УДК 519.4

Л. П. Бедратюк

ЛОКАЛЬНІ ГОМОМОРФІЗМИ МОДУЛЯРНИХ АЛГЕБР ЛІ ТИПУ КАРТАНА

L. P. Bedratyuk. *Local homomorphisms of modular Lie algebras of Cartan type*, Mat. Stud. **35** (2011), 115–120.

Let $L(\mathbf{m})$ be one of the finite dimensional modular Lie algebras $W_n(\mathbf{m})$, $S_n(\mathbf{m})$, $H_n(\mathbf{m})$ and let L be one of corresponding p-algebras W_n, S_n, H_n. We prove that there exists a nontrivial map from the algebra $S(L)^L$ of symmetrical invariants into the algebra $S(L(\mathbf{m}))^{L(\mathbf{m})}$.

Л. П. Бедратюк *Локальные гомоморфизмы модулярных алгебр Ли картановского типа.* // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №2. – С.115–120.

Пусть $L(\mathbf{m})$ — одна из конечномерных модулярных алгебр Ли картановского типа $W_n(\mathbf{m})$, $S_n(\mathbf{m})$, $H_n(\mathbf{m})$, а L — одна из p-алгебр Ли W_n, S_n, H_n. Доказано существование нетривиального отображения алгебры симметрических инвариантов $S(L)^L$ в алгебру симметрических инвариантов $S(L(\mathbf{m}))^{L(\mathbf{m})}$.

1. Нехай $L(\mathbf{m})$ — одна із простих скінченновимірних алгебр Лі типу Картана $W_n(\mathbf{m})$, $S_n(\mathbf{m})$, $H_n(\mathbf{m})$, де $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $m_i \in \mathbb{N}_0$, яка розглядається над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{K}$ додатної характеристики p. Алгебра $L(\mathbf{m})$ — градуйована

$$L(\mathbf{m}) = L_{-1}(\mathbf{m}) \oplus L_0(\mathbf{m}) \oplus \cdots \oplus L_r, (\mathbf{m}), \quad [L_i(\mathbf{m}), L_j(\mathbf{m})] \subset L_{i+j}(\mathbf{m}).$$

Тут $r = n\sum_i(p^{m_i} - 1) - 1$ для $W_n(\mathbf{m})$ і $r = n\sum_i(p^{m_i} - 1) - 2$ для алгебр $S_n(\mathbf{m})$, $H_n(\mathbf{m})$. Компоненти фільтрації алгебри $L(\mathbf{m})$ позначимо через $\mathcal{L}_i = L_i \oplus L_{i+1} \oplus \cdots \oplus L_r$, $\mathcal{L}_{-1} = L(\mathbf{m})$ (всі деталі див. в [1]). Для набору $\mathbf{m} = (1, 1, \ldots, 1)$ відповідні алгебри позначаються через W_n, S_n, H_n, L.

Теорія зображень модулярних алгебр Лі істотно відрізняється від теорії зображень алгебр Лі над полем нульової характеристики, зокрема, розмірності незвідних модулів обмежені згори. В загальному випадку, для модулярних алгебр Лі ще не існує класифікації незвідних зображень, і навіть невідомі їхні розмірності (див. [2]). Цікавим фактом є існування тісного зв'язку між зображеннями модулярних алгебр Лі та зображеннями квантових алгебр (див. [3]).

Обчислення центру $Z(L(\mathbf{m}))$ універсальної огортуючої алгебри $U(L(\mathbf{m}))$ є важливою задачею у побудові класифікації незвідних зображень алгебри $L(\mathbf{m})$. На сьогоднішній день центр $Z(L(\mathbf{m}))$ повністю описаний лише для алгебри $W_1(\mathbf{m})$ в [4]. Окремі центральні елементи для деяких алгебр картанового типу знайдені в [5]–[7]. Мінімальну кількість породжуючих елементів алгебри $S(L)^L$ обчислено в [8], проте явний вигляд цих елементів в загальному випадку невідомий.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 17B50, 17B20.

Першим кроком в описанні алгебри $Z(L(\mathbf{m}))$ може бути знаходження алгебри інваріантів $S(L(\mathbf{m}))^{L(\mathbf{m})}$ симетричної алгебри $S(L(\mathbf{m}))$ відносно приєднаної дії алгебри $L(\mathbf{m})$. Алгебра $S(L(\mathbf{m}))^{L(\mathbf{m})}$ є скінченно породженою алгеброю над p-центром алгебри $L(\mathbf{m})$ і визначається як анулятор $L(\mathbf{m})$-модуля $S(L(\mathbf{m}))$.

У статті побудовано нетривіальне відображення алгебри симетричних інваріантів $S(L)^L$ в алгебру $S(L(\mathbf{m}))^{L(\mathbf{m})}$, яке ми назвали *локальним гомоморфізмом.* Існування такого локального ізоморфізму дає можливість обмежитися пошуком симетричних інваріантів лише алгебри $S(L)$, що є важливим з обчислювальної точки зору, оскільки, розмірність алгебри L менша за розмірність $L(\mathbf{m})$.

2. Нагадаємо означення модулярних алгебр Лі $W_n(\mathbf{m}), S_n(\mathbf{m}), H_n(\mathbf{m})$. Зафіксуємо наступні позначення для часто вживаних наборів з $\mathbb{N}_0^n$: $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n), \delta_i = p^{m_i-1}$, $\varepsilon_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Також покладемо $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Алгеброю розділених степенів $\mathbb{O}_n(\mathbf{m})$ називається комутативна алгебра з одиницею, яка задається твірними $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, співвідношеннями $x_1^{p^{m_1}} = 0, \ldots\ x_n^{p^{m_n}} = 0$ та правилом множення

$$x^{(\alpha)}x^{(\beta)} = \binom{\alpha+\beta}{\alpha}x^{(\alpha+\beta)},\ \binom{\alpha}{\beta} = \prod_i \binom{\alpha_i}{\beta_i}$$

тут $x^{(\alpha)}{:=}x_1^{\alpha_1}\ldots, x_n^{\alpha_n}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha \le \delta$. Загальна алгебра $W_n(\mathbf{m})$ породжується всіма спеціальними диференціюваннями алгебри $\mathbb{O}_n(\mathbf{m})$ вигляду $D = \sum_i f_i \partial_i, f_i \in \mathbb{O}_n(\mathbf{m})$.

Спеціальна алгебра $S_n(\mathbf{m}), n \ge 2$ є підалгеброю алгебри $W_n(\mathbf{m})$, яка породжена диференціюваннями $\mathcal{D}_{i,j}(\alpha) = \partial_i(x^{(\alpha)})\partial_j - \partial_j(x^{(\alpha)})\partial_i, i < j \le n, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Гамільтонова алгебра $H_n(\mathbf{m})$, n — парне, складається з диференціювань

$$D(\alpha) = \sum_{i=1}^n a_{i,\pi i}\partial_i(x^{(\alpha)})\partial_{\pi i},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\quad \alpha < \delta,$$

де π — інволютивна перестановка без нерухомих точок множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, причому $a_{i,\pi i} = \pm 1$, $a_{i,\pi i} + a_{\pi i,i} = 0$. Всі означені вище алгебри є простими алгебрами Лі.

3. Нехай F, F' — скінченно вимірні алгебри Лі, причому алгебра F' є F-модулем. Алгебру F вважаємо F-модулем відносно приєднаної дії.

Лінійне відображення $\varphi\colon F \to F'$ називається *локальним гоморфізмом F-модулів F і F'*, якщо в алгебрі F існують ненульові підпростори R_1 і R_2, такі, що $\varphi(xy) = x\varphi(y)$ для всіх $x \in R_1$, $y \in R_2$.

Підпростори R_1 і R_2 назвемо *визначальними підпросторами локального гомоморфізму φ*. Якщо $R_1 = R_2 = F$, то тоді φ є звичайним гомоморфізмом F-модулів. Відображення φ продовжимо до відображення симетричних алгебр $\varphi\colon S(F) \to S(F')$ і у стандартний спосіб перетворимо $S(F)$ і $S(F')$ в F-модулі.

Очевидною є така властивість: *якщо φ локальний гомоморфізм алгебр Лі F і F' з визначальними просторами R_1, R_2 і ці підпростори породжують всю алгебру F, то*

$$\varphi(S(R_1)^{R_2}) \subset S(F')^{F'}.$$

Тепер ми можемо довести таке твердження.

Теорема. *Існує нетривіальний локальний гомоморфізм алгебри $S(L)^L$ в симетричну алгебру $S(L(\mathbf{m}))^{L(\mathbf{m})}$.*

Доведення. Нехай $L = W_n$. Зафіксуємо такі позначення: $h_i = x^{(\overline{\delta})} \in W_n$, $g_i = x^{(\delta)} \in W_n(\mathbf{m})$, $i = 1, \ldots, n$, і $\overline{\delta} = (p-1, p-1, \ldots, p-1)$. Елементи $\partial^\alpha(h_i)$, де $\partial^\alpha{:=}\partial^{\alpha_1}\cdots\partial^{\alpha_n}$, $0 \leq \alpha \leq \overline{\delta}$, очевидно, утворюють базис алгебри W_n.

Визначимо лінійне відображення $\varphi\colon W_n \to W_n(\mathbf{m})$ так, щоб $\varphi(\partial^\alpha(h_i)) = \partial^\alpha(g_i)$. Виберемо підпростори R_1 і R_2 так, щоб відображення φ стало локальним гомоморфізмом. Покладемо $R_1 = L_0 \oplus L_1$. Нагадаємо, що $W_n(\mathbf{m})$ є W_n модулем, якщо вважати, що алгебра W_n природно вкладена в алгебру $W_n(\mathbf{m})$. Підпростір R_2 шукатимемо з умови необхідності виконання вимог існування локального гомоморфізму при зафіксованому визначальному підпросторі R_1: $\varphi(xy) = x\varphi(y)$, що еквівалентно до умови $\varphi([x,y]) = [\iota(x), \varphi(y)]$, $x \in R_1$, $y \in R_2$. Тут $\iota\colon W_n \to W_n(\mathbf{m})$ — природне вкладення алгебри W_n в алгебру $W_n(\mathbf{m})$, тобто $(\forall i)\colon\ \iota(x^{(\alpha)}\partial_i) = x^{(\alpha)}\partial_i \in W_n(\mathbf{m})$.

Переконаємося в тому, що за R_2 можна взяти L_0. Нехай $u = x^\beta\partial_i \in R_1$, $v = \partial^\alpha(h_j)$, $v \in L_0$. Знайдемо їхній комутатор $[u,v]$

$$\begin{aligned}
[u,v] &= [x^\beta\partial_i, \partial^\alpha(h_j)] = [x^\beta\partial_i, x^{\overline{\delta}-\alpha}\partial_i] = x^{(\beta)}x^{\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_i}\partial_j - x^{(\overline{\delta}-\alpha)}x^{(\beta-\varepsilon_j)}\partial_i = \\
&= \binom{\delta-\alpha-\varepsilon_i+\beta}{\beta}x^{(\delta-\alpha-\varepsilon_i+\beta)}\partial_j - \binom{\delta-\alpha-\varepsilon_j+\beta}{\beta-\varepsilon_j}x^{(\delta-\alpha-\varepsilon_j+\beta)}\partial_i = \\
&= \binom{\delta-\alpha-\varepsilon_i+\beta}{\beta}\partial^{(\alpha+\varepsilon_i-\beta)}(h_i) - \binom{\delta-\alpha-\varepsilon_j+\beta}{\beta-\varepsilon_j}\partial^{(\alpha+\varepsilon_j-\beta)}(h_i).
\end{aligned}$$

Далі нам буде потрібна наступна лема.

Лема. *Для наборів $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha, \beta \leq \delta$ справджуються тотожності:*

(i) $\binom{\delta-\alpha-\beta}{\beta} = (-1)^{|\beta|}\binom{\alpha}{\beta} \mod p$;

(ii) $\binom{\delta-\alpha+\beta-\varepsilon_j}{\beta-\varepsilon_j} = (-1)^{|\beta-\varepsilon_j|}\binom{\alpha}{\beta-\varepsilon_j} \mod p$.

Доведення. Обидві тотожності випливають з рівності

$$\binom{p^m-1-n+k}{k} = (-1)^k\binom{n}{k} \mod p, m, n, k, p \in \mathbb{N}.$$

Справді,

$$\begin{aligned}
\binom{p^m-1-n+k}{k} &= \frac{(p^m-1-(n-k))!}{k!(p^m-1-n)!} = \frac{(p^m-1-n+1)\cdots(p^m-1-n+k)}{k!} = \\
&= \frac{(p-1-n+1)\cdots(p-1-n+k)}{k!} = \frac{(p-1-n+1)\ldots(p-1)}{k!(p-1-n+k+1)\cdots(p-1)} = \\
&= \frac{(-n)(-(n-1))\cdots(-1))}{k!(-(n-k)(-(n-k-1))\cdots(-1))} = \frac{(-1)^n n!}{k!(-1)^{n-k}(n-k)!} = (-1)^k\binom{n}{k} \mod p. \quad \square
\end{aligned}$$

Використавши лему, отримаємо

$$\begin{aligned}
[u,v] &= (-1)^{|\beta|}\binom{\alpha+\varepsilon_i}{\beta}\partial^{(\alpha+\varepsilon_i-\beta)}(h_i) - (-1)^{|\beta-\varepsilon_j|}\partial^{(\alpha+\varepsilon_j-\beta)}(h_i) = \\
&= (-1)^{|\beta|}\binom{\alpha+\varepsilon_i}{\beta}\partial^{(\alpha+\varepsilon_i-\beta)}(h_j) + (-1)^{|\beta|}\partial^{(\alpha+\varepsilon_j-\beta)}(h_i).
\end{aligned}$$

Подібно знаходимо

$$[\iota(u), \varphi(v)] = \big[x^{(\beta)}\partial_i, \partial^\alpha(g_i)\big] = \big[x^{(\beta)}\partial_i, x^{(\delta-\beta)}\partial_j\big] =$$

$$= \binom{\delta-\alpha-\varepsilon_i+\beta}{\beta}\partial^{\alpha+\varepsilon_i-\beta}(g_j) - \binom{\delta-\alpha-\varepsilon_j+\beta}{\beta-\varepsilon_j}\partial^{\alpha+\varepsilon_j-\beta}(g_i) =$$
$$= (-1)^{|\beta|}\binom{\alpha+\varepsilon_i}{\beta}\partial^{(\alpha+\varepsilon_i-\beta)}(g_j) + (-1)^{|\beta|}\partial^{(\alpha+\varepsilon_j-\beta)}(g_i).$$

Отже, $\varphi([u,v]) = [\iota(u), \varphi(v)]$, звідки і випливає, що φ — локальний гомоморфізм з нульовим ядром.

Нехай тепер $z \in S(L)^L$. Тоді, якщо $\deg(z) \neq 0 \mod p$, то $z = d^\delta(F)$, для деякого $F \in S(L)$ (див. [9]). Встановимо, що $d^\delta(\varphi(F)) \in S(L(\mathbf{m}))^{L(\mathbf{m})}$.

Справді, з доведеного в [7] випливає, що $ad(x_i\partial_j)(F) = \delta_{i,j}F$. Оскільки $x_i\partial_j \in R_1$, а $F \in S(\mathcal{L}_0)$, то $\varphi([x_i\partial_j, F]) = \varphi(\delta_{i,j}F) = \delta_{i,j}\varphi(F)$. З іншого боку, $\varphi([x_i\partial_j, F]) = [\varepsilon(x_i\partial_j), \varphi(F)]$. З огляду на те, що підпростір $\iota(R_1)$ породжує компоненту L_0 алгебри $L(\mathbf{m})$, для елемента $\varphi(F)$ отримуємо, що $(ad(x_i\partial_j)(\varphi(F)) = \delta_{i,j}\varphi(F)$, тому $d^\delta(\varphi(F)) \in S(L(\mathbf{m}))^{L(\mathbf{m})}$.

4. Нехай $L = S_n$. Перетворимо алгебру $S_n(\mathbf{m})$ в S_n-модуль за допомогою такого відображення вкладення $\iota\colon S_n \to S_n(\mathbf{m})$, яке задається так $\iota(D_{i,j}(\alpha)) = D_{i,j}(\alpha) \in S_n(\mathbf{m})$. Дію S_n на $S_n(\mathbf{m})$ задамо очевидним способом $x \cdot y = [\iota(x), y], x \in S_n, y \in S_n(\mathbf{m})$.

Побудуємо локальний гомоморфізм алгебр S_n і $S_n(\mathbf{m})$. Нехай $u_{i,j} = D_{i,j}(\overline{\delta}) \in S_n$ і $v_{i,j} = D_{i,j}(\delta) \in S_n(\mathbf{m})$. Елементи $d^\alpha, 0 < \alpha \leq \overline{\delta}$ утворюють базис алгебри S_n. Визначимо відображення $\psi\colon S_n \to S_n(\mathbf{m})$ формулою $\psi(d^\alpha(u_{i,j})) = d^\alpha(v_{i,j})$. Виберемо підпростори R_1 і R_2 так, щоб ψ перетворилося в локальний гомоморфізм. Покладемо $R_1 = L_0 \oplus L_1$. Підпростір R_2 шукатимемо з умови виконання вимог існування локального гомоморфізму при фіксованому R_1

$$\psi(x \cdot y) = x \cdot \psi(y), \quad \text{або} \quad \psi([x,y]) = [\iota(x), \psi(y)].$$

Переконаємось в тому, що за R_2 можна взяти L_0.

Нехай $w_1 = D_{i,j}(\beta) \in S_n \subset R_1$, $w_2 = d^\alpha(u_{s,t}) \in L_0$. Знайдемо $[w_1, w_2]$

$$[w_1, w_2] = [D_{i,j}(\beta), d^\alpha(u_{s,t})] = [D_{i,j}(\beta), D_{s,t}(\overline{\delta}-\alpha)] =$$
$$= [x^{(\beta-\varepsilon_i)}\partial_j - x^{(\beta-\varepsilon_j)}\partial_i, x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_s)}\partial_t - x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_t)}\partial_s] = [x^{(\beta-\varepsilon_i)}\partial_j, x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_s)}\partial_t] -$$
$$- [x^{(\beta-\varepsilon_i)}\partial_j, x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_t)}\partial_s] - [x^{(\beta-\varepsilon_j)}\partial_i, x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_s)}\partial_t] + [x^{(\beta-\varepsilon_j)}\partial_i, x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_t)}\partial_s].$$

Очевидно, що відображення ψ є обмеженням на алгебру S_n відображення φ, визначеного в попередньому пункті для алгебри W_n. Тому

$$\psi([w_1, w_2]) = \psi([x^{(\beta-\varepsilon_i)}\partial_j, x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_s)}\partial_t]) - \psi([x^{(\beta-\varepsilon_i)}\partial_j, x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_t)}\partial_s]) -$$
$$- \psi([x^{(\beta-\varepsilon_j)}\partial_i, x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_s)}\partial_t]) + \psi([x^{(\beta-\varepsilon_j)}\partial_i, x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_t)}\partial_s]) =$$
$$= [\iota(x^{(\beta-\varepsilon_i)}\partial_j - x^{(\beta-\varepsilon_j)}\partial_i), \varphi(x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_s)}\partial_t - x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_t)}\partial_s)] = [\iota(w_1), \psi(w_2)].$$

Отже, ψ — локальний гомоморфізм.

Нехай $z \in S(S_n)^{S_n}$. Тоді, якщо $\deg(z) \neq 0 \mod p$, то $z = d^{\overline{\delta}}(F)$, для деякого $F \in S(S_n)$. Покажемо, що $d^\delta(\varphi(F)) \in S(S_n(\mathbf{m}))^{S_n(\mathbf{m})}$.

У [7] доведено, що елемент F є інваріантом максимальної підалгебри $\mathcal{L}_0$ алгебри S_n. Оскільки множина $\iota(\mathcal{L}_0)$ породжує максимальну підалгебру $\mathcal{L}_0(\mathbf{m})$ алгебри $S_n(\mathbf{m})$, то елемент $\varphi(F)$ буде інваріантом алгебри $\mathcal{L}_0(\mathbf{m})$. Тому елемент $d^\delta(\varphi(F))$ буде інваріантом алгебри $S_n(\mathbf{m})$.

5. Нехай $L = H_n$. Перетворимо алгебру $H_n(\mathbf{m})$ в H_n-модуль за допомогою відображення $\iota\colon H_n \to H_n(\mathbf{m})$, де $\iota(D(\alpha)) = D(\alpha) \in H_n(\mathbf{m})$. Дію H_n на $H_n(\mathbf{m})$ визначимо очевидним чином $x \cdot y = [\iota(x), y]$, $x \in H_n$, $y \in H_n(\mathbf{m})$. Побудуємо локальний гомоморфізм алгебр H_n і $H_n(\mathbf{m})$, чим і доведемо твердження теореми.

Нехай $u = D(\overline{\delta})$, $v = D(\delta)$. Елементи d^α, $0 < \alpha < \overline{\delta}$ утворюють базис алгебри H_n. Визначимо лінійне відображення $\varphi\colon H_n \to H_n(\mathbf{m})$ формулою $\varphi(d^\alpha(u)) = d^\alpha(u)$. Виберемо підпростори R_1 і R_2 так, щоб відображення φ перетворилося на локальний гомоморфізм. Покладемо $R_1 = L_0 \oplus L_1$. Доведемо, що за R_2 можна взяти підалгебру $\mathcal{L}_0$. Нехай $w_1 = D(\beta)$, $w_1 \in R_1$ і $w_2 = d^\alpha(u) \in R_2$. Встановимо, що $\varphi([w_1, w_2] = [\iota(w_1), \varphi(w_2)])$. Маємо

$$[w_1, w_2] = [D(\beta), d^\alpha(u)] = [D(\beta), D(\delta - \alpha)] = D\Big(\sum_i a_{i,\pi i} \partial_i (x^{(\alpha)}) \partial_{\pi i}(x^{(\overline{\delta}-\alpha)})\Big)\Big) =$$

$$= D\Big(\sum_i a_{i,\pi i} (x^{(\alpha-\varepsilon_i)})(x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_\pi)})\Big)\Big) = D\Big(\sum_i a_{i,\pi i} \binom{\overline{\delta} - \alpha - \varepsilon_i - \varepsilon_\pi + \beta}{\beta - \varepsilon_i} x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_i-\varepsilon_\pi+\beta)}\Big) =$$

$$= D\Big(\sum_i a_{i,\pi i} (-1)^{|\beta-\varepsilon_i|} \binom{\alpha + \varepsilon_\pi}{\beta - \varepsilon_i} x^{(\overline{\delta}-\alpha-\varepsilon_i-\varepsilon_\pi+\beta)}\Big) =$$

$$= \sum_i a_{i,\pi i} (-1)^{|\beta-\varepsilon_i|} \binom{\alpha + \varepsilon_\pi}{\beta - \varepsilon_i} D(\overline{\delta} - \alpha - \varepsilon_i - \varepsilon_\pi + \beta) =$$

$$= \sum_i a_{i,\pi i} (-1)^{|\beta-\varepsilon_i|} \binom{\alpha + \varepsilon_\pi}{\beta - \varepsilon_i} d^{\alpha+\varepsilon_i+\varepsilon_\pi-\beta}(u)).$$

Отже,

$$\varphi([w_1, w_2]) = \sum_i a_{i,\pi i} (-1)^{|\beta-\varepsilon_i|} \binom{\alpha + \varepsilon_\pi}{\beta - \varepsilon_i} \varphi(d^{\alpha+\varepsilon_i+\varepsilon_\pi-\beta}(u)) =$$

$$= \sum_i a_{i,\pi i} (-1)^{|\beta-\varepsilon_i|} \binom{\alpha + \varepsilon_\pi}{\beta - \varepsilon_i} d^{\alpha+\varepsilon_i+\varepsilon_\pi-\beta}(v)).$$

Подібно знаходимо

$$[\iota(w_1), \varphi(w_2)] = [D(\beta), \varphi(d^\alpha(u))] = [D(\beta), D(\overline{\delta} - \alpha)] =$$

$$= \sum_i a_{i,\pi i} (-1)^{|\beta-\varepsilon_i|} \binom{\alpha + \varepsilon_\pi}{\beta - \varepsilon_i} d^{\alpha+\varepsilon_i+\varepsilon_\pi-\beta}(v)).$$

Отже, $\varphi([w_1, w_2]) = [\iota(w_1), \varphi(w_2)]$ і φ — локальний гомоморфізм.

Нехай тепер елемент $z \in S(H_n)^{H_n}$. Тоді $z = d^{\overline{\delta}}(F)$, причому можна вважати, що $F \in S(R_1)$ Встановимо, що $d^{\overline{\delta}}(\varphi(F)) \in S(H_n(\mathbf{m}))^{H_n(\mathbf{m})}$. У [7] доведено, що елемент F є інваріантом максимальної підалгебри $\mathcal{L}_0$ алгебри H_n. Оскільки множина $\iota(\mathcal{L}_0)$ породжує максимальну підалгебру $\mathcal{L}_0(\mathbf{m})$ алгебри $H_n(\mathbf{m})$, то елемент $\varphi(F)$ є інваріантом $\mathcal{L}_0(\mathbf{m})$, і елемент $d^\delta(\varphi(F))$ є інваріантом алгебри $H_n(\mathbf{m})$.

Теорему доведено для трьох типів алгебр Лі. □

Приклад. Нехай $L = W_2$, $p = 3$. Позначимо $h_1{:=}x_1^{p-1}x_2^{p-1}\partial_1$, $h_2{:=}x_1^{p-1}x_2^{p-1}\partial_2$. Прямими обчисленнями перевіряється, що елемент $z = \partial_1^{p-1}\partial_2^{p-1}(F)$, де

$$F = h_1^2\,\partial_2(h_2)\,\partial_1(h_2) + 2\,h_2^2\partial_1(h_1)\,\partial_2(h_1) + h_2^2\,\partial_1(h_2)\,\partial_1(h_1) + h_1^2\,h_2\partial_1^2(h_1) + 2\,h_1\,h_2\,\partial_1(h_2)^2,$$

є симетричним інваріантом алгебри $L = W_2$ четвертого степеня, який складається з 118 доданків.

Локальний гомоморфізм $\varphi\colon W_2 \to W_2(m_1, m_1)$,

$$\varphi(\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}(h_i)) = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}(g_i),$$

де $g_i = x_1^{p^{m_1}-1}x_2^{p^{m_2}-1}\partial_i$, переводить елемент z в елемент $\varphi(z) = \partial_1^{p^{m_1}-1}\partial_2^{p^{m_2}-1}(\varphi(F))$,

$$\varphi(F) = g_1^2\,\partial_2(g_2)\,\partial_1(g_2) + 2\,g_2^2\partial_1(g_1)\,\partial_2(g_1) + g_2^2\,\partial_1(g_2)\,\partial_1(g_1) + g_1^2\,g_2\partial_1^2(g_1) + 2\,g_1\,g_2\,\partial_1(g_2)^2,$$

який є симетричним інваріантом алгебри $W_2(m_1, m_1)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кострикин А.И., Шафаревич И.Р. *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики*// Изв. АН СССР, сер. матем. – 1969. – Т.66. – С. 251–322.
2. Humphreys J. *Modular representations of simple Lie algebras*// Bull. Am. Math. Soc., New Ser. – 1998. – V.35, №2. – P. 105–122.
3. de Concini C., Kac V. *Representations of quantum groups at roots of 1: reduction to the exceptional case*// Int. J. Mod. Phys. A7, Suppl. 1A – 1992. – P. 141–149.
4. Ермолаев Ю.Б. *Центральный элемент универсальной обвертывающей алгебры алгебры Цассенхауса*// Изв. вузов. Матем. – 1978. – Т.12. – С. 46–59.
5. Корешков Н.А. *Об одном инварианте алгебры W_n*// Изв. вузов. Матем. – 1991. – Т.10. – С. 40–42.
6. Джумадильдаев А.С. *Обобщенные элементы Казимира*// Изв. АН СССР, сер. матем. – 1985. – Т.49, №5. – С. 1007–1017.
7. Bedratyuk L.P., Bedratyuk S.L. *Symmetrical invariants of modular Lie algebras of Cartan type*// Mat. Stud. – 2008. – V.30, №1. – P. 3–8. (in Ukrainian)
8. Крылюк Я.С. *Об индексе алгебр картановского типа в конечной характеристике*// Изв. АН СССР, сер. матем. – 1986. – Т.50, №2. – С. 393–412.
9. Бедратюк Л.П. *О симметрических инвариантах некоторых модулярных алгебр Ли*// Матем. сборник.– 1993. – Т.184, №9. – С. 149–160.
10. Бедратюк Л.П. *Структура симметрических инвариантов алгебры Ли $W_n(\mathbf{m})$*// Вестн. Москов. ун-та, сер. 1, матем., мех. – 1994. – №5. – С. 77–81.
11. Bedratyuk L.P. *Casimir elements of polynomial ring derivations*// Mat. Stud. – 2007. – V.27, №2. – P. 115–119. (in Ukrainian)

Хмельницький національний університет
leonid.uk@gmail.com

Надійшло 21.04.2009
Після переробки 22.06.2010