УДК 517.5

$\boxed{\text{В. В. Ковалик}}$,[1] І. Е. Чижиков

ЗРОСТАННЯ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА-СТІЛТЬЄСА У ПІВПЛОЩИНІ

$\boxed{\text{V. V. Kovalyk}}$, I. E. Chyzhykov. *Growth of the Poisson-Stieltjes integrals in a half-plane*, Mat. Stud. **35** (2011), 155–164.

Let u be a harmonic function represented by the Poisson-Stieltjes-type integral in the upper half-plane. We find necessary and sufficient conditions for the relationship $M_\infty(y,u) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x+iy)| = O(y^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, $y \downarrow 0$.

$\boxed{\text{В. В. Ковалик}}$, И. Э. Чижиков. *Рост интегралов Пуассона-Стилтьеса в полуплоскости* // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №2. – С.155–164.

Для гармонической функции u, представимой в верхней полуплоскости интегралом типа Пуассона-Стилтьеса, найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы имело место $M_\infty(y,u) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x+iy)| = O(y^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, $y \downarrow 0$.

Вступ. Вивчаючи асимптотичну поведінку гармонійних і аналітичних функцій у півплощині, дуже часто розглядається клас $\bar{h}$ функцій гармонійних в $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ і неперервних в $\overline{\mathbb{C}}_+ = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Накладаючи певні обмеження на зростання в ∞, можна одержати зображення відповідних підкласів $\bar{h}$.

Теорема A ([1, Гл. V, §2, теорема 4])**.** *Нехай $u \in \bar{h}$ і $\overline{\lim}_{|z|\to\infty} \frac{u(z)}{|z|} < \infty$. Для того, щоб*

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt + ky, \quad z = x + iy, \tag{1}$$

де $k = \overline{\lim\limits_{y\to+\infty}} \frac{u(iy)}{y}$, необхідно і досить, щоб збігався інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{1+t^2} dt$.

Функції класу $\bar{h}$ не становлять інтересу з точки зору дослідження асимптотичної поведінки при наближенні аргументу до межі, бо $\bar{h} \subset C(\overline{\mathbb{C}}_+)$. Нас цікавить поведінка гармонійних функцій в $\mathbb{C}_+$, які a priori не є неперервними в замкненій півплощині. Позначимо клас таких функцій через h.

Добре відомий такий результат [1]–[3].

Теорема B. *Якщо $u \in h(\mathbb{C}_+)$ і u невід'ємна, то*

$$u(x+iy) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{(x-t)^2 + y^2} + \sigma y, \tag{2}$$

де ν — невід'ємна борелева міра така, що $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{1+t^2} < +\infty$, $\sigma \geq 0$.

[1]Василь Ковалик трагічно пішов з життя 13 травня 2008 р. Ця стаття написана другим автором на основі результатів спільних досліджень.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30E20, 31A05.

Надалі через $|d\nu|$ позначатимемо $d\nu_+ + d\nu_-$, де ν_+, ν_- — додатна і від'ємна варіації заряду ν. "Круговий" аналог теореми B допускає узагальнення на випадок довільних $u \in h(\mathbb{D})$. При цьому умова $u \geq 0$ заміняється умовою $\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| \, d\theta < +\infty$, а ν — вже довільна борелева міра на одиничному колі. Проте для півплощини ситуація виглядає складнішою. Класична заміна змінної не допомагає в цьому випадку. Детальніше умови інтегрального зображення гармонійної функції обговоримо у розділі 4.

Для $u \in h$, $y > 0$ означимо $M_\infty(y, u) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x + iy)|$. Характеристики такого вигляду використовуються для майже періодичних функцій, рядів Діріхле тощо.

Для функції $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ означимо модуль неперервності

$$\omega(\tau, \psi) = \sup\{|\psi(x + t) - \psi(x)| : x \in \mathbb{R}, |t| \leq \tau\}.$$

Для $\gamma \in (0, 1]$ позначимо

$$\Lambda_\gamma = \{\psi : (\exists C > 0)(\forall t > 0)\omega(t, \psi) \leq Ct^\gamma\}.$$

Якщо $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, то в термінах належності цієї функції до класів Λ_γ можна описати зростання її інтеграла Пуассона

$$\mathcal{P}[f](z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\, dx}{(x - t)^2 + y^2}.$$

Теорема C ([4, §4])**.** *Нехай $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, $0 < \gamma < 1$. Тоді такі умови еквівалентні:*

а) $\omega(t, f) = O(t^\gamma)$, $t > 0$;

б) $\frac{\partial \mathcal{P}[f](z)}{\partial y} = O(y^{\gamma-1}), y > 0$;

в) $\frac{\partial \mathcal{P}[f](z)}{\partial x} = O(y^{\gamma-1}), y > 0$.

Зазначимо, аналогічне твердження справджується і для півпростору [4, §4], а при $\gamma = 1$ еквівалентності вже нема. Ідея доведення у багатовимірному випадку бере свій початок від Харді і Літтлвуда [5].

Оскільки ν з (2), взагалі кажучи, не є абсолютно неперервною мірою, ми не можемо напряму використати теорему C для опису зростання інтеграла з теореми B. Основним результатом статті є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\gamma \in (0, 1)$,*

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(t)}{(x - t)^2 + y^2}, \quad \text{де} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\psi(t)|}{t^2 + 1} < +\infty. \tag{3}$$

Для того, щоб

$$M_\infty(y, u) = O(y^{\gamma-1}), \quad y > 0$$

необхідно і достатньо, щоб $\psi \in \Lambda_\gamma$.

Зазначимо, що аналог теореми 1 для одиничного круга, який справджується при $0 < \gamma \leq 1$, доведено в [6] (див. також [7]).

Через C з індексами або без позначатимемо додатні сталі.

2. Допоміжні результати. В основі доведення теореми 1 лежить оцінка спряженої гармонійної функції до $\mathcal{P}[d\psi]$. Хоча у випадку одиничного круга оцінки такого типу добре відомі (див. [8], [9], [10]), ми не знайшли в літературі аналогічного твердження для гармонійних функцій у півплощині.

Ключовою є така лема.

Лема 1. *Нехай* $\gamma \in (0,1]$, u *має вигляд* (3). *Припустимо, що* $M_\infty(y,u) \le C_0 y^{\gamma-1}$, *для деякого* $C_0 > 0$ *і всіх* $y > 0$. *Тоді спряжена гармонійна функція*

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} + \frac{t}{t^2+1}\Big)d\psi(t) \tag{4}$$

допускає оцінку

$$\begin{array}{lll} M_\infty(y,v) & \le C_1 y^{\gamma-1}, & 0<\gamma<1 \\ |v(x+iy)| & \le C_1(\ln^+|x| + \ln^+\frac{1}{y} + 1), & \gamma = 1 \end{array}, \tag{5}$$

для деякого $C_1 > 0$ *і всіх* $y \in (0,1)$.

Більше того, існує стала $b \in \mathbb{R}$ *така, що* $v - b$ *допускає оцінку* (5) *для всіх* $y > 0$.

Приклад. Для аналітичної в $\mathbb{C}_+$ функції $f(z) = i\ln\frac{1}{z}$, $\ln 1 = 0$, маємо $u(z) = \arg z \in (0,\pi)$, $|v(z)| = |\operatorname{Im} f| = |\ln|z||$. Тоді $|v(iy)| = \ln\frac{1}{y}$ при $y \in (0,1)$,

$$\Big|v\Big(x + i\frac{1}{\ln x}\Big)\Big| = \frac{1}{2}(x^2 + \ln^{-2}x) \sim \ln x, \quad x \to +\infty.$$

Тобто оцінка (5) непокращувана з точністю до сталої.
Доведення леми. Якщо U гармонійна в $\overline{\mathbb{C}}_+$, то ([8, т.1, (2.30)]) для

$$V(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} + \frac{t}{t^2+1}\Big)U(t)\,dt,$$

$F(z) = U(z) + iV(z)$ аналітична в $\overline{\mathbb{C}}_+$. Оскільки $\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i(t-z)} = \frac{y}{\pi|t-z|^2}$, маємо

$$|F'(z)| = \Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U(t)}{|t-z|^2}\,dt\Big| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|U(t)|}{|t-z|^2}\,dt \le \frac{1}{\pi y}\int_{-\infty}^{+\infty}P_0(x-t,y)|U(t)|\,dt, \tag{6}$$

де $P_0(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ — ядро Пуассона. Зафіксуємо довільне $y_0 > 0$. Нехай $F(z) = f(z + iy_0/2)$. Візьмемо в (6) $U(t) = u(t + iy_0/2)$. Тоді

$$|f'(z_0)| \le \frac{2}{\pi y_0}\int_{-\infty}^{+\infty}P_0\Big(x-t, \frac{y_0}{2}\Big)\Big|u(t + \frac{iy_0}{2})\Big|\,dt \le C_0\Big(\frac{y_0}{2}\Big)^{\gamma-2}. \tag{7}$$

Звідси випливає, що для довільного $x \in \mathbb{R}$, $y_j > Y > 0$, $\gamma \in (0,1)$

$$|f(x+iy_2) - f(x+iy_1)| = \Big|\int_{y_1}^{y_2} f'(x+i\eta)\,d\eta\Big| \le C_0\frac{2^{2-\gamma}}{1-\gamma}Y^{\gamma-1}.$$

Отже, за критерієм Коші сім'я $(\varphi_y(x)) := (f(x+iy))$ рівномірно за x збіжна при $y \to +\infty$; $f(x+iy) \rightrightarrows \varphi(x)$ $(y \to \infty)$. Крім того, переходячи до границі при $y \to +\infty$ у нерівності

$$|f(x'+iy) - f(x''+iy)| = \Big|\int_{x'}^{x''} f'(\xi+iy)\,d\xi\Big| \le C_0\Big(\frac{y}{2}\Big)^{\gamma-2}|x''-x'|,$$

одержуємо, що $|\varphi(x') - \varphi(x'')| = 0$, тобто $\varphi \equiv b_0 \in \mathbb{C}$. Оцінимо тепер зростання f при $y \downarrow 0$.

$$|f(x+iy) - b_0| = \Big|\int_{x+iy}^{x+i\infty} f'(\zeta)\,d\zeta\Big| \le C_0 2^{2-\gamma}\int_y^\infty t^{\gamma-2}\,dt = C_0\frac{2^{2-\gamma}}{1-\gamma}y^{\gamma-1}.$$

Звідки при $0<\gamma<1$ послідовно маємо

$$\begin{aligned} |v(x+iy)-\operatorname{Im} b_0| &\le \frac{2^{2-\gamma}C_0}{1-\gamma}y^{\gamma-1}, y>0,\\ |v(x+iy)| &\le \frac{4C_0}{1-\gamma}y^{\gamma-1}, \quad y\downarrow 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Якщо $\gamma=1$, то

$$\begin{aligned} f(x+i) &= \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{1}{x+\frac{i}{2}-t}+\frac{t}{t^2+1}\Big)u\big(t+\frac{i}{2}\big)\,dt=\\ &= \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+t(x+\frac{i}{2})}{(x+\frac{i}{2}-t)(t^2+1)}u\big(t+\frac{i}{2}\big)\,dt. \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} |f(x+i)| &\le \frac{C_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|1+t(x+\frac{i}{2})|}{(t^2+1)|x+\frac{i}{2}-t|}dt \le C_0+\frac{C_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t|(|x|+\frac{1}{2})}{(t^2+1)|x+\frac{i}{2}-t|}dt=\\ &= C_0+\frac{C_0}{\pi}\Big(\int_{|x-t|\ge 3|x|}+\int_{|x|/2\le|x-t|\le 3|x|}+\int_{|x-t|\le|x|/2}\Big)=: C_0+I_1+I_2+I_3. \end{aligned}$$

Оцінимо кожен інтеграл I_j, $j\in\{1,2,3\}$. Для I_1 маємо

$$I_1 \le C_2\Big(|x|+\frac{1}{2}\Big)\int_{|x|}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\le C_3. \tag{9}$$

Оскільки при $|x-t|\ge|x|/2$ маємо

$$\frac{(|x|+\frac{1}{2})|t|}{(t^2+1)|x+\frac{i}{2}-t|}\le\frac{2|t|(|x|+\frac{1}{2})}{|x|(t^2+1)}\le\frac{2|t|(2|t|+\frac{1}{2})}{|x|(t^2+1)}\le\frac{9}{|x|},$$

то

$$I_2\le\frac{9}{|x|}5|x|\le 45. \tag{10}$$

Нарешті,

$$I_3\le\frac{(|x|+\frac{1}{2})\frac{3}{2}|x|}{1+(\frac{|x|}{2})^2}\int_0^{|x|/2}\frac{d\tau}{|\tau+\frac{i}{2}|}\le C_4(\ln^+|x|+1). \tag{11}$$

Отже, оцінки (9)–(11) дають $|f(x+i)|\le C_5(\ln^+|x|+1)$. Звідси, для $y\in(0,1]$, використовуючи (7), маємо

$$\begin{aligned} |f(x+iy)| &\le |f(x+i)|+\Big|\int_y^1 f'(x+i\eta)\,d\eta\Big|\le\\ &\le C_5(\ln^+|x|+1)+4C_0\int_y^1\frac{d\eta}{\eta}\le C_6\Big(1+\ln^+|x|+\ln\frac{1}{y}\Big). \end{aligned}$$ □

2. Доведення теореми 1. ($\Rightarrow$) Необхідність доводиться стандартно. Для $P_0(y,t)$ маємо $\frac{\partial}{\partial t}P_0(t,y)=-\frac{2yt}{(t^2+y^2)^2}$. З умови $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\psi(t)|}{t^2+1}<+\infty$ випливає, що $\psi(t)=o(t^2)$ $(t\to\infty)$. Справді, маємо

$$|\psi(R)-\psi(0)|=\Big|\int_0^R d\psi(t)\Big|\le\int_0^R|d\psi(t)|=:\psi^*(R).$$

З іншого боку,

$$\infty > \int_0^R \frac{d\psi^*(t)}{1+t^2} = \frac{\psi^*(R)}{1+R^2} - \psi^*(0) + \int_0^R \frac{2t\psi^*(t)}{(1+t^2)^2} dt.$$

Оскільки $\psi^*(t)$ монотонна, то $\psi^*(t) = o(t^2)$ $(t \to \infty)$. Відтак те саме співвідношення правильне і для $\psi(t)$.

Розглянемо тепер $u(z)$, $z = x + iy$:

$$u(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(t-x, y)\, d\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(t-x, y)\, d(\psi(t) - \psi(x)) =$$

$$= P_0(t-x, y)(\psi(t) - \psi(x))\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} P_0(t-x, y)(\psi(t) - \psi(x))\, dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} P_0(\tau, y)(\psi(\tau + x) - \psi(x))\, d\tau.$$

Використовуючи тепер належність ψ до Λ_γ, виводимо

$$|u(z)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2y\tau}{(\tau^2 + y^2)^2} C\tau^\gamma\, d\tau = 2Cy^{\gamma-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^{1+\gamma}\, dt}{(1+t^2)^2} = C_7 y^{\gamma-1}, \quad y > 0.$$

Необхідність доведено.

($\Leftarrow$) Нехай u має вигляд (3) і $M_\infty(y, u) \le C_0 y^{\gamma-1}$, $0 < \gamma < 1$, $y > 0$. Тоді для аналітичної функції $f = u + iv$, де v визначається (4), за лемою 1 виконується

$$|f(x+iy)| \le C_1(\gamma) y^{\gamma-1}, \quad 0 < y < 1.$$

Нехай $\Phi(z) = \int_i^z f(\zeta)\, d\zeta$, $z \in \mathbb{C}_+$. Тоді для $0 < y_1 < y_2 < 1$ маємо

$$|\Phi(x+iy_2) - \Phi(x+iy_1)| \le \int_{y_1}^{y_2} |f(x+i\eta)|\, d\eta \le \frac{C_1}{\gamma} y_2^\gamma.$$

Звідси, за критерієм Коші $\lim_{y\downarrow 0} \Phi(x+iy) = \Phi(x)$ рівномірно за x. Отже, Φ неперервно продовжується на $\mathbb{R}$.

Далі, покажемо, що $\Phi \in \Lambda_\gamma$. За теоремою Коші

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \left(\int_{J_1} + \int_{J_2} + \int_{J_3} \right) f(\zeta)\, d\zeta,$$

де $J_1 = [x, x+ih]$, $J_2 = [x+ih, x+h+ih]$, $J_3 = [x+h+ih, x+h]$. Тоді

$$\left| \int_{J_1} f(\zeta)\, d\zeta \right| \le C_1 \int_0^h y^{\gamma-1}\, dy = \frac{C_1}{\gamma} h^\gamma.$$

Така сама оцінка правильна і для інтеграла по J_3. Тепер

$$\left| \int_{J_2} f(\zeta)\, d\zeta \right| \le \int_x^{x+h} |f(\xi + ih)|\, d\xi \le C_1 h^{\gamma-1} h = C_1 h^\gamma.$$

З цих оцінок випливає, що $|\Phi(x+h) - \Phi(x)| \le C_8(\gamma) h^\gamma$, тобто $\Phi \in \Lambda_\gamma$.

Оскільки $u(z)$ допускає додатну гармонійну мажоранту на кожному компакті в $\mathbb{C}_+$, а саме $P[d\psi^*](z)$, то $\psi(x_2) - \psi(x_1) = \lim_{y\downarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} u(x+iy)\,dx$ для будь-яких точок неперервності x_1, x_2 функції ψ. Продовжуючи цю рівність, отримаємо (див. розділ 4)

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \lim_{y\downarrow 0} \operatorname{Re} \int_{x_1}^{x_2} f(x+iy)\,dx = \operatorname{Re} \lim_{y\downarrow 0} \int_{[x_1+iy, x_2+iy]} f(z)\,dz =$$
$$= \operatorname{Re} \lim_{y\downarrow 0} (\Phi(x_2+iy) - \Phi(x_1+iy)) = \operatorname{Re}(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)).$$

Звідки, $\psi \in \Lambda_\gamma$. Достатність доведено.

3. Узагальнення. Як і в [11], введемо узагальнені ядра Коші та Пуассона для нижньої півплощини $\mathbb{C}_- = \{w = s + i\tau : s \in \mathbb{R}, \tau < 0\}$. Для $\alpha \in (-1, +\infty)$ покладемо

$$\hat{C}_\alpha(w,t) := \frac{\Gamma(1+\alpha)}{e^{i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}(w-t)^{1+\alpha}}, \quad \hat{P}_\alpha(s-t,\tau) = \operatorname{Re} \hat{C}_\alpha(s+i\tau, t), \quad w \in \mathbb{C}_-, t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Для комплекснозначної вимірної на інтервалі $(-\infty, d)$, для фіксованого $d \in \mathbb{R}$, функції $v(\tau)$ визначимо оператор дробового інтегрування Вейля $W^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, за умови абсолютної збіжності інтеграла [11, Chap. 1]

$$W^{-\alpha} v(\tau) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - y)^{\alpha-1} v(y)\,dy. \tag{13}$$

Дробова похідна порядку $\alpha > 0$ визначається, як

$$W^{\alpha} v(\tau) := W^{-(p-\alpha)} \frac{d^p}{d\tau^p} v(\tau), \tag{14}$$

де $p \in \mathbb{Z}$ таке, що $p - 1 < \alpha \le p$.

Дію оператора $W^{-\alpha}$ на гармонійну в $\mathbb{C}_-$ функцію $u(s+i\tau)$ розуміємо як дію за уявною частиною аргумента. Зазначимо, що тоді $W^{-\alpha}\hat{C}_\alpha(w,t) = \hat{C}_0(w,t)$, $W^{-\alpha}\hat{P}_\alpha(s,\tau) = \hat{P}_0(s,\tau)$.

Теорема 2. *Нехай* $\gamma \in (0,1)$,

$$u(s+i\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{P}_\alpha(s-t,\tau)\,d\psi(t), \tag{15}$$

де

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\psi(t)|}{1+|t|^{2+\alpha}} < +\infty. \tag{16}$$

Для того, щоб

$$\hat{M}_\infty(\tau, u) := \sup\{|u(s+i\tau)| : s \in \mathbb{R}\} = O(|\tau|^{\gamma-\alpha-1}), \quad \tau < 0$$

необхідно і достатньо, щоб $\psi \in \Lambda_\gamma$.

Доведення теореми 2. Зазначимо, що умова (16) забезпечує абсолютну збіжність інтеграла (15) ([11, розділ 1]). Подіявши на (15) оператором $W^{-\alpha}$, одержимо, що гармонійна функція $u_\alpha(w) = W^{-\alpha}u(w)$ (див. лему 1.10 [11]) має зображення (3).

Твердження теореми випливає тепер з такої леми.

Лема 2. *Нехай* $\eta > 0$, $\beta > 0$, u *має вигляд* (3). *Для того, щоб* $\hat{M}_\infty(\tau, u) = O(|\tau|^{-\beta})$, $\tau < 0$ *необхідно і достатньо, щоб* $\hat{M}_\infty(\tau, u^\eta) = O(|\tau|^{-\beta-\eta})$, $\tau < 0$, *де* $u^\eta = W^\eta u$.

Твердження достатності леми 2 виводиться безпосередньо з означення оператора $W^{-\eta}$ і випливає з леми 1.9 [11].

Оскільки $u^\eta(x + i\tau) = W^{-(p-\eta)} \frac{\partial^p}{\partial \tau^p} u(x + i\tau)$, $p - 1 < \eta \le p$, то, з огляду на доведену достатність потрібно довести, що співвідношення $\hat{M}_\infty(\tau, u) = O(|\tau|^{-\beta})$, $\tau < 0$ імплікує $\hat{M}_\infty(\tau, \frac{\partial^p}{\partial \tau^p} u) = O(|\tau|^{-\beta-p})$, $\tau < 0$. Останнє твердження, взагалі кажучи ідентичне лемі 5 [4, Chap. V, §4] і доводиться цілком аналогічно. Для повноти викладу доведемо це для $p = 1$.

Нехай $\tau_1 < 0$. Оскільки $\hat{M}_\infty(u, \tau_1)$ скінченна, то при $\tau < \tau_1$ маємо

$$u(x + i\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{P}_0(t - x, \tau - \tau_1) u(t + i\tau_1) dt.$$

Звідки

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x + i\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{P}_0}{\partial \tau}(t - x, \tau - \tau_1) u(t + i\tau_1) dt.$$

Вибираючи $\tau_1 = \tau/2$ і використовуючи припущення леми, отримуємо

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial \tau}(x + i\tau)\Big| \le \frac{1}{\pi}\Big(\frac{2}{|\tau|}\Big)^\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\frac{\partial \hat{P}_0}{\partial \tau}\Big(t - x, \frac{\tau}{2}\Big)\Big| dt \le \frac{C}{|\tau|^{\beta+1}}. \qquad \square$$

Зазначимо, що для верхньої півплощини правильне твердження подібне до теореми 2. При цьому оператор Вейля означається як

$$\tilde{W}^{-\alpha} v(y) := \frac{e^{i\pi\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_y^{+\infty} (\tau - y)^{\alpha-1} v(y)\, dy, \quad \alpha > 0, y > 0.$$

Ядра Коші і Пуассона мають відповідно вигляд при $z = x + iy \in \mathbb{C}_+$, $t \in \mathbb{R}$

$$C_\alpha(z, t) = -\Gamma(1 + \alpha)(i(z - t))^{-\alpha-1}, \quad P_\alpha(x - t, y) = \operatorname{Re} C_\alpha(x + iy, t),$$

де $\zeta^{-\alpha-1} = |\zeta|^{-\alpha-1} e^{-i(\alpha+1)\arg_0 \zeta}$.

4. Зображення у вигляді інтеграла Пуассона-Стільтьєса. З результатів [12] випливає, що зображення

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{(x - t)^2 + y^2} + \sigma y, \tag{17}$$

де ν — деякий заряд такий, що $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\nu(t)|}{1+t^2} < +\infty$, має місце за умови існування таких сталих $M \in \mathbb{R}$ і $\rho \in (0, 1)$, що $u(re^{i\theta}) \le Mr^\rho,\ r > 0,\ 0 < \theta < \pi$. При цьому $\sigma \le 0$.

На жаль нам не вдалося знайти необхідні і достатні умови зображення гармонійної в $\mathbb{C}_+$ функції у вигляді (3). Проте ми отримали деякі достатні умови, близькі, в певному сенсі до точних.

Теорема 3. *Нехай* $u \in h(\mathbb{C}_+)$. *Якщо існує така аналітична в* $\mathbb{C}_+$ *функція, що* $\operatorname{Re} f = u$ *і для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $R_0 > 0$ *таке, що*

$$|f(Re^{i\theta})| < \varepsilon \frac{R}{\sin\theta \ln R}, \quad R > R_0, 0 < \theta < \pi, \tag{18}$$

і

$$\varlimsup_{y\downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u(x+iy)|\,dx}{1+x^2} < +\infty, \tag{19}$$

то u *зображується у вигляді* (3).

Зазначимо, що умова (19) є необхідною. Справді,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(t)}{(t-x)^2+y^2}\right|\frac{dx}{1+x^2} \le \int_{-\infty}^{+\infty} |d\psi(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\,dx}{((t-x)^2+y^2)(1+x^2)} =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+y}{t^2+(1+y)^2}|d\psi(t)| \le 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\psi(t)|}{1+t^2} < +\infty, \quad 0 < y < 1.$$

Що стосується умови (18), то в [1, Гл.V, §2, лема 3] доведено, що інтеграл Пуассона допускає оцінку $|P[f^*](re^{i\theta})| < C_\varepsilon + \varepsilon \dfrac{r}{\sin\theta}$ для довільного $\varepsilon > 0$, де $f^* \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Зазначимо, що функції вигляду (3) допускають додатну гармонійну мажоранту на будь-якій обмеженій підмножині $\mathbb{C}_+$. Це $\mathcal{P}[d\psi^*]$, де $\psi^*(R) = \int_0^R |d\psi(t)|$. Для таких функцій зокрема відомо ([13, теорема 3]), що:

1) $\psi(b) - \psi(a) = \lim_{y\downarrow 0} \int_a^b u(x+iy)dx$ для будь-яких точок a, b неперервності ψ;
2) Для майже всіх t в сенсі міри Лебега існують границі $\lim_{y\downarrow 0} v(t+iy) = v(t)$, причому $v \in L_1[a,b]$;
3) $d\psi(t) = v(t)\,dt + d\sigma(t)$, де σ — міра сингулярна щодо міри Лебега.

У термінах заряду Стільтьєса ν, породженого функцією ψ, умова (19) рівносильна до умови $\int_1^\infty \frac{\lambda_-(t)+\lambda_+(t)}{1+t^3}\,dt < +\infty$, де $\lambda_\pm = \nu_\pm(\{x : |x| < t\})$, ν_+, ν_- — додатна і від'ємна варіації заряду ν. Розглянемо тепер характеристики Неванлінни гармонійної в $\mathbb{C}_+$ функції u ([14]):

$$m(r,u) = \frac{1}{r}\int_0^\pi u^+(re^{i\theta})\sin\theta\,d\theta, \quad N(r,u) = \int_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}dt,$$
$$T(r,u) = m(r,u) + N(r,u) + m(r_0,-u),$$

де $r_0 > 0$ фіксоване.

З умови (18) випливає, що $m(r,u) = o\Big(\frac{1}{\ln r}\Big)$ $(r \to +\infty)$, а умова (19) рівносильна до $N(r,u) + N(r,-u) = O(1)$. З іншого боку, для $u_1 = \mathcal{P}[f^*]$, $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ маємо $m(r,u_1) = O(1)$. З огляду на формулу Неванлінни, це дозволяє припустити, що необхідною і достатньою умовою зображення $u \in h$ у вигляді (17) є умова $\sup_{r>0} T(r,u) < +\infty$. Проте ми не змогли цього довести. Зазначимо, що результати такого типу отримано в [15].

Доведення теореми 3. Нам потрібна така елементарна лема.

Лема 3. *Нехай F аналітична в $\mathbb{C}_+$, неперервна в $\overline{\mathbb{C}}_+$ і $\int_0^\pi |F(re^{i\theta})|\,d\theta = o(r)$ $(r\to+\infty)$. Тоді*

$$F(x+iy) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt, \quad z = x+iy\in\mathbb{C}_+. \tag{20}$$

Доведення теореми 3. За інтегральною формулою Коші

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{F(\tau)\,d\tau}{\tau - z}, \quad z\in\mathbb{C},$$

де $\Gamma_R = [-R,R]\cup\{Re^{i\theta} : 0\le\theta\le\pi\}$. Додавши рівність $0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F(\tau)\,d\tau}{\tau-\bar z}$, отримаємо

$$F(z) = \frac{y}{\pi}\int_{\Gamma_R} \frac{F(\tau)}{(x-\tau)^2+y^2}d\tau, \quad x+iy\in\mathbb{C}_+.$$

Залишилось зазначити, що згідно з умовою леми, інтеграл по дузі $\{Re^{i\theta} : 0\le\theta\le\pi\}$ прямує до нуля при $R\to+\infty$, і перейти до границі. □

Зафіксуємо $y_0>0$ і розглянемо аналітичну функцію $F(re^{i\varphi}) = f(iy_0+re^{i\varphi})$. Позначимо $\rho e^{i\theta} = iy_0+re^{i\varphi}$. Тоді $y_0+r\sin\varphi = \rho\sin\theta$. Зокрема $\rho\sim r$ $(r\to+\infty)$. Використовуючи (18), виводимо

$$|F(re^{i\varphi})| = |f(iy_0+re^{i\varphi})| \le \frac{\varepsilon\rho}{\sin\theta\ln\rho} = \frac{\varepsilon\rho}{(\frac{y_0}{\rho}+\frac{r}{\rho}\sin\varphi)\ln\rho} < \frac{2\varepsilon r}{(\frac{y_0}{r}+\sin\varphi)\ln r}, \quad r>R_1.$$

Звідси

$$\int_0^\pi |F(re^{i\varphi})|\,d\varphi < \frac{2\varepsilon r}{\ln r}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\frac{y_0}{r}+\sin\varphi} \le \frac{4\varepsilon r}{\ln r}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\frac{y_0}{r}+\frac{2}{\pi}\varphi} = \frac{\varepsilon 2\pi r}{\ln r}\ln\frac{r}{y_0} < 2\pi\varepsilon r, \quad r>R_1.$$

Отже, виконуються умови леми 3. Тоді F зображується у вигляді (20). Відокремлюючи дійсну частину, отримуємо

$$u(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P_0(t-x, y-y_0)u(t+iy_0)dt, \quad y>y_0. \tag{21}$$

Обґрунтуємо перехід до границі при $y_0\downarrow 0$. Для $y>0$ означимо заряд μ_y на $\mathbb{R}$ у такий спосіб. Для довільного відрізку $[a,b]$ покладемо $\mu_y([a,b]) = \int_a^b u(x+iy)\,dx$. Згідно із зауваженнями на початку розділу, сім'я $(\mu_y)_{y>0}$ слабко збігається до деякого заряду μ на $\mathbb{R}$ обмеженої зміни на будь-якому відрізку $[a,b]$, причому $\mu([a,b]) = \lim_{y\downarrow 0}\int_a^b u(x+iy)\,dx$ в точках неперервності μ. Крім того, з умови (19) випливає, що виконується умова $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\mu(t)|}{t^2+1} < +\infty$. Запишемо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_0(t-x,y-y_0)u(t+iy_0)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(t-x,y)d\mu_{y_0}(t) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(P_0(t-x,y-y_0) - P_0(t-x,y))\,d\mu_{y_0}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(t-x,y)\,d(\mu_{y_0}(t)-\mu(t)).$$

Оскільки

$$|P_0(t-x,y-y_0) - P_0(t-x,y)| \le \sup_{\eta\in[y-y_0,y]}\Big|\frac{\partial P_0}{\partial\eta}(x-t,\eta)\Big|y_0 \le$$

$$\leq \frac{yt}{(y^2/4+t^2)^2} y_0 \leq \frac{y_0}{y^2/4+t^2} \leq \frac{C_9 y_0}{1+t^2}, \quad z \in \mathcal{K} \Subset \mathbb{C}_+, y_0 \downarrow 0,$$

то перший інтеграл прямує до нуля при $y_0 \downarrow 0$. Прямування до нуля другого інтегралу випливає зі збіжності μ_{y_0} до μ і властивостей ядра Пуассона. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1956. – 632 с.
2. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 366 с.
3. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир., 1984.
4. Stein E. Singular integrals and differentiability properties of functions. — Princeton Univ. Press, Princeton, 1970, 290 pp.
5. Hardy G.H., Littlewood J.E. *Some properties of fractional integrals. II*// Math. Zeitschrift – 1931/32. – V.34. – P. 403–439.
6. Chyzhykov I. Growth and representation of analytic and harmonic functions in the unit disk// Ukr. Math. Bull. – 2006. – V.3, №1. – P. 31–44.
7. Чижиков І.Е. *Узагальнення однієї теореми Гарді-Літтлвуда*// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т.49, №2. – С. 74–79.
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.1,2. – М.:Мир, 1965.
9. Duren P.L. Theory of H^p spaces. – Academic press, NY and London, 1970. – 258 pp.
10. Shields A.L., Williams D.L. *Bounded projections and the growth of harmonic conjugates in the unit disc*// Michigan Math. J. – 1982. – V.29. – P. 3–25.
11. Jerbashian A.M. Functions of α-bounded type in the half-plane, Springer, NY, 2005. – 196 pp.
12. Гришин А.Ф. *О регулярности роста субгармонических функций. III* // Теория функций, функц. анализ и их прил. – 1968. – Вып. 7. – С.59–84.
13. Гришин А.Ф. *Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций*// Мат. физика, анализ, геометрия. – 1994. – Т.1, №2. – С. 193–215.
14. Fedorov M.A., Grishin A.F. *Some questions of the Nevanlinna theory for the complex half-plane*// Math. Physics, Analysis and Geometry (Kluwer Acad. Publish.) – 1998. – V.1, №3. – P. 223–271.
15. Gardinen S.J. *Representation and growth of subharmonic functions in half-spaces*// Proc. London Math. Soc. (3). – 1984. – V.48. – P. 300–318.

Національний університет "Львівська політехніка"

Львівський національний університет ім. І.Франка,
механіко-математичний факультет

ichyzh@lviv.farlep.net

Надійшло 15.05.2010