'ємна функція, причому $|0| = 0$. Для лінійного підпростору L простору X і елемента $x \in X$ розглянемо число $E_L(x) = \inf\{|x-u|\colon u \in L\}$. Проблема полягає у вивченні функцій $|\cdot|$ на X, які задовольняють умову (B): для довільної строго зростаючої послідовності скінченновимірних лінійних підпросторів L_n простору X і кожної спадної до нуля послідовності чисел α_n існує такий вектор $x \in X$, що $E_{L_n}(x) = \alpha_n$ для кожного n.

Назвемо пару $(X, |\cdot|)$, для якої функція $|\cdot|$ задовольняє умову (B), *парою Бернштейна.*

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41A25, 46E15.

О. С. Шведов [5, 6] у випадку $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ вводить на векторному просторі X функціонал $x\mapsto |x|\colon X\to[0,+\infty)$ (його ми будемо називати *функціоналом Шведова*), який має такі властивості:

1)$|0|=0$;

2)$(\forall\gamma_1>0)(\exists\gamma_2>0)(\forall x_1,x_2\in X)(|x_1|\le\gamma_1\,\mathrm{i}\,|x_2|\le\gamma_1\Rightarrow|x_1+x_2|\le\gamma_2)$;

3)$(\forall x\in X)(\lim_{\lambda\to 0}|\lambda x|=0)$;

4)$(\forall x\in X)(\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K})(|\lambda_1|\le|\lambda_2|\Rightarrow|\lambda_1x_1|\le|\lambda_2x_2|)$;

5)$(\forall x\in X\setminus\{0\})(\lim_{\lambda\to\infty}|\lambda x|=+\infty)$;

6)$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x_1,x_2\in X)(|x_1|\le\delta\,\mathrm{i}\,|x_2|\le\delta\Rightarrow|x_1+x_2|\le\varepsilon)$;

7)$(\forall x\in X)(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall y\in X)(|y|\le\delta\Rightarrow||x+y|-|x||\le\varepsilon)$;

8)$(\forall(x_n)_{n=1}^{\infty}\in X^{\mathbb{N}})(\lim_{n,m\to\infty}|x_n-x_m|=0\Rightarrow(\exists x\in X)(\lim_{n\to\infty}|x_n-x|=0))$.

Векторний простір X, на якому задано функціонал Шведова $|\cdot|$, ми будемо називати *простором Шведова.* Система множин $W_\varepsilon=\{(x,y)\colon|x-y|\le\varepsilon\}$, де $\varepsilon>0$, є базисом рівномірної структури на просторі Шведова $(X,|\cdot|)$, а властивість 8) випливає з того, що рівномірний простір X повний. У праці [5] доведено, що простір Шведова $(X,|\cdot|)$ є парою Бернштейна. Все це справджується і для $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, як твердиться в [5].

3. *Квазінормою* на векторному просторі X над полем $\mathbb{K}$ ми називаємо функцію $x\mapsto|x|\colon X\to\mathbb{R}$, яка має такі властивості: $1^\circ.\,|x|\ge 0$, $|x|=0\Leftrightarrow x=0$; $2^\circ.\,|-x|=|x|$; $3^\circ.\,|x+y|\le|x|+|y|$, які повинні виконуватися для довільних векторів x і y з X. Кожна квазінорма $|\cdot|$ на X породжує інваріантну відносно зсувів метрику $d(x,y)=|x-y|$, для якої $|x|=d(x,0)$; навпаки кожна інваріантна відносно зсувів метрика d на X породжує квазінорму $|x|=d(x,0)$, для якої $d(x,y)=|x-y|$.

Метрику d на векторному просторі X ми називаємо *лінійною*, якщо вона породжує топологію $\mathcal{T}_d$, відносно якої операції додавання і множення на скаляр неперервні за сукупністю змінних. Квазінорма $|\cdot|$ на X називається *лінійною*, якщо породжена нею метрика лінійна. Векторний простір X, на якому задано деяку лінійну квазінорму, ми називаємо *квазінормованим.* Квазінормований простір — це те ж саме, що топологічний векторний простір разом з інваріантною відносно зсувів метрикою, яка породжує його топологічну структуру.

С. Банах [12] увів поняття F-простору як векторного простору X з інваріантною відносно зсувів метрикою d, такою, що множення на скаляр нарізно неперервне і простір (X,d) повний. С. Мазур [12, с.197; 13] показав, що на F-просторі множення на скаляр насправді сукупно неперервне. Оскільки операція додавання на просторі з інваріантною відносно зсувів метрикою автоматично неперервна (як і на просторі з заданою квазінормою), то F-простір — це те ж саме, що й повний квазінормований простір.

4. Квазінорма $|\cdot|$ на просторі X називається *монотонною*, якщо для будь-якого вектора $x\in X$ і довільних скалярів λ, μ з умови $|\lambda|\le|\mu|$ випливає, що $|\lambda x|\le|\mu x|$. А. І. Васильєв [8] увів умови (B_i) та $(\widetilde{B}_i)$, які є модифікаціями умови (B), і для F-просторів X з монотонною квазінормою вказав необхідні і достатні умови, для того щоб X задовольняв умову (B_i) чи $(\widetilde{B}_i)$. В ролі функції $E_L(x)$ у нього виступає відстань $d(x,L)$ від елемента x до підпростору L. Індекс i в його умовах означає, що обернена задача розв'язується для підпросторів, для яких $\dim L_1=i$. Результати праці [8] споріднені з результатом О. С. Шведова і вони використовують умову монотонності квазінорми $|\cdot|$, яка фігурує і серед умов, що характеризують функціонал Шведова (умова 4).

5. У праці [10] були вказані умови на квазінормований простір $(X, |\cdot|)$, для того щоб $(X, |\cdot|)$ була парою Бернштейна. Ми кажемо, що X — це *квазінормований простір з обмеженими кулями*, якщо для кожного $\rho > 0$ куля $B_\rho = \{x \in X : |x| \le \rho\}$ є обмеженою множиною у топологічному векторному просторі X. Це означає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\gamma > 0$, що $B_\rho \subseteq \lambda B_\varepsilon$, як тільки $|\lambda| \ge \gamma$.

Крім того, в [10] була введена умова (A): для кожного скінченновимірного підпростору L простору X і довільного $x \in X \setminus L$ відстань $d(\lambda x, L) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

В [10] було показано, що $(X, |\cdot|)$ буде парою Бернштейна, якщо $(X, |\cdot|)$ — це повний квазінормований простір з обмеженими кулями, який задовольняє умову (A).

Насправді в [10] був доведений сильніший результат. Ми скажемо, що $(X, |\cdot|)$ — це *квазінормований простір з обмеженими скінченовимірними кулями*, якщо для кожного скінченновимірного підпростору L квазінормованого простору X і довільного числа $\rho > 0$ кулі $B_\rho \cap L$ у підпросторі L є обмеженими множинами в топологічному векторному просторі X. Саме ця умова використовувалася в [10] і там фактично було встановлено такий результат.

Теорема 1. *Нехай $(X, |\cdot|)$ — повний квазінормований простір з обмеженими скінченновимірними кулями, який задовольняє умову (A). Тоді $(X, |\cdot|)$ — це пара Бернштейна.*

Зауважимо, що від квазінорми $|\cdot|$ у теоремі 1 не вимагається умови монотонності. Крім того, якщо $(X, |\cdot|)$ — банахів простір, то $(X, |\cdot|)$ задовольняє умови теореми 1, отже, $(X, |\cdot|)$ — це пара Бернштейна.

6. В роботі [10] для квазінормованого простору $(X, |\cdot|)$ була введена і умова (a): для довільного $x \in X \setminus \{0\}$ відстань $|\lambda x| = d(\lambda x, \{0\}) \to \infty$ при $\lambda \to +\infty$. Зрозуміло, що $(A) \Rightarrow (a)$. Питання про справедливість оберненої імплікації $(a) \Rightarrow (A)$ для авторів залишається поки що відкритим.

Нескладно перевірити, що коли $(X, |\cdot|)$ — це повний квазінормований простір з монотонною квазінормою $|\cdot|$, який задовольняє умову (a), то квазінорма $|\cdot|$ — це функціонал Шведова. Таким чином, у цьому випадку $(X, |\cdot|)$ — це пара Бернштейна. Це показує, що монотонність квазінорми досить сильна умова, яка дозволяє зняти умову обмеженості куль і послабити умову (A) у теоремі 1.

Та все ж теорема 1 не випливає з результату Шведова. Щоб це показати, розглянемо функцію $\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, для якої $\varphi(\xi) = \xi$ при $0 \le \xi \le 1$, $\varphi(\xi) = 2 - \xi$ при $1 \le \xi \le \frac{3}{2}$ і $\varphi(\xi) = \frac{\xi}{3}$ при $\xi \ge \frac{3}{2}$. З допомогою неї на довільному квазінормованому просторі $(X, |\cdot|)$ визначимо функцію $|x|_\varphi = \varphi(|x|)$.

Теорема 2. *(i) Для довільного квазінормованого простору $(X, |\cdot|)$ функція $|\cdot|_\varphi$ — це лінійна квазінорма на X, для якої $|x|/3 \le |x|_\varphi \le |x|$ для кожного $x \in X$.*

(ii) Топологічні структури квазінормованих просторів $(X, |\cdot|)$ і $(X, |\cdot|_\varphi)$ збігаються.

(iii) Якщо $|\cdot|$ — норма на ненульовому просторі X, то квазінорма $|\cdot|_\varphi$ не монотонна.

Доведення. (i) Оскільки $\varphi(\xi) > 0$ при $\xi > 0$ і $\varphi(0) = 0$, то умова 1° для функції $|\cdot|_\varphi$ випливає з того, що $|\cdot|$ задовольняє 1°. Так само перевірка умови 2° для $|\cdot|_\varphi$ тривіальна.

Доведемо, що

$$|x + y|_\varphi \le |x|_\varphi + |y|_\varphi \tag{$*$}$$

для довільних x і y з простору X. Нехай $\alpha = |x|$, $\beta = |y|$ і $\gamma = |x+y|$. Розглянемо три проміжки $A = [0,1]$, $B = [1, \frac{3}{2}]$ і $C = [\frac{3}{2}, +\infty)$. Всього можливо 27 випадків розміщення чисел α, β і γ у проміжках A, B і C. Розгляд деяких із них можна об'єднати, а деякі пропустити з міркувань симетрії.

Нехай множина $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ попадає в один з проміжків A, B чи C. Якщо це проміжок A або C, то потрібна нерівність негайно випливає з нерівності $|x+y| \le |x| + |y|$, адже тоді

$$|x+y|_\varphi = |x+y|,\ |x|_\varphi = |x|,\ |y|_\varphi = |y| \quad \text{або} \quad |x+y|_\varphi = \frac{1}{3}|x+y|,\ |x|_\varphi = \frac{1}{3}|x|,\ |y|_\varphi = \frac{1}{3}|y|.$$

Якщо ж $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq B$, то $|x|_\varphi = 2 - |x|$, $|y|_\varphi = 2 - |y|$, $|x+y|_\varphi = 2 - |x+y|$ і нерівність $(*)$ рівносильна нерівності $\alpha + \beta \le 2 + \gamma$, яка виконується, бо $\alpha + \beta \le \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 = 2 + 1 \le 2 + \gamma$.

Припустимо тепер, що $\gamma \in A \cup B$. Тоді $|x+y|_\varphi = \varphi(\gamma) \le 1$, бо $0 \le \gamma \le \frac{3}{2}$. У випадку $\{\alpha, \beta\} \subseteq B \cup C$ будемо мати, що $|x|_\varphi = \varphi(\alpha) \ge \frac{1}{2}$ і $|y|_\varphi = \varphi(\beta) \ge \frac{1}{2}$, бо α і $\beta \ge 1$. Тому $|x|_\varphi + |y|_\varphi \ge 1$ і нерівність $(*)$ виконується.

Нехай $\{\alpha, \beta\} \nsubseteq B \cup C$. Тоді $\alpha \in A$ або $\beta \in A$. Досить розібрати лише випадок, коли $\alpha \in A$, а значить $|x|_\varphi = |x|$.

Якщо $\beta \in A$, то припустимо, що $\gamma \in B$, бо випадок $\gamma \in A$ ми вже розглянули. Тоді $|x|_\varphi = |x|$, $|y|_\varphi = |y|$ і $|x+y|_\varphi = 2 - |x+y|$. Оскільки $|x+y| + |x| + |y| \ge 2|x+y| = 2\gamma \ge 2$, то нерівність $(*)$ виконується.

Якщо $\beta \in B$, то $|y|_\varphi = 2 - |y|$, отже, якщо $\gamma \in A$, то

$$|x|_\varphi + |y|_\varphi = |x| + 2 - |y| = 2 - (|-x| - |y|) \ge 2 - |-x-y| = 2 - |x+y| \ge 1 \ge |x+y|_\varphi,$$

а якщо $\gamma \in B$, то $|x+y|_\varphi = 2 - |x+y|$ і нерівність $(*)$ так само виконується.

Якщо ж $\beta \in C$, то $|y|_\varphi = \frac{|y|}{3}$ і

$$\begin{aligned} |x|_\varphi + |y|_\varphi &= |x| + \frac{|y|}{3} = |y - (x+y)| + \frac{|y|}{3} \ge |y| - |x+y| + \frac{|y|}{3} = \\ &= \frac{4}{3}|y| - |x+y| \ge \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} - |x+y| = 2 - |x+y| \ge |x+y|_\varphi. \end{aligned}$$

Нарешті, нехай $\gamma \in C$. Тоді $|x+y|_\varphi = \varphi(\gamma) = \frac{|x+y|}{3} \le \frac{|x|}{3} + \frac{|y|}{3}$.

Випадок $\{\alpha, \beta\} \subseteq C$ ми вже розглянули. Припустимо, що $\{\alpha, \beta\} \nsubseteq C$. Тоді $\alpha \in A \cup B$ або $\beta \in A \cup B$. З міркувань симетрії досить розглянути лише випадок, коли $\alpha \in A \cup B$.

Припустимо, що $\alpha \in A$, отже, $|x|_\varphi = |x|$.

Якщо $\beta \in A$, то $|x|_\varphi + |y|_\varphi = |x| + |y| \ge |x+y| \ge |x+y|/3 = |x+y|_\varphi$.

Якщо $\beta \in B$, то

$$\begin{aligned} |x|_\varphi + |y|_\varphi - |x+y|_\varphi &= |x| + 2 - |y| - \frac{|x+y|}{3} \ge |x| - |y| - \frac{|x|}{3} - \frac{|y|}{2} + 2 = \\ &= \frac{2|x|}{3} - \frac{2|y|}{3} + 2 \ge \frac{2|x|}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} + 2 = \frac{2|x|}{3} \ge 0, \end{aligned}$$

отже, $(*)$ виконується.

Якщо ж $\beta \in C$, то $|x+y|_\varphi \le |x|/3 + |y|/3 \le |x| + |y|/3 = |x|_\varphi + |y|_\varphi$. Нарешті, при $\alpha \in B$ маємо $|x|_\varphi = 2 - |x|$. Випадок $\beta \in A$ аналогічний розглянутому випадку, коли $\alpha \in A$ і $\beta \in B$.

Якщо $\beta \in B$, то $|y|_\varphi = 2 - |y|$ і

$$|x+y|_\varphi - (|x|_\varphi + |y|_\varphi) = \frac{|x+y|}{3} + |x| + |y| - 4 \le \frac{4}{3}(|x|+|y|) - 4 \le \frac{4}{3} \cdot 3 - 4 = 0,$$

отже, нерівність $(*)$ справджується.

Якщо ж $\beta \in C$, то $|y|_\varphi = \frac{|y|}{3}$ і

$$|x+y|_\varphi - (|x|_\varphi + |y|_\varphi) = \frac{|x+y|}{3} - 2 + |x| - \frac{|y|}{3} \le$$

$$\le \frac{|x|+|y|}{3} + |x| - \frac{|y|}{3} - 2 = \frac{4}{3}|x| - 2 \le \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} - 2 = 0,$$

отже, і тут нерівність $(*)$ має місце.

Залишилося перевірити оцінку для квазінорми $|\cdot|_\varphi$. Якщо $|x| \in A \cup C$, то нерівність очевидна. Припустимо, що $|x| \in B$. Тоді $|x|_\varphi = 2 - |x|$. Оскільки $1 \le |x| \le \frac{3}{2}$, то

$$\frac{|x|}{3} \le \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} \le 2 - |x| \le 2 - 1 = 1 \le |x|,$$

що завершує доведення пункту (i).

У просторі $(X, |\cdot|)$ з квазінормою $|\cdot|$ околом точки x вважається множина U в X, яка містить деяку кулю $B(x,\varepsilon) = \{u \in X \colon |u - x| < \varepsilon\}$. Введена топологічна структура на просторі X з квазінормою $|\cdot|$, яка кожній точці x з X співставляє систему $\mathcal{U}_x$ всіх її околів у просторі X перетворює X у топологічну групу відносно додавання, в якій $\mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}_0$, де $\mathcal{U}_0$ — система всіх околів нуля в X. Система $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon = B(0,\varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}$ — це база околів нуля в X. Кулі у просторі $(X, |\cdot|_\varphi)$ будемо позначати символом $\widetilde{B}(x,\varepsilon)$, зокрема, $\widetilde{B}_\varepsilon = \widetilde{B}(0,\varepsilon)$ і $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\widetilde{B}_\varepsilon \colon \varepsilon > 0\}$. З нерівності $|x|/3 \le |x|_\varphi \le |x|$ легко вивести, що $B_\varepsilon \subseteq \widetilde{B}_\varepsilon \subseteq B_{3\varepsilon}$. Звідси випливає, що $\mathcal{U}_0 = \mathcal{V}_0$, де $\mathcal{V}_0$ — це система околів нуля у просторі X з квазінормою $|\cdot|_\varphi$. Це показує, що топологічні структури $x \mapsto \mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}_0$ і $x \mapsto \mathcal{V}_x = x + \mathcal{V}_0$ просторів $(X, |\cdot|)$ і $(X, |\cdot|_\varphi)$ однакові. Оскільки $(X, |\cdot|)$ — квазінормований простір, то його топологічна структура $x \mapsto \mathcal{U}_x$ є лінійною. Тому і топологічна структура $x \mapsto \mathcal{V}_x$ простору $(X, |\cdot|_\varphi)$ теж лінійна, отже, $|\cdot|_\varphi$ — лінійна квазінорма і $(X, |\cdot|_\varphi)$ — квазінормований простір, топологічна структура якого збігається з топологічною структурою простору $(X, |\cdot|)$.

Залишилось довести, що квазінорма $|\cdot|_\varphi$ немонотонна, якщо $|\cdot|$ — норма на ненульовому просторі X. Оскільки $X \ne \{0\}$, то існує точка $x_0 \in X$, така, що $x_0 \ne 0$. Для точки $a = \frac{x_0}{|x_0|}$ будемо мати, що $|a| = 1$, отже, при $\lambda \ge 0$ $|\lambda a|_\varphi = \varphi(|\lambda a|) = \varphi(\lambda |a|) = \varphi(\lambda)$. Нехай $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. Тоді $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ і $|\lambda_1 a|_\varphi = \varphi(1) = 1 > \frac{1}{2} = \varphi(3/2) = |\lambda_2 a|_\varphi$, що і завершує доведення теореми 2. $\square$

Теорема 3. *Нехай $(X, |\cdot|)$ — повний квазінормований простір з обмеженими скінченновимірними кулями, який задовольняє умову (A). Тоді і квазінормований простір $(X, |\cdot|_\varphi)$ має такі ж властивості і $(X, |\cdot|_\varphi)$ — це пара Бернштейна. Якщо $(X, |\cdot|)$ — ненульовий банаховий простір, то $(X, |\cdot|_\varphi)$ — пара Бернштейна і функція $|\cdot|_\varphi$ немонотонна.*

Доведення. Нехай $(x_n)_{n=1}^\infty$ — фундаментальна послідовність у просторі $(X, |\cdot|_\varphi)$. Тоді $|x_n - x_m|_\varphi \to 0$ при $n, m \to 0$. Але $|x_n - x_m| \le 3|x_n - x_m|_\varphi$, отже, і $|x_n - x_m| \to 0$.

З повноти простору $(X, |\cdot|)$ випливає, що існує такий елемент $x \in X$, що $|x_n - x| \to 0$. Але $|x_n - x|_\varphi \le |x_n - x|$, тому і $|x_n - x|_\varphi \to 0$, отже, $x_n \to x$ в $(X, |\cdot|_\varphi)$.

Для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного скінченновимірного простору L кулі $B_{3\varepsilon} \cap L$ в L обмежені в топологічному векторному просторі $(X, |\cdot|)$, звідки випливає, що кулі $\widetilde{B}_\varepsilon \cap L$ теж будуть обмеженими в $(X, |\cdot|)$, адже $\widetilde{B}_\varepsilon \subseteq B_{3\varepsilon}$. Але топологічні структури просторів $(X, |\cdot|)$ і $(X, |\cdot|_\varphi)$ збігаються, тому кулі $\widetilde{B}_\varepsilon \cap L$ будуть обмеженими і в $(X, |\cdot|_\varphi)$.

Нехай X — скінченновимірний підпростір простору X і $x \in X \setminus L$. Тоді $d(\lambda x, L) \to +\infty$, якщо $\lambda \to +\infty$ (тут $d(z, L) = \inf\{|z - y| \colon y \in L\}$). Розглянемо відстань $d_\varphi(z, L) = \inf\{|z-y|_\varphi \colon y \in L\}$. Оскільки $\frac{1}{3}|z-y| \le |z-y|$ для кожного $y \in L$, то $\frac{1}{3}d(z, L) \le d_\varphi(z, L)$, отже, $d_\varphi(\lambda x, L) \ge \frac{1}{3}d(\lambda x, L)$ для кожного λ. Тому і $d_\varphi(\lambda x, L) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Таким чином, простір $(X, |\cdot|_\varphi)$ має ті ж властивості, що й простір $(X, |\cdot|)$. Тому за теоремою 1 $(X, |\cdot|_\varphi)$ — пара Бернштейна. Решта негайно випливає з теореми 2. □

Доведена теорема показує, що теорема Шведова не охоплює теореми 1.

7. Покажемо, що і навпаки з теореми 1 не випливає результат Шведова.

Теорема 4. *Нехай $|\cdot|$ — функціонал Шведова на X і $p > 1$. Тоді і $|\cdot|^p$ — це функціонал Шведова на X, причому $|\cdot|^p$ не квазінорма, якщо $|\cdot|$ — норма на ненульовому просторі X.*

Доведення. Всі вісім властивостей, якими характеризується функціонал Шведова $|\cdot|$ легко переносяться і на функціонал $|\cdot|^p$.

Покажемо, що $|\cdot|^p$ не є квазінормою на X, якщо $X \ne \{0\}$ і $|\cdot|$ — норма на X. Для цього знайдемо такі вектори x і y в X, що $|x + y|^p > |x|^p + |y|^p$. Візьмемо довільний ненульовий вектор $x \in X$ і покладемо $y = 2x$. Тоді

$$|y|^p = 2^p |x|^p, \quad |x + y|^p = |3x|^p = 3^p |x|^p \quad \text{і} \quad |x|^p + |y|^p = (1 + 2^p)|x|^p.$$

Маємо $3^p - 2^p = 2^p((3/)^p - 1) = 2^p((1 + \frac{1}{2})^p - 1) \ge 2^p(1 + p/2 - 1) = p2^{p-1} > 1 \cdot 2^0 = 1$, отже, $1 + 2^p < 3^p$, а тому і $|x|^p + |y|^p = (1 + 2^p)|x|^p < 3^p|x|^p = |x + y|^p$, адже $|x|^p > 0$.

Таким чином, теорема Шведова і теорема 1 не порівнянні між собою. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Bernstein S.N. *Sur le problème inverse de la theorie de la meilleure approximation des fonctions continues*// Comp. Rend. – 1938. – V.206. – P. 1520–1523.
2. Никольський С.М. *Приближение многочленами функций действительного переменного*// Математика в СССР за 30 лет. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – С. 288–318.
3. Тиман А.Ф. Теория приближений функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624с.
4. Тюремских И.С. *Об одной задаче С.Н. Бернштейна*// Уч. зап. Калин. гос. пед. ин-та. – 1964. – V.39. – С. 53–54.
5. Шведов А.С. Существование елемента с заданными величинами наилучших приближений. – Москва, 1982. – 20с. – (Препр. / АН СССР. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша; №55).
6. Шведов А.С. *Существование елемента с заданной последовательностью наилучших приближений*// Теория приближений функций. Труды Международной конференции по теории приближений функций. Киев, 1983. – М.: Наука, 1987. – С. 473–475.

7. Lewicki G. *A theorem of Bernstein's type for linear projections*// Zeszyty naukowe universytetu jagiellonskiego acta mathematica. – 1988. – V.27. – P. 23–27.
8. Васильев А.И. *Обратная задача теории наилучшего приближения в F-пространствах*// Докл. РАН. – 1999. – Т.365, №5. – С. 583–585.
9. Бородин П.А. *К задаче существования элемента с заданными уклонениями от расширяющейся системы подпространств*// Мат. заметки. – 2006. – V.80, №5. – С. 657–667.
10. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Узагальнення однієї теореми Бернштейна*// Математичний вісник НТШ. – 2009. – Т.6. – С. 62–72.
11. Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. *The functional generalization of one Bernstein's theorem*// Mat. Stud. – 2010. – V.33, №2. – P. 220–224. (in Ukrainian)
12. Банах С. Курс функціонального аналізу. – К.: Радянська школа, 1948. – 216с.
13. Mazur S., Orlich W. *Über Folden linearer Operationen*// Stud. Math. – 1933. – V.4. – P. 152–157.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
math.analysis.chnu@gmail.com

Надійшло 1.11.2010