УДК 515.12

R. Cauty

SUR LES COMPOSANTES NON SÉPARABLES DES HYPERESPACES AVEC LA DISTANCE DE HAUSDORFF

R. Cauty. *On non-separable components of hyperspaces with the Hausdorff metric*, Mat. Stud. **35** (2011), 91–105.

Let (X, d) be a connected non compact metric space. Suppose the metric d convex and such that every closed bounded subset of X is compact. Let $\mathcal{F}(X)$ be the space of nonvoid closed subsets of X with the Hausdorff distance associated to d. We prove that every component of $\mathcal{F}(X)$ which contains an unbounded closed subset is homeomorphic to the Hilbert space $\ell^2(2^{\aleph_0})$.

Р. Коти. *О несепарабельных компонентах гиперпространств с метрикой Хаусдорфа* // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №1. – C.91–105.

Пусть (X, d) – связное некомпактное метрическое пространство. Предположим, что метрика d выпукла и каждое замкнутое ограниченное подмножество в X компактно. Через $\mathcal{F}(X)$ обозначается гиперпространство непустых замкнутых подмножеств пространства X с метрикой Хаусдорфа. Доказано, что каждая связная компонента гиперпространства $\mathcal{F}(X)$, содержащая неограниченное замкнутое подмножество, гомеоморфна гильбертовому пространству $l^2(2^{\aleph_0})$ плотности континуум.

1. Introduction. Soit (X, d) un espace métrique. Nous notons $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés non vides de X muni de la distance de Hausdorff

$$d_H(A, B) = \max\Big\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\Big\}.$$

Cette distance peut prendre la valeur ∞, mais détermine une topologie métrisable sur $\mathcal{F}(X)$, et sa restriction à chaque composante connexe de $\mathcal{F}(X)$ est finie. En outre, chaque composante connexe de $\mathcal{F}(X)$ est soit entièrement constituée d'ensembles bornés, soit entièrement constituée d'ensembles non bornés.

W. Kubiś et K. Sakai ont prouvé dans [3] que toute composante connexe non séparable de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ne contenant aucun des ensembles $\mathbb{R}$, $[0, \infty)$ et $(-\infty, 0]$ est homéomorphe à $\ell^2(2^{\aleph_0})$, et ils ont demandé si ce résultat pouvait s'étendre aux composantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ contenant l'un de ces trois ensembles, ainsi qu'aux composantes non séparables de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Le théorème suivant résout, en particulier, ces questions.

Théorème. *Soit X un espace métrique connexe non compact dont la distance d est convexe et telle que tout sous-ensemble fermé borné de X soit compact. Si $\mathcal{H}$ est une composante connexe de $\mathcal{F}(X)$ ne contenant aucun fermé borné, alors $\mathcal{H}$ est homéomorphe à $\ell^2(2^{\aleph_0})$.*

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54B20, 57N20.

Rappelons qu'une distance d est convexe si, quels que soient les points x, y de X et les réels positifs s, t vérifiant $s+t=d(x,y)$, il existe $z\in X$ tel que $d(x,z)=s$ et $d(y,z)=t$.

Pour un espace métrique (X,d) vérifiant les hypothèses du théorème, la structure de l'espace $\mathcal{F}(X)$ est entièrement déterminée. D'après le théorème A de [4], les composantes connexes de $\mathcal{F}(X)$ sont ouvertes, donc $\mathcal{F}(X)$ est somme topologique de ses composantes connexes. L'ensemble des fermés bornés de X est une composante de $\mathcal{F}(X)$, qui est homéomorphe au cube de Hilbert privé d'un point (D. Curtis [1]). L'ensemble des composantes de $\mathcal{F}(X)$ formées d'ensembles non bornés a la puissnce du continu (il ne peut y en avoir plus puisque l'ensemble des fermés de X a la puissance du continu, et l'argument utilisé dans la démonstration de la proposition 7.2 de [4] peut être adapté pour montrer qu'il n'y en a pas moins), et chacune de ces composantes est homéomorphe à $\ell^2(2^{\aleph_0})$.

2. Préliminaires. Nous notons I l'intervalle $[0,1]$.

Soit (X,d) comme dans l'énoncé du théorème. Pour $x\in X$ et $r>0$, nous notons $B(x,r)$ la d-boule ouverte de centre x et de rayon r et, pour $r\geq 0$, nous notons $\overline{B}(x,r)$ la d-boule fermée de centre x et de rayon r. Puisque d est convexe, $\overline{B}(x,r)$ est la fermeture de $B(x,r)$ pour tout $r>0$. Puisque X est connexe et non borné, $\overline{B}(x,r)$ contient des points y tels que $d(x,y)=r$, et il résulte alors facilement de la convexité de d que $d_H(\overline{B}(x,r),\overline{B}(x,s))=|r-s|$ quels que soient r et s. Puisque tout fermé borné est compact, la distance d est complète, et la convexité de d garantit que, quels que soient les points x, y de X, il existe une fonction continue $\omega\colon [0,d(x,y)]\to X$ telle que $\omega(0)=x$, $\omega(d(x,y))=y$ et $d(\omega(s),\omega(t))=|s-t|$ quels que soient s et t dans $[0,d(x,y)]$. Pour une telle distance d, il est très facile de reconnaître si deux fermés sont dans la même composante de $\mathcal{F}(X)$:

Lemme 1. *Si (X,d) est comme dans l'énoncé du théorème, alors deux fermés F_0 et F_1 de X sont dans la même composante de $\mathcal{F}(X)$ si, et seulement si, $d_H(F_0,F_1)<\infty$.*

Démonstration. Quelle que soit d, deux fermés tels que $d_H(F_0,F_1)=\infty$ ne sont jamais dans la même composante de $\mathcal{F}(X)$. Supposons que $\delta=d_H(F_0,F_1)<\infty$. Définissons des chemins ω_0, ω_1, $\hat\omega_0$ et $\hat\omega_1$ de I dans $\mathcal{F}(X)$ en posant, pour $j=0,1$ et $t\in I$, $\omega_j(t)=\{x\in X\mid d(x,F_j)\leq t\delta\}$ et $\hat\omega_j(t)=\omega_j(1)\cup\omega_{1-j}(t)$. Alors $\omega_j(0)=F_j$, $\omega_j(1)$ contient F_{1-j}, donc $\hat\omega_j(0)=\omega_j(1)$, et $\hat\omega_0(1)=\hat\omega_1(1)=\{x\in X\mid d(x,F_0\cup F_1)\leq\delta\}$, ce qui montre que F_0 et F_1 sont dans la même composante de $\mathcal{F}(X)$. □

Soit ϵ un réel positif. Nous dirons qu'un sous-ensemble E de X est ϵ-discret si $d(x,y)\geq\epsilon$ quels que soient x et y dans E. Le lemme de Zorn garantit que tout sous-ensemble ϵ-discret de X est contenu dans un sous-ensemble ϵ-discret maximal.

Nous ne ferons aucune distinction entre un complexe simplicial K et sa réalisation géométrique. Par un simplexe de K, nous entendons un simplexe fermé. Pour $n\geq 0$, nous notons $K^{(n)}$ le n-squelette de K. Si $v_0,\dots,v_q$ sont des sommets de K qui engendrent un simplexe, nous notons $[v_0,\dots,v_q]$ ce simplexe. Si σ et τ sont des simplexes de K, la notation $\sigma\leq\tau$ signifie que σ est une face de τ. Pour tout simplexe σ de K, nous notons $\overline{\mathrm{St}}\,\sigma$ l'étoile fermée de σ dans K, réunion de tous les simplexes de K contenant σ. Le barycentre du simplexe σ est noté b_σ. Nous notons K' la subdivision barycentrique de K; ses simplexes sont de la forme $[b_{\sigma_0},\dots,b_{\sigma_q}]$, où $\sigma_0\leq\cdots\leq\sigma_q$.

Pour tout espace séparé Y, nous notons 2^Y l'ensemble des compacts non vides de Y avec la topologie de Vietoris. Le lemme suivant nous sera très utile.

Lemme 2. *Soit K un complexe simplicial de dimension $k\geq 1$. Il existe une fonction continue $r\colon K\to 2^K$ vérifiant* *(i)* $r(x) = x$ *pour tout* $x \in K^{(1)}$,

(ii) pour tout simplexe σ *de* K *et tout* $x \in \sigma$, $r(x)$ *est un sous-ensemble de* $\sigma^{(1)}$ *contenant au plus* 3^{k-1} *points.*

Démonstration. Partant de l'identité r_1 de $K^{(1)}$, nous construisons inductivement la restriction r_n de r à $K^{(n)}$. Soit $n < k$, et supposons r_n construite. Si σ est un $(n+1)$-simplexe de K de bord $\dot{\sigma}$, le lemme 3.3 de [2] nous fournit une fonction continue $r_\sigma \colon \sigma \to 2^{\dot{\sigma}}$ telle que $r_\sigma(x) = x$ pour $x \in \dot{\sigma}$ et que $r_\sigma(x)$ contienne au plus trois points pour tout $x \in \sigma$. Nous pouvons alors définir r_{n+1} par $r_{n+1}(x) = r_n(x)$ pour $x \in K^{(n)}$ et $r_{n+1}(x) = r_n(r_\sigma(x))$ si x appartient au $(n+1)$-simplexe σ de K. Par récurrence, on vérifie que $r_n(x)$ contient au plus 3^{n-1} points, donc $r = r_k$ a les propriétés souhaitées. $\square$

Soit (Y, d) un espace métrique, et soit $\epsilon \colon Y \to]0,1]$ une fonction continue. Si f et g sont deux fonctions continues d'un espace Z dans Y, nous dirons que g est ϵ-proche de f si $d(f(z), g(z)) < \epsilon(f(z))$ pour tout $z \in Z$. Nous notons $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ la somme topologique d'une famille d'espaces $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$.

La caractérisation suivante de l'espace $\ell^2(2^{\aleph_0})$ est due à H. Toruńczyk ([5] et [6]).

Lemme 3. *Un espace métrique* (Y, d) *est homéomorphe à* $\ell^2(2^{\aleph_0})$ *si, et seulement si, c'est un rétracte absolu topologiquement complet vérifiant les deux conditions suivantes.*

(A) Soit A *un ensemble discret de cardinal* $2^{\aleph_0}$. *Si* $f \colon [0,1]^n \times A \to Y$, $n \geq 0$, *et* $\epsilon \colon Y \to]0,1]$ *sont des fonctions continues, il existe une fonction continue* $g \colon [0,1]^n \times A \to Y$ *qui est* ϵ*-proche de* f *et telle que la famille* $\{g([0,1]^n \times \{\alpha\}) \mid \alpha \in A\}$ *soit discrète dans* Y.

(B) Si $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ *est une suite de complexes simpliciaux de dimension finie ayant au plus* $2^{\aleph_0}$ *sommets, et si* $f \colon \bigoplus_{n=1}^\infty K_n \to Y$ *et* $\epsilon \colon Y \to]0,1]$ *sont des fonctions continues, il existe une fonction continue* $g \colon \bigoplus_{n=1}^\infty K_n \to Y$ *qui est* ϵ*-proche de* f *et telle que la famille* $\{g(K_n) \mid n \geq 1\}$ *soit discrète dans* Y.

Nous utiliserons aussi le fait que si N est un ensemble infini dénombrable, alors N contient une famille $(N_\alpha)_{\alpha \in A}$ de sous-ensembles ayant la puissance du continu et telle que $N_\alpha \setminus N_\beta$ soit infini si α et β sont des éléments distincts de A (identifiant N à $\mathbb{Q}$, il suffit de remarquer que si N_x est une suite de rationnels deux à deux distincts convergeant vers le réel x, alors $N_x \cap N_y$ est fini si $x \neq y$).

Si $\mathcal{W}$ est un recouvrement d'un espace X et A un sous-ensemble de X, nous notons $\mathrm{St}(A, \mathcal{W})$ la réunion des éléments de $\mathcal{W}$ rencontrant A, et nous définissons inductivement les recouvrements $\mathrm{St}^n(\mathcal{W})$ par $\mathrm{St}^0(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ et $\mathrm{St}^{n+1}(\mathcal{W}) = \{\mathrm{St}(W, \mathrm{St}^n(\mathcal{W})) \mid W \in \mathcal{W}\}$. Pour $n \geq 1$, nous posons $\mathrm{St}^n(A, \mathcal{W}) = \{\mathrm{St}(A, \mathrm{St}^{n-1}(\mathcal{W}))\}$.

3. Démonstration du théorème. La distance d étant complète, il en est de même de d_H, donc $(\mathcal{H}, d_H)$ est complet. D'après le théorème A de [4], $\mathcal{H}$ est un rétracte absolu. Il ne reste donc plus qu'à vérifier les conditions (A) et (B) de la caractérisation de Toruńczyk, qui résultent du lemme suivant.

Lemme 4. *Soit* A *un ensemble de cardinal* $2^{\aleph_0}$ *et, pour tout* $\alpha \in A$, *soit* K_α *un complexe simplicial de dimension finie. Si* $f \colon \bigoplus_{\alpha \in A} K_\alpha \to \mathcal{H}$ *et* $\epsilon \colon \mathcal{H} \to]0,1]$ *sont des fonctions continues, il existe une fonction continue* $g \colon \bigoplus_{\alpha \in A} K_\alpha \to \mathcal{H}$ *qui est* ϵ*-proche de* f *et telle que la famille* $\{g(K_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ *soit discrète dans* $\mathcal{H}$.

Démonstration. Nous notons N_0 (resp. N_1) l'ensemble des entiers pairs (resp. impairs) ≥ 0. Pour tout entier $p \geq 0$, soit $\mathfrak{t}_p = \{6p+1, 6p+3, 6p+5\}$, et soit $\mathfrak{T} = \{\mathfrak{t}_p \mid p \geq 0\}$. Soit $(\mathfrak{T}_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous-ensembles de $\mathfrak{T}$ telle que $\mathfrak{T}_\alpha \setminus \mathfrak{T}_\beta$ soit infini pour tout couple ordonné (α, β) d'éléments distincts de A. Posons $N_\alpha = \bigcup \mathfrak{T}_\alpha \subset N_1$. Pour tout couple ordonné (α, β) d'éléments distincts de A, il existe alors une infinité d'entiers $p \geq 0$ tels que $\{6p+1, 6p+3, 6p+5\} \subset N_\alpha \setminus N_\beta$.

Construisons inductivement des sous-ensembles $E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset X$ de façon que E_m soit un sous-ensemble 4^{-m}-discret maximal de X. Pour tout couple (a, b) de points de $E = \bigcup_{m=0}^\infty E_m$, fixons un arc $J(a, b) \subset X$ d'extrémités a et b isométrique à $[0, d(a, b)]$, et soit $\xi(a, b)$ une isométrie de $[0, d(a, b)]$ sur $J(a, b)$ telle que $\xi(a, b)(0) = a$ (donc $\xi(b, a)(t) = \xi(a, b)(d(a, b) - t)$).

Affirmation 1. *Pour tout $m \geq 0$ et tout $x \in E_m$, il existe $y \in E_{m+1} \setminus E_m$ tel que $d(x, y) \leq 2 \cdot 4^{-(m+1)}$.*

Démonstration. Puisque X est connexe et non borné, il existe, pour tout entier $p \geq 1$ un point x_p de X tel que $d(x, x_p) = 4^{-(m+1)} + \frac{1}{p}$. D'après la maximalité de E_{m+1}, il existe $y_p \in E_{m+1}$ tel que $d(x_p, y_p) < 4^{-(m+1)}$. Alors $d(x, y_p) \geq d(x, x_p) - d(x_p, y_p) > \frac{1}{p}$, donc $y_p \neq x$. Si x' est un point de E_m distinct de x, alors, si $\frac{1}{p} < 4^{-(m+1)}$,

$$d(x', y_p) \geq d(x', x) - d(x, x_p) - d(x_p, y_p) \geq 4^{-m} - (2 \cdot 4^{-(m+1)} + 1/p) > 0,$$

donc $x' \neq y_p$. Le point y_p est donc dans $E_{m+1} \setminus E_m$. D'autre part,

$$d(x, y_p) \leq d(x, x_p) + d(x_p, y_p) < 2 \cdot 4^{(m+1)} + 1/p,$$

et, comme la boule $B(x, 4^{-m})$ ne contient qu'un nombre fini de points de E_{m+1}, il existe y tel que $y = y_p$ pour une infinité de p. Ce point y a les propriétés souhaitées. $\square$

Pour tout $m \geq 0$ et tout $x \in E_m \setminus E_{m-1}$ ($E_{-1} = \varnothing$), fixons une fois pour toutes un point $b_m(x) \in E_{m+1} \setminus E_m$ tel que $d(x, b_m(x)) \leq 2 \cdot 4^{-(m+1)}$; puisque x et $b_m(x)$ sont dans E_{m+1}, nous avons aussi $d(x, b_m(x)) \geq 4^{-(m+1)}$.

Prenons un recouvrement ouvert localement fini $\mathcal{W}$ de $\mathcal{H}$ dont tous les éléments W vérifient

$$d_H\text{-}\operatorname{diam} W < 1 \tag{1}$$

$$\epsilon_W = \sup\{\epsilon(H) \mid H \in W\} \leq 2 \inf\{\epsilon(H) \mid H \in W\}. \tag{2}$$

Fixons un point p_0 de X et définissons $\delta\colon X \to \mathbb{R}$ par $\delta(x) = d(p_0, x)$. Partant de $\gamma_0 \equiv 0$, nous construirons inductivement une suite (γ_n) de fonctions continues de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $W \in \mathcal{W}$, nous poserons $\gamma_n^+(W) = \sup\{\gamma_n(H) \mid H \in W\}$. Les fonctions γ_n devront vérifier, pour tout $W \in \mathcal{W}$ et $H \in W$,

$$\gamma_{n+1}(H) \geq \gamma_n^+(W) + 6\epsilon_W \tag{3}$$

$$H \cap \delta^{-1}(]\gamma_n^+(W) + 2\epsilon_W, \gamma_{n+1}(H) - 2\epsilon_W[) \neq \varnothing. \tag{4}$$

Supposons γ_n construite de façon que sa restriction à $\operatorname{St}^m(W, \mathcal{W})$ soit majorée quels que soient $W \in \mathcal{W}$ et $m \geq 1$. Pour $W \in \mathcal{W}$, posons $\hat{\gamma}_W = \sup\{\gamma_n(H) \mid H \in \operatorname{St}(W, \mathcal{W})\}$, et fixons un point $F_W \in W$. Puisque F_W n'est pas borné, l'ensemble $F_W \cap \delta^{-1}([\hat{\gamma}_W + 3, \infty))$ n'est pas vide. Fixons un point $x_W \in F_W$ tel que $\delta(x_W) = \min \delta(F_W \cap \delta^{-1}([\hat{\gamma}_W + 3, \infty))$.

Soit $(\lambda_W)_{W\in\mathcal{W}}$ une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{W}$. Définissons la fonction continue $\gamma_{n+1}\colon \mathcal{H}\to\mathbb{R}$ par
$$\gamma_{n+1}(H)=\sum_{W\in\mathcal{W}}\lambda_W(H)(\delta(x_W)+3).$$

Soient $W\in\mathcal{W}$ et H un point de W. Soient $W_1,\dots,W_q$ les ensembles tels que $\lambda_W(H)\neq 0$, numérotés de façon que $\delta(x_{W_1})\leq\cdots\leq\delta(x_{W_q})$; alors $\gamma_{n+1}(H)\geq\delta(x_{W_1})+3$. Comme $W\cap W_1\neq\varnothing$, nous avons $\hat\gamma_{W_1}\geq\gamma_n^+(W)$ et, puisque $\epsilon(\mathcal{H})$ est contenu dans $]0,1]$, nous obtenons
$$\gamma_{n+1}(H)\geq\delta(x_{W_1})+3\geq\hat\gamma_{W_1}+6\geq\gamma_n^+(W)+6\geq\gamma_n^+(W)+6\epsilon_W,$$
donc (3) est vérifiée. D'après (1), $d_H(H,F_{W_1})<1$, donc il existe $x\in H$ tel que $d(x,x_{W_1})<1$. Alors $|\delta(x)-\delta(x_{W_1})|<1$, donc $\delta(x)$ appartient à $[\delta(x_{W_1})-1,\delta(x_{W_1})+1]$ et, puisque
$$\gamma_n^+(W)+2\epsilon_W\leq\hat\gamma_{W_1}+2\leq\delta(x_{W_1})-1<\delta(x_{W_1})+1\leq\gamma_{n+1}(H)-2,$$
la condition (4) est aussi vérifiée.

Soient $W\in\mathcal{W}$ et $m\geq 1$. Puisque γ_n est majorée sur $\mathrm{St}^{m+2}(W,\mathcal{W})$, il existe M tel que $\gamma_n(H)<M$ pour tout $H\in\mathrm{St}^{m+2}(W,\mathcal{W})$. Soit W' un élément de $\mathcal{W}$ contenu dans $\mathrm{St}^m(W,\mathcal{W})$. Si H appartient à W', alors $\gamma_{n+1}(H)\leq\max\{\delta(x_{W''})+3\}$, où W'' parcourt les éléments de $\mathcal{W}$ tels que $W'\cap W''\neq\varnothing$. Pour prouver que γ_{n+1} est majorée sur $\mathrm{St}^m(W,\mathcal{W})$, il suffit donc de montrer qu'il existe M' tel que $\delta(x_{W''})<M'$ pour tout $W''\in\mathcal{W}$ tel que $W''\cap\mathrm{St}^m(W,\mathcal{W})\neq\varnothing$.

Si $W''\cap\mathrm{St}^m(W,\mathcal{W})\neq\varnothing$, alors $\mathrm{St}(W'',\mathcal{W})$ est contenu dans $\mathrm{St}^{m+2}(W,\mathcal{W})$, donc $\hat\gamma_{W''}\leq M$. Puisque F_W n'est pas borné, il contient un point y_W tel que $\delta(y_W)>M+m+5$. Il résulte de (1) que $d_H(H,H_W)<m+2$ pour tout $H\in\mathrm{St}^{m+1}(W,\mathcal{W})$, donc $H_{W''}$ contient un point y tel que $d(y,y_W)<m+2$. Mais alors $\hat\gamma_{W''}+3\leq M+3<\delta(y_W)-(m+2)<\delta(y)$, et, par définition de $x_{W''}$, nous avons $\delta(x_{W''})\leq\delta(y)<\delta(y_W)+m+2$ pour tout $W''\in\mathcal{W}$ tel que $W''\cap\mathrm{St}(W,\mathcal{W})\neq\varnothing$.

Posons $K=\bigoplus_{\alpha\in A}K_\alpha$. Pour $\alpha\in A$, nous notons k_α la dimension de K_α. Fixons une triangulation $\mathcal{T}$ du complexe K suffisamment fine pour que, pour tout simplexe σ de $\mathcal{T}$,
$$\text{il existe } W_\sigma\in\mathcal{W} \text{ tel que } f(\overline{\mathrm{St}}\,\sigma)\subset W_\sigma \tag{5}$$
$$d_H\text{-}\operatorname{diam}(f(\overline{\mathrm{St}}\,\sigma))<\frac{1}{18}\inf\{\epsilon(f(x))\mid x\in\overline{\mathrm{St}}\,\sigma\}. \tag{6}$$

Il résulte de (5) et (2) que
$$\sup\{\epsilon(f(x))\mid x\in\overline{\mathrm{St}}\,\sigma\}\leq 2\inf\{\epsilon(f(x))\mid x\in\overline{\mathrm{St}}\,\sigma\}. \tag{7}$$

Pour tout simplexe σ de $\mathcal{T}$, nous notons α_σ l'élément de A tel que K_{α_σ} contienne σ et $k_\sigma=k_{\alpha_\sigma}$. Posons $\epsilon_\sigma=\inf\{\epsilon(f(x))\mid x\in\overline{\mathrm{St}}\,\sigma\}/18$, et soit m_σ le plus petit entier tel que $4^{-m_\sigma}\leq\epsilon_\sigma$. Si σ est une face de τ, alors $\overline{\mathrm{St}}\,\tau\subset\overline{\mathrm{St}}\,\sigma$, et il résulte de (7) que
$$\epsilon_\sigma\leq\epsilon_\tau\leq 2\epsilon_\sigma \text{ et } m_\tau\leq m_\sigma\leq m_\tau+1. \tag{8}$$

Posons $F'_\sigma=\{x\in E_{m_\sigma}\mid d(x,f(b_\sigma))\leq 4^{-m_\sigma}\}$, $F''_\sigma=\{x\in E_{m_\sigma}\setminus E_{m_\sigma-1}\mid d(x,f(b_\sigma))\leq 3\cdot 4^{-m_\sigma}\}$ et
$$F_\sigma=\bigcup_{\sigma\leq\tau}F'_\tau\cup F''_\tau.$$

Il résulte de (8) que F_σ est contenu dans E_{m_σ}. Puisque E_{m_σ} est un sous-ensemble 4^{-m_σ}-discret maximal de X, il existe, pour tout $y \in f(b_\sigma)$, un point x de E_{m_σ} tel que $d(x,y) \leq 4^{-m_\sigma} \leq \epsilon_\sigma$, et ce point x est dans F'_σ. Inversement, si x appartient à F_σ, et si τ est un simplexe tel que $\sigma \leq \tau$ et $d(x, f(b_\tau)) \leq 3.4^{-m_\tau}$, alors, d'après (6) et (8), $d(x, f(b_\sigma)) \leq d(x, f(b_\tau)) + d_H(f(b_\tau), f(b_\sigma)) \leq 3\epsilon_\tau + \epsilon_\sigma \leq 7\epsilon_\sigma$. Ce qui précède montre que

$$d_H(f(b_\sigma), F_\sigma) \leq 7\epsilon_\sigma. \tag{9}$$

Pour $n \geq 0$, posons

$$\widetilde{F}^n_\sigma = (F'_\sigma \cup F''_\sigma) \cap \delta^{-1}(]\gamma_n(f(b_\sigma)) + \frac{3}{2}\epsilon(f(b_\sigma))), \gamma_{n+1}(f(b_\sigma)) - \frac{3}{2}\epsilon(f(b_\sigma))[), \quad F^n_\sigma = \bigcup_{\sigma \leq \tau} \widetilde{F}^n_\tau,$$

et soit $F^*_\sigma = \cup\{F^n_\sigma \mid n \in N_{\alpha_\sigma}\}$.

D'après (4), $f(b_\sigma) \cap \delta^{-1}(]\gamma_n(f(b_\sigma)) + 2\epsilon(f(b_\sigma)), \gamma_{n+1}(f(b_\sigma)) - 2\epsilon(f(b_\sigma))[)$ contient un point y, et il existe $x \in F'_\sigma$ tel que $d(x,y) \leq 4^{-m_\sigma} < \frac{1}{2}\epsilon(f(b_\sigma))$; si $x \in E_{m_\sigma - 1}$, l'affirmation 1 nous fournit un $x' \in E_{m_\sigma} \setminus E_{m_\sigma-1}$ tel que $d(x,x') \leq 2 \cdot 4^{-m_\sigma}$. Alors x' appartient à F''_σ et $d(y,x') \leq 3 \cdot 4^{-m_\sigma}$. Comme $3 \cdot 4^{-m_\sigma} \leq 3\epsilon_\sigma < \frac{1}{2}\epsilon(f(b_\sigma))$, cela montre que $\widetilde{F}^n_\sigma \cap (E_{m_\sigma} \setminus E_{m_\sigma-1}) \neq \varnothing$. Etant borné et contenu dans l'ensemble discret E_{m_σ}, F^n_σ est fini. Par définition, si $\sigma \leq \sigma'$, alors $F^n_{\sigma'} \subset F^n_\sigma$ pour tout n.

Affirmation 2. *Si $n+1 < m$, alors $\delta(x) < \delta(x')$ quels que soient $x \in F^n_\sigma$ et $x' \in F^m_\sigma$.*

Démonstration. Soient τ et τ' des simplexes tels que $\sigma \leq \tau$, $\sigma \leq \tau'$, $x \in \widetilde{F}^n_\tau$ et $x' \in \widetilde{F}^m_{\tau'}$. D'après (5), W_σ contient $f(b_\tau)$ et $f(b_{\tau'})$. En utilisant (3), nous avons

$$\delta(x) < \gamma_{n+1}(f(b_\tau)) \leq \gamma^+_{n+1}(W_\sigma) < \gamma_{n+2}(f(b_{\tau'})) \leq \gamma_m(f(b_{\tau'})) < \delta(x').$$

□

Pour tout $n \in N_0$, fixons un point $c^n_\sigma \in \widetilde{F}^n_\sigma \cap (E_{m_\sigma} \setminus E_{m_\sigma-1})$. Soit $\mathcal{C}^n_\sigma$ l'ensemble des couples (a,b) de points distincts de $E_{m_\sigma+1}$ tels que $d(a,b) < 9\epsilon_\sigma$ et que $d(c^n_\sigma, J(a,b)) \leq 4^{-(m_\sigma+3)}$. L'ensemble $\mathcal{C}^n_\sigma$ est fini puisque tous ces points a et b sont contenus dans le compact $\overline{B}(c^n_\sigma, 9\epsilon_\sigma + 4^{-(m_\sigma+3)})$ et que $E_{m_\sigma+1}$ est discret. Pour chaque couple $(a,b) \in \mathcal{C}^n_\sigma$, fixons des points $u^+(a,b)$ et $u^-(a,b)$ dans $J(a,b)$ tels que $d(c^n_\sigma, u^\pm(a,b)) = 4^{-(m_\sigma+3)}$ et que $J(a,b) \setminus [u^+(a,b), u^-(a,b)]$ ne contienne aucun point x tel que $d(c^n_\sigma, x) = 4^{-(m_\sigma+3)}$, où $[u^+(a,b), u^-(a,b)]$ est le sous-arc de $J(a,b)$ d'extrémités $u^\pm(a,b)$ (ces deux points $u^\pm(a,b)$ peuvent coïncider, ce qui est en particulier le cas quand c^n_σ est l'un des points a ou b). Soit $U^n_\sigma(0)$ l'ensemble (fini) des points de la forme $u^\pm(a,b)$, où (a,b) parcourt $\mathcal{C}^n_\sigma$.

Posons $b^n_\sigma = b_{m_\sigma}(c^n_\sigma)$, $J^n_\sigma = J(c^n_\sigma, b^n_\sigma)$ et $\xi^n_\sigma = \xi(c^n_\sigma, b^n_\sigma) \colon [0, d(c^n_\sigma, b^n_\sigma)] \to J^n_\sigma$. Puisque $d(c^n_\sigma, b^n_\sigma) \leq 2.4^{-(m_\sigma+1)}$, le couple (c^n_σ, b^n_σ) appartient à $\mathcal{C}^n_\sigma$, donc $\xi^n_\sigma(4^{-(m_\sigma+3)})$ appartient à $U^n_\sigma(0)$. Posons $U^n_\sigma(1) = \{\xi^n_\sigma(\frac{1}{2} \cdot 4^{-(m_\sigma+3)})\}$ et

$$U^n_\sigma(2) = \begin{cases} \{\xi^n_\sigma(\frac{4}{6} \cdot 4^{-(m_\sigma+3)})\} & \text{si } n = 4p \\ \varnothing & \text{si } n = 4p+2 \end{cases}$$

$$U^n_\sigma(3) = \begin{cases} \{\xi^n_\sigma(\frac{5}{6} \cdot 4^{-(m_\sigma+3)})\} & \text{si } n \leq 2k_\sigma \\ \varnothing & \text{si } n > 2k_\sigma, \end{cases}$$

et soit $U^n_\sigma = \bigcup_{j=0}^3 U^n_\sigma(j)$.

Posons $C_\sigma = \{c^n_{\sigma'} \mid \sigma \le \sigma' \text{ et } n \in N_0\}$.

Remarque. Pour $x = c^n_{\sigma'} \in C_\sigma$, l'ensemble $U^n_{\sigma'}$ ne dépend que de x, et pas du simplexe σ' tel que $\sigma \le \sigma'$ et $x = c^n_{\sigma'}$. En effet, si σ'' est un autre simplexe tel que $\sigma \le \sigma''$ et $x = c^{n'}_{\sigma''}$, alors le choix des c^n_σ garantit que $m_{\sigma'} = m_{\sigma''}$, donc $U^n_{\sigma'}(j) = U^{n'}_{\sigma''}(j)$ pour $j = 0, 1$. Puisque n et n' sont pairs, l'affirmation 2 entraîne $n = n'$, donc $U^n_{\sigma'}(2) = U^{n'}_{\sigma''}(2)$. Enfin, σ' et σ'' étant contenus dans le même complexe K_α, nous avons $k_{\sigma'} = k_{\sigma''}$, donc $U^n_{\sigma'}(3) = U^{n'}_{\sigma''}(3)$.

Pour $x \in F_\sigma$, définissons un nombre $\eta_\sigma(x) > 0$ par

$$\eta_\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C_\sigma \\ 4^{-(m_\sigma+4)} & \text{si } x \in \bigcup_{n \in N_{\alpha_\sigma}} F^n_\sigma \\ 4^{-(m_\sigma+6)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque F_σ est contenu dans E_{m_σ}, les boules fermées $\overline{B}(x, \eta(x))$, $x \in F_\sigma$, sont deux à deux disjointes. En outre, il résulte de (8) que si $\sigma \le \sigma'$, alors $m_{\sigma'} \le m_\sigma \le m_{\sigma'} + 1$, donc $\overline{B}(x, \eta_\sigma(x)) \cap U^n_{\sigma'} = \varnothing$ si $\sigma \le \sigma'$ et $c^n_{\sigma'} \ne x \in F_\sigma$.

Pour tout simplexe σ de K, posons

$$g(b_\sigma) = \Big(\bigcup_{x \in F_\sigma} \overline{B}(x, \eta_\sigma(x))\Big) \cup \Big(\bigcup_{n \in N_0} \bigcup_{\sigma \le \sigma'} U^n_{\sigma'}\Big).$$

Cet ensemble est réunion de deux familles localement finies de compacts, donc est fermé. Pour $\sigma \le \sigma'$, $U^n_{\sigma'}$ est contenu dans $\overline{B}(c^n_{\sigma'}, 4^{-(m_{\sigma'}+3)})$. La condition (8) entraîne que $m_{\sigma'} \ge m_\sigma - 1$, donc nous avons $d(y, F_\sigma) \le 4^{-(m_\sigma+2)}$ pour tout $y \in g(b_\sigma)$. Comme $g(b_\sigma)$ contient F_σ, il en résulte que

$$d_H(g(b_\sigma), F_\sigma) \le 4^{-(m_\sigma+2)} \le \epsilon_\sigma/16. \tag{10}$$

Soient $\sigma_0 \le \sigma_1$ des simplexes de K. Par construction, F_{σ_1} est contenu dans F_{σ_0} et C_{σ_1} est contenu dans C_{σ_0}. Outre l'inclusion propre de F_{σ_1} dans F_{σ_0}, les différences possibles entre $g(b_{\sigma_0})$ et $g(b_{\sigma_1})$ sont les suivantes:

a) un point peut appartenir à C_{σ_0} et à $F_{\sigma_1} \setminus C_{\sigma_1}$,

b) si $m_{\sigma_0} \ne m_{\sigma_1}$, auquel cas $m_{\sigma_1} = m_{\sigma_0} - 1$, alors $\eta_{\sigma_0}(x) \ne \eta_{\sigma_1}(x)$ pour $x \in F_{\sigma_1} \setminus C_{\sigma_1}$.

Pour définir la restriction de g au 1-simplexe $[b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}]$ de K', nous construirons, pour tout $x \in F_{\sigma_0}$, un chemin $\zeta_x \colon I \to 2^X$ de façon que $\zeta_x(0) = \overline{B}(x, \eta_{\sigma_0}(x))$ si $x \in F_{\sigma_0} \setminus C_{\sigma_0}$, $\zeta_x(0) = \{c^n_\sigma\} \cup U^n_\sigma$ si $x = c^n_\sigma \in C_{\sigma_0}$, $\zeta_x(1) \subset g(b_{\sigma_1})$, $\zeta_x(1) = \overline{B}(x, \eta_{\sigma_1}(x))$ si $x \in F_{\sigma_1} \setminus C_{\sigma_1}$ et $\zeta_x(1) = \{c^n_\sigma\} \cup U^n_\sigma$ si $x = c^n_\sigma \in C_{\sigma_1}$. Nous poserons alors, pour $y = (1-t)b_{\sigma_0} + tb_{\sigma_1} \in [b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}]$,

$$g(y) = \bigcup_{x \in F_{\sigma_0}} \zeta_x(t).$$

Les conditions imposées aux ζ_x garantissent que cette définition redonne $g(b_{\sigma_i})$ quand $y = b_{\sigma_i}$. Pour obtenir ces chemins ζ_x, nous avons besoin de quelques constructions auxiliaires.

Pour $i = 0, 1$ et $x \in F_{\sigma_i} \setminus C_{\sigma_i}$, définissons $\psi^i_x \colon I \to 2^X$ par $\psi^i_x(t) = \overline{B}(x, (1-t)\eta_{\sigma_i}(x))$, de sorte que $\psi^i_x(0) = \overline{B}(x, \eta_{\sigma_i}(x))$ et $\psi^i_x(1) = \{x\}$. Si $x = c^n_\sigma \in C_{\sigma_0}$, prenons, pour tout point u de l'ensemble fini U^n_σ, un chemin $\varphi_u \colon I \to X$ tel que $\varphi_u(0) = u$, $\varphi_u(1) = x$ et $d(\varphi_u(s), \varphi_u(t)) = |s-t| d(x, u)$, et définissons $\psi^0_x \colon I \to 2^X$ par $\psi^0_x(t) = \{x\} \cup \{\varphi_u(t) \mid u \in U^n_\sigma\}$.

Alors $\psi_x(0) = \{c^n_\sigma\} \cup U^n_\sigma$ et $\psi_x(1) = \{x\}$. Pour $x \in F_{\sigma_i} \setminus C_{\sigma_i}$, nous avons $\eta_{\sigma_i}(x) \le 4^{-(m_{\sigma_i}+4)} \le 4^{-(m_{\sigma_0}+3)}$. Si $x = c^n_\sigma \in C_{\sigma_0}$, alors $m_\sigma \ge m_{\sigma_0} - 1$, donc $d(x, u) \le 4^{-(m_\sigma+3)} \le 4^{-(m_{\sigma_0}+2)}$ pour tout $u \in U^n_\sigma$. Il en résulte facilement que ces chemins ψ^i_x vérifient

$$d_H(\psi^i_x(s), \psi^i_x(t)) \le 4^{-(m_{\sigma_0}+2)} |s-t| \qquad \forall s, t \in I. \tag{11}$$

Si x est un point de $F_{\sigma_0} \setminus F_{\sigma_1}$, il existe un simplexe τ et un point y_1 de $\overline{f(b_\tau)}$ tels que $\sigma_0 \le \tau$ et $d(x, y_1) \le 3 \cdot 4^{-m_\tau} \le 3\epsilon_\tau$. Les simplexes σ_1 et τ sont contenus dans $\overline{\mathrm{St}}\,\sigma_0$, donc $d_H(f(b_\tau), f(b_{\sigma_1})) < \epsilon_{\sigma_0}$, et il existe $y_2 \in f(b_{\sigma_1})$ tel que $d(y_1, y_2) < \epsilon_{\sigma_0}$. Enfin, il existe $y_3 \in F'_{\sigma_1} \subset F_{\sigma_1}$ tel que $d(y_2, y_3) \le 4^{-m_{\sigma_1}} \le \epsilon_{\sigma_1}$, d'où, en utilisant (8), $d(x, F_{\sigma_1}) \le d(x, y_3) < 3\epsilon_\tau + \epsilon_{\sigma_0} + \epsilon_{\sigma_1} \le 9\epsilon_{\sigma_0}$.

Pour tout $x \in F_{\sigma_0} \setminus F_{\sigma_1}$, fixons un point $x'_x \in F_{\sigma_1}$ tel que $d(x, x'_x)$ soit minimale, et soit $\widehat{J}_x$ le sous-arc de $J(x, x'_x)$ irréductible entre x et $F_{\sigma_1} \cup (\bigcup_{n\in N_0} \bigcup_{\sigma_1 \le \sigma'} U^n_{\sigma'})$. Nous avons alors

$$\operatorname{diam} \widehat{J}_x \le \operatorname{diam} J(x, x'_x) < 9\epsilon_{\sigma_0}. \tag{12}$$

Notons $\hat{x}_x$, ou simplement $\hat{x}$, l'extrémité de $\widehat{J}_x$ distincte de x, et soit $\hat{\xi}_x \colon I \to \widehat{J}_x$ une fonction telle que $\hat{\xi}_x(0) = x$, $\hat{\xi}_x(1) = \hat{x}$ et $d(\hat{\xi}(s), \hat{\xi}(t)) = |s - t| d(x, \hat{x})$ quels que soient s et t.

Soit $\mathcal{E}_x = \{z \in E_{m_{\sigma_0}+1} \mid d(z, \widehat{J}_x) \le 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}\}$. Si z_1, z_2 appartiennent à $\mathcal{E}_x$ et si y_1, y_2 sont des points de $\widehat{J}_x$ tels que $d(y_i, z_i) \le 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$, alors

$$d(y_1, y_2) \ge d(z_1, z_2) - d(y_1, z_1) - d(y_2, z_2) \ge 4^{-(m_{\sigma_0}+1)} - 2 \cdot 4^{-(m_{\sigma_0}+4)} = 4^{-(m_{\sigma_0}+1)}(1 - 2 \cdot 4^{-3}).$$

Par définition de m_{σ_0}, nous avons $\epsilon_{\sigma_0} < 4^{-(m_{\sigma_0}-1)}$, et il résulte de (12) que $\mathcal{E}_x$ contient au plus $9 \cdot 4^{-(m_{\sigma_0}-1)}/4^{-(m_{\sigma_0}+1)}(1 - 2 \cdot 4^{-3}) < 4^4$ points. Soient $x = x_0, x_1, \ldots, x_{q-1}$ les éléments de $\mathcal{E}_x$ distincts de $\hat{x}$, numérotés dans l'ordre de x à $\hat{x}$; posons $x_q = \hat{x}$. Pour $0 < i < q$, soit x_i^- (resp. x_i^+) le premier (resp. dernier) point de $\overline{B}(x_i, 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}) \cap \widehat{J}_x$ dans l'ordre de x à $\hat{x}$. Soit x_0^+ le point de $\widehat{J}_x$ tel que $d(x, x_0^+) = 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$. Si $\hat{x}$ appartient à F_{σ_1}, nous notons x_q^- le point de $\widehat{J}_x$ tel que $d(x_q^-, \hat{x}) = 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$; si $\hat{x}$ n'appartient pas à F_{σ_1}, nous posons $x_q^- = \hat{x}$. Alors, pour $0 \le i < j \le q$, x_i^+ précède x_j^- dans l'ordre de x à $\hat{x}$. Pour chacun des points $x_i^\pm$ ainsi définis, prenons une fonction $\kappa^\pm_{x,i} \colon [0, 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}] \to X$ telle que $\kappa^\pm_{x,i}(0) = x_i$ et $\kappa^\pm_{x,i}(4^{-(m_{\sigma_0}+4)}) = x_i^\pm$. Si $x_i^\pm \ne \hat{x}$, $\kappa^\pm_{x,i}$ est une isométrie de $[0, 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}]$ sur un arc d'extrémités x_i et $x_i^\pm$, et si $x_q^- = \hat{x}$, $\kappa^-_{x,q}(t) = \hat{x}$ pour tout t. Nous notons $v_i^\pm$ l'élément de I tel que $\hat{\xi}(v_i^\pm) = x_i^\pm$.

Pour $0 \le i \le 4^4$, soit $t_i = i \cdot 4^4$. Pour $0 \le i < 4^4$, soit $t_i^+ = t_i + 4^{-5}$, et pour $0 < i \le 4^4$, soit $t_i^- = t_i - 4^{-5}$, de sorte que $t_{i+1}^- - t_i^+ = \frac{1}{2}4^{-4}$. Définissons une fonction $\chi_x \colon I \to 2^X$ comme suit:

$$\chi_x(t) = \begin{cases} \{\kappa^+_{x,i}(4^{-m_{\sigma_0}+1}s)\} & \text{si } t = t_i + s \in [t_i, t_i^+] \quad 0 \le i < q \\ \{\kappa^-_{x,i}(4^{-m_{\sigma_0}+1}s)\} & \text{si } t = t_i - s \in [t_i^-, t_i] \quad 0 < i \le q \end{cases}$$

Pour $t = t_i^+ + s(t_{i+1}^- - t_i^+)$ avec $i < q$, posons

$$\chi_x(t) = \begin{cases} \hat{\xi}_x([v_i^+, v_i^+ + 2s(v_{i+1}^- - v_i^+)]) & \text{si } 0 \le s \le 1/2 \\ \hat{\xi}_x([2(1-s)v_i^+ + (2s-1)v_{i+1}^-, v_{i+1}^-]) & \text{si } 1/2 \le s \le 1 \end{cases}.$$

Enfin, nous posons $\chi_x(t) = \{\hat{x}\}$ pour $t \ge t_q$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que χ_x est bien défini. Par construction, $\chi_x(0) = \{x\}$ et $\chi_x(1) = \{\hat{x}\}$. Pour $t, t' \in I$, nous avons

$$d_H(\chi_x(t), \chi_x(t')) < 4^5 \cdot 9\epsilon_{\sigma_0}|t - t'|. \tag{13}$$

Il suffit de vérifier cette inégalité quand t et t' appartiennent tous deux à l'un des intervalles utilisés dans la définition de χ_x. Si t et t' appartiennent à un intervalle $[t_i, t_i^+]$ ou $[t_i^-, t_i]$ sur lequel χ_x n'est pas constante, alors $d_H(\chi_x(t), \chi_x(t')) = 4^{-m_{\sigma_0}+1}|t - t'| \le 4\epsilon_{\sigma_0}|t - t'|$

puisque $\kappa_i^\pm$ est une isométrie. Si $t = t_i^+ + s(t_{i+1}^- - t_i^+)$ et $t' = t_i^+ + s'(t_{i+1}^- - t_i^+)$ avec $0 \le s, s' \le 1/2$ et $i < q$, alors, puisque $t_{i+1}^- - t_i^+ = \frac{1}{2}4^{-4}$, nous avons $|s - s'| = 2 \cdot 4^4|t - t'|$ et

$$\begin{aligned} d_H(\chi_x(t), \chi_x(t')) &= d(\hat{\xi}_x(v_i^+ + 2s(v_{i+1}^- - v_i^+), \hat{\xi}_x(v_i^+ + 2s'(v_{i+1}^- - v_i^+))) = \\ &= 2|s - s'||v_{i+1}^- - v_i^+|d(x, \hat{x}) < 4^5 \cdot 9\epsilon_{\sigma_0}|t - t'|. \end{aligned}$$

Un calcul analogue s'applique quand t et t' sont dans un intervalle $[t_i^+ + \frac{1}{2}(t_{i+1}^- - t_i^+), t_{i+1}^-]$ avec $i < q$, d'où (13).

Avec les notation précédentes, nous pouvons maintenant définir ζ_x, pour $x \in F_{\sigma_0} \setminus F_{\sigma_1}$ par

$$\zeta_x(t) = \begin{cases} \psi_x^0(0) \cup \chi_x(4t(t_0^+ + \frac{1}{2}(t_1^- - t_0^+))) & \text{si } 0 \le t \le 1/4 \\ \psi_x^0(4t-1) \cup \chi_x(t_0^+ + \frac{1}{2}(t_1^- - t_0^+)) & \text{si } 1/4 \le t \le 1/2 \\ \chi_x((4t-2)(t_0^+ + \dfrac{1}{2}(t_1^- - t_0^+)) & \\ \qquad \cup \chi_x(t_0^+ + \dfrac{1}{2}(t_1^- - t_0^+)) & \text{si } 1/2 \le t \le 3/4 \\ \chi_x(4t - 3 + (4-4t)(t_0^+ + \frac{1}{2}(t_1^- - t_0^+)) & \text{si } 3/4 \le t \le 1 \end{cases}$$

Alors $\zeta_x(0) = \psi_x^0(0)$ et $\zeta_x(1) = \{\hat{x}\}$. D'après (11), nous avons $d_H(\psi_x^0(4t-1), \psi_x^0(4t'-1)) < 4^{-m_{\sigma_0}}|t - t'| \le |t - t'|\epsilon_{m_{\sigma_0}}$ pour $1/4 \le t \le 1/2$. Combinant ceci avec (13), on constate que, quels que soient t et t',

$$d_H(\zeta_x(t), \zeta_x(t')) < 4^6 \cdot 9\epsilon_{\sigma_0}|t - t'|, \tag{14}$$

en vérifiant cette inégalité dans chacun des intervalles $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$ et $[3/4, 1]$. D'autre part, $\zeta_x(t)$ est, pour tout t, contenu dans la réunion de $\widehat{J}_x$, des boules $\overline{B}(x_i, 4^{-(m_{\sigma_0}+4)})$ avec $x_i \in \mathcal{E}_x$ et de la boule $\overline{B}(x, \eta)$, où $\eta = \eta_{\sigma_0}$ si $x \notin C_{\sigma_0}$ et $\eta = 4^{-(m_\sigma+3)} \le 4^{-(m_{\sigma_0}+2)}$ si $x = c_\sigma^n \in C_{\sigma_0}$. Comme $\eta_{\sigma_0}(x) < 4^{-(m_{\sigma_0}+2)}$, nous avons donc

$$\operatorname{diam} \bigcup \zeta(I) \le \operatorname{diam} \widehat{J}_x + 4^{-(m_{\sigma_0}+2)} + 2 \cdot 4^{-(m_{\sigma_0}+4)} \le 9\epsilon_{\sigma_0} + \frac{\epsilon_{\sigma_0}}{4^2} + \frac{2\epsilon_{\sigma_0}}{4^4} < \Big(9 + \frac{1}{4}\Big)\epsilon_{\sigma_0}. \tag{15}$$

Pour $x \in C_{\sigma_0} \cap (F_{\sigma_1} \setminus C_{\sigma_1})$, posons

$$\zeta_x(t) = \begin{cases} \psi_x^0(0) \cup \psi_x^1(1-2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ \psi_x^0(2t-1) \cup \psi_x^1(0) & \text{si } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Posons $\zeta_x(t) = \overline{B}(x, (1-t)\eta_{\sigma_0}(x) + t\eta_{\sigma_1}(x))$ pour $x \in F_{\sigma_1} \setminus C_{\sigma_1}$ et $\zeta_x(t) = \{c_\sigma^n\} \cup U_\sigma^n$ pour tout t pour $x = c_\sigma^n \in C_{\sigma_1}$. Les inégalités (14) et (15) sont trivialement vérifiées dans les trois derniers cas.

Puisque F_{σ_1} est $4^{-m_{\sigma_0}}$-discret, la relation (15) entraîne que, pour tout $y = (1-t)b_{\sigma_0} + tb_{\sigma_1}$, $g(y)$ est réunion d'une famille localement finie de compacts, donc est fermé. En outre, il résule de (15) que $d_H(F_{\sigma_0}, g(y)) < (9 + 1/4)\epsilon_{\sigma_0}$, ce qui, combiné avec (9) et (10) entraîne que, pour tout $y \in [b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}]$,

$$\begin{aligned} d_H(g(y), f(b_{\sigma_0})) &\le d_H(g(y), F_{\sigma_0}) + d_H(F_{\sigma_0}, g(b_{\sigma_0})) + d_H(g(b_{\sigma_0}), f(b_{\sigma_0})) \\ &< (9 + 1/4)\epsilon_{\sigma_0} + 1/16\epsilon_{\sigma_0} + 7\epsilon_{\sigma_0} < 17\epsilon_{\sigma_0}. \end{aligned} \tag{16}$$

Enfin, la relation (14) entraîne que, pour $y = (1-t)b_{\sigma_0} + tb_{\sigma_1}$ et $y' = (1-t')b_{\sigma_0} + t'b_{\sigma_1}$, nous avons $d_H(g(y), g(y')) \le 4^6 \cdot 9\epsilon_{\sigma_0}|t - t'|$, donc g est continue sur $[b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}]$.

Nous allons maintenant établir deux propriétés importantes de $g|[b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}]$.

Affirmation 3. *$g(y) \cap B(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) = \{c_\sigma^n\} \cup \bigcup_{j=1}^3 U_\sigma^n(j)$ quels que soient $y \in [b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}]$ et $c_\sigma^n \in C_{\sigma_1}$.*

Démonstration. Pour tout simplexe σ' tel que $\sigma_0 \leq \sigma'$, nous avons $m_{\sigma'} \geq m_{\sigma_0} - 1$. Puisque F_{σ_0} est contenu dans l'ensemble $4^{-m_{\sigma_0}}$-discret $E_{m_{\sigma_0}}$, les boules $\overline{B}(x, 4^{-(m_{\sigma_0}+2)})$ avec $x \in F_{\sigma_0}$ sont deux à deux disjointes. Pour $x \in F_{\sigma_1}$, $\bigcup \zeta_x(I)$ est contenu dans une boule $\overline{B}(x, \eta)$ avec $\eta = \eta_{\sigma_1}(x)$ si $x \notin C_{\sigma_0}$ et $\eta = 4^{-(m_{\sigma'}+3)}$ si $x = c_{\sigma'}^{n'}$ avec $\sigma_0 \leq \sigma'$. Par suite, $\overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) \cap \bigcup \zeta_x(I) = \varnothing$ si x est un point de F_{σ_1} distinct de c_σ^n.

Si x est un point de $F_{\sigma_0} \setminus F_{\sigma_1}$, alors $\bigcup \zeta_x(I)$ est contenu dans la réunion de $\overline{B}(x, \eta_x)$ ($\eta_x = \eta_{\sigma_0}(x)$ ou $4^{-(m_{\sigma'}+3)}$), des boules $\overline{B}(z, 4^{-(m_{\sigma_0}+4)})$ avec $z \in \mathcal{E}_x$ et de $\widehat{J}_x$. Si z est un point de $E_{m_{\sigma_0}+1}$ distinct de c_σ^n, alors $d(z, c_\sigma^n) \geq 4^{-(m_{\sigma_0}+1)}$, donc $\overline{B}(x, 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}) \cap \overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_{\sigma_0}+3)}) = \varnothing$. Si donc $\bigcup \zeta_x(I) \cap \overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_{\sigma_0}+3)}) \neq \varnothing$, alors $\widehat{J}_x \cap \overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_{\sigma_0}+3)}) \neq \varnothing$. Nous avons alors $x'_x = c_\sigma^n$. En effet, si $x'_x \neq c_\sigma^n$, alors $d(x'_x, c_\sigma^n) \geq 4^{-m_{\sigma_0}}$, et si w est un point de $\widehat{J} \cap \overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)})$, alors $4^{-m_{\sigma_0}} - 4^{-(m_\sigma+3)} \geq 4^{-(m_\sigma+1)} - 4^{-(m_\sigma+3)} > 4^{-(m_\sigma+3)}$, d'où

$$\begin{aligned} d(x, x'_x) &= d(x, w) + d(w, x'_x) \geq d(x, w) + d(x'_x, c_\sigma^n) - d(c_\sigma^n, w) \geq \\ &\geq d(x, w) + 4^{-m_{\sigma_0}} - 4^{-(m_\sigma+3)} > d(x, w) + 4^{-(m_\sigma+3)} \geq d(x, w) + d(w, c_\sigma^n) \geq d(x, c_\sigma^n), \end{aligned}$$

et cela contredit la minimalité de $d(x, x'_x)$. Mais $d(x, c_\sigma^n) < 9\epsilon_{\sigma_0} \leq 9\epsilon_\sigma$ d'après (12), donc le couple (c_σ^n, x) appartient à $\mathcal{C}_\sigma^n$, et l'arc $J(x, c_\sigma^n)$ contient un point $u \in U_\sigma^n(0) \subset F_{\sigma_1}$ tel que $d(c_\sigma^n, u) = 4^{-(m_\sigma+3)}$. L'arc $\widehat{J}_x$ est donc contenu dans le sous-arc de $J(x, c_\sigma^n)$ d'extrémités x et u, donc est disjoint de $B(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)})$ (puisque $\xi(x, c_\sigma^n)$ est une isométrie). Le seul point x de F_{σ_0} tel que $\bigcup \zeta_x(I) \cap B(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) \neq \varnothing$ est donc c_σ^n, et l'affirmation résulte du fait que $\zeta_{c_\sigma^n}(t) \cap B(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) = \{c_\sigma^n\} \cup \bigcup_{j=1}^3 U_\sigma^n(j)$ pour tout $t \in I$. □

Affirmation 4. *Pour tout $y \in [b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}]$, tout simplexe σ vérifiant $\sigma_1 \leq \sigma$ et tout point $x' \in E_{m_\sigma} \setminus F_{\sigma_0}^*$, l'intervalle $]4^{-(m_\sigma+6)}, 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}[$ contient au plus cinq réels s tels qu'il existe $w \in g(y)$ vérifiant $d(x', w) = s$.*

Démonstration. Soit $y = (1-t)b_{\sigma_0} + tb_{\sigma_1}$. L'affirmation résulte des deux faits suivants:

(a) L'intervalle $]0, 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}[$ contient au plus un s tel qu'il existe $x \neq x'$ dans F_{σ_0} et $w \in \zeta_x(t)$ vérifiant $d(x', w) = s$.

(b) Si $x' \in F_{\sigma_0}$, l'intervalle $]4^{-(m_\sigma+6)}, 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}[$ contient au plus quatre s tel qu'il existe $w \in \zeta_{x'}(t)$ vérifiant $d(x', w) = s$.

Preuve de (a): Nous avons $m_{\sigma_0} \geq m_{\sigma_1} \geq m_\sigma \geq m_{\sigma_0} - 1$ et $m_{\sigma'} \geq m_{\sigma_0} - 1$ pour tout simplexe σ' tel que $\sigma_0 \leq \sigma'$. Si x' est un point de F_{σ_0} distinct de x', alors $d(x, x') \geq 4^{-m_{\sigma_0}}$. Si $x \in F_{\sigma_1}$, alors $\zeta_x(t)$ est contenu dans la boule $\overline{B}(x, \eta_x)$, où $\eta_x = \eta_{\sigma_1}(x) \leq 4^{-(m_{\sigma_1}+4)} \leq 4^{-(m_{\sigma_0}+3)}$ si $x \notin C_{\sigma_0}$ et $\eta_x = 4^{-(m_{\sigma'}+3)} \leq 4^{-(m_{\sigma_0}+2)}$ si $x = c_{\sigma'}^n \in C_{\sigma_0}$, donc $\zeta(t) \cap \overline{B}(x', 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}) = \varnothing$.

Si $x \in F_{\sigma_0} \setminus F_{\sigma_1}$, alors $\zeta(t)$ est contenu dans $\overline{B}(x, \eta_x) \cup \bigcup \chi_x(I)$. Par construction de χ_x, $\chi_x(v)$ est contenu dans $\overline{B}(x, 4^{-(m_{\sigma_0}+4)})$ si $v \leq t_0^+$ et est disjoint de $B(x', 4^{-(m_{\sigma_0}+4)})$ si $t_0^+ \leq v \leq t_0^+ + \frac{1}{2}(t_1^- - t_0^+)$. La définition de ζ_x entraîne donc que si $\zeta_x(t) \cap B(x', 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}) \neq \varnothing$, alors $t > 3/4$ et il existe $t' \in I$, ne dépendant que de t, tel que $\chi(t') \subset \zeta_x(t)$ et $\zeta_x(t) \cap B(x', 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}) = \chi_x(t') \cap B(x', 4^{-(m_{\sigma_0}+4)})$. Mais $\chi_x(t')$ ne peut contenir un point w tel que $0 < d(x', w) < 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$ que si t' appartient à un intervalle de la forme $[t_i, t_i^+]$ ou $[t_i^-, t_i]$, et le $\kappa_{x,i}^\pm$ correspondant est une isométrie. Alors $\chi_x(t') = \{\kappa_{x,i}^\pm(\pm 4^{-m_{\sigma_0}+1}(t' - t_i))\}$ et la distance d'un tel point à x' ne dépend que de t', d'où (a).

Preuve de (b): Si $x' \in F_{\sigma_1} \setminus C_{\sigma_0}$, alors $\eta_{\sigma_1}(x') = 4^{-(m_{\sigma_1}+6)} \le 4^{-(m_\sigma+6)}$ puisque x' n'appartient pas à $F^*_{\sigma_0} \supset F^*_{\sigma_1}$. Alors $\zeta_{x'}(t)$ est contenu dans $\overline{B}(x', \eta_{\sigma_1}(x')) \subset \overline{B}(x', 4^{-(m_\sigma+6)})$.

Si $x' = c^n_\sigma \in C_{\sigma_1}$, alors $\zeta_{x'}(t) = \{c^n_\sigma\} \cup U^n_\sigma$ ne contient aucun point w tel que $d(x', w) \in]0, 4^{-(m_\sigma+4)}[\supset]0, 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}[$.

Si $x' \in F_{\sigma_0} \setminus (F_{\sigma_1} \cup C_{\sigma_0})$, alors $\zeta_{x'}(t)$ est contenu dans $\overline{B}(x', \eta_{\sigma_0}(x')) \cup \bigcup \chi_{x'}(I)$ et $\eta_{\sigma_0}(x') = 4^{-(m_{\sigma_0}+6)} \le 4^{-(m_\sigma+6)}$ puisque $x' \notin F^*_{\sigma_0}$. Si w est un point de $\zeta_{x'}(t)$ tel que $4^{-(m_\sigma+6)} < d(x', w) < 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$, il existe donc un unique $t' \in I$ tel que $w \in \chi_{x'}(t')$. Un tel w ne peut exister que si $t' \in]0, t_0^+[$, et alors $w = \kappa_{x',0}(4^{-m_{\sigma_0}+1}t')$.

Si $x' = c^n_\sigma \in C_{\sigma_0} \cap (F_{\sigma_1} \setminus C_{\sigma_1})$, il existe $t', t'' \in I$ tels que $\zeta_{x'}(t) = \psi^0_{x'}(t') \cup \psi^1_{x'}(t'')$. Mais $\psi^1_{x'}(t'')$ est contenu dans $\overline{B}(x', 4^{-(m_{\sigma_1}+6)}) \subset \overline{B}(x', 4^{-(m_\sigma+6)})$, donc si $w \in \zeta_{x'}(t)$ vérifie $4^{-(m_\sigma+6)} < d(x', w) < 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$, alors w appartient à $\psi^0_{x'}(t')$. Par construction de $\psi^0_{x'}$, il existe alors $u \in U^n_{\sigma'}$ tel que $w = \varphi_u(t')$, d'où $d(x', w) = d(\varphi_u(1), \varphi_u(t')) = |1 - t'| d(x', u)$, et (b) résulte du fait que les nombres $d(x', u)$ avec $u \in U^n_{\sigma'}$ ne peuvent prendre qu'au plus quatre valeurs distinctes.

Enfin, soit $x' = c^n_\sigma \in C_{\sigma_0} \setminus F_{\sigma_1}$. Les ensembles $\psi^0_{x'}(0) = \{c^n_\sigma\} \cup U^n_\sigma$ et $\chi_{x'}(t_0^+ + \frac{1}{2}(t_1^- - t_0^+))$ ne contiennent aucun point w tel que $0 < d(x', w) < 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$. Si $t \le 1/4$ ou $t \ge 1/2$, il y a un $t' \in I$ tel que tout point w vérifiant $0 < d(x', w) < 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$ appartienne à $\chi_{x'}(t')$. Un tel w ne peut exister que si $t' \in]0, t_0^+[$, et ce point est alors unique. Si $1/4 < t < 1/2$, il y a un $t'' \in I$ tel que tout point w vérifiant $4^{-(m_\sigma+6)} < d(x', w) < 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$ appartienne à $\psi_{x'}(t'')$; comme dans le cas précédent, les distances correspondantes $d(x', w)$ ne peuvent prendre plus de quatre valeurs distinctes. □

Le lemme 2 nous permet de trouver une fonction continue $r\colon K \to 2^{K'^{(1)}}$ qui est l'identité sur $K'^{(1)}$ et telle que, pour tout $\alpha \in A$, tout simplexe τ de K' et tout $x \in \tau$, $r(x)$ soit un sous-ensemble de $\tau^{(1)}$ contenant au plus $3^{k_\alpha - 1}$ points. Pour $z \in K$, posons $g(z) = \bigcup\{g(y) \mid y \in r(z)\}$.

Etant réunion d'un nombre fini de fermés, $g(z)$ est fermé. Si z appartient à $K'^{(1)}$, alors $r(z) = \{z\}$, et cette définition coïncide avec la définition initiale de $g(z)$. Pour voir que g est continue, il suffit de vérifier que sa restriction à tout simplexe τ de K' est continue, ce qui résulte facilement du fait que sa restriction à $\tau^{(1)}$ est continue, donc uniformément continue (pour toute distance définissant la topologie de τ).

Soit z un point de K, et soit $\tau = [b_{\sigma_0}, \ldots, b_{\sigma_q}]$, $\sigma_0 \le \cdots \le \sigma_q$, le plus petit simplexe de K' contenant z. Soit y un point de $r(z)$, et soit $[b_{\sigma_i}, b_{\sigma_j}]$ un 1-simplexe de τ contenant y. Alors z appartient à $\overline{\mathrm{St}}\,\sigma_i$ et, en utilisant (6) et (16), nous obtenons

$$d_H(f(z), g(y)) \le d_H(f(z), f(b_{\sigma_i})) + d_H(f(b_{\sigma_i}), g(y)) < \epsilon_{\sigma_i} + 17\epsilon_{\sigma_i} \le \epsilon(f(z)).$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in r(z)$, la définition de la distance de Hausdorff garantit que

$$d_H(f(z), g(z)) < \epsilon(f(z)). \tag{17}$$

La fonction g est donc ϵ-proche de f, et le lemme 1 garantit qu'elle est à valeurs dans $\mathcal{H}$.

Montrons que la famille $\{g(K_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ est discrète. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ d'éléments distincts de A et, pour tout i, un point $z_i \in K_{\alpha_i}$ tels que la suite $\{g(z_i)\}$ converge vers un élément H de $\mathcal{H}$. Soit $\tau_i = [b_{\sigma_0^i}, \ldots, b_{\sigma_{q_i}^i}]$, $\sigma_0^i \le \cdots \le \sigma_{q_i}^i$, le plus petit simplexe de K_{α_i} contenant z_i, et soit $\epsilon_i = \epsilon_{\sigma_0^i}$. Quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{\epsilon_i\}$ converge vers $\epsilon_0 \in I$.

Nous avons $\epsilon_0 > 0$. En effet, il résulte de (5) et (2) que $\epsilon(f(z_i)) \le 2\inf\{\epsilon(f(z')) \mid z' \in \overline{\mathrm{St}}\,\sigma_0^i\} = 36\epsilon_i$, donc si $\{\epsilon_i\}$ tend vers 0, alors (17) entraîne que $\{f(z_i)\}$ tend aussi vers H, donc $\{\epsilon(f(z_i))\}$ tend vers $\epsilon(H) > 0$, et l'inégalité $\epsilon_i \geq \frac{1}{36}\epsilon(f(z_i))$ contredit le fait que $\{\epsilon_i\}$ tend vers 0.

Puisque $\{\epsilon_i\}$ tend vers $\epsilon_0 > 0$, les entiers $m_{\sigma_0^i}$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. Passant à une sous-suite, nous pouvons supposer qu'il existe un entier m_0 tel que $m_{\sigma_0^i} = m_0$ pour tout i. Pour tout i, $m_{\sigma_{q_i}^i}$ est alors égal soit à m_0, soit à $m_0 - 1$, et nous pouvons aussi supposer qu'il existe un entier m_0', égal à m_0 ou à $m_0 - 1$ tel que $m_{\sigma_{q_i}^i} = m_0'$ pour tout i.

Pour tout simplexe σ de K, posons

$$C_\sigma^{\text{pair}} = \{c_\sigma^{4p} \,|\, p \geq 0\} \quad C_\sigma^{\text{imp}} = \{c_\sigma^{4p+2} \,|\, p \geq 0\} \quad C_\sigma^{\text{dim}} = \{c_\sigma^n \,|\, n \leq 2k_\sigma\}.$$

Affirmation 5. *Il existe i_0 tel que, quels que soient $i, i' > i_0$, on ait $C_{\sigma_{q_i}^i}^{\text{pair}} \subset C_{\sigma_0^{i'}}^{\text{pair}}$, $C_{\sigma_{q_i}^i}^{\text{imp}} \subset C_{\sigma_0^{i'}}^{\text{imp}}$ et $C_{\sigma_{q_i}^i}^{\text{dim}} \subset C_{\sigma_0^{i'}}^{\text{dim}}$.*

Démonstration. Puisque la suite $\{g(z_i)\}$ converge, nous pouvons trouver i_0 tel que $d_H(g(z_i), g(z_{i'})) < 4^{-(m_0+6)}$ quels que soient $i, i' > i_0$. Fixons $i, i' > i_0$ et un point $c_\sigma^n \in C_{\sigma_{q_i}^i}$. Ce point c_σ^n appartient à tous les ensembles $C_{\sigma_0^i}, \dots, C_{\sigma_{q_i}^i}$, donc l'affirmation 3 est applicable à c_σ^n et à tout point de $\tau_i^{(1)}$, ce qui garantit que

$$g(z_i) \cap B(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) = \{c_\sigma^n\} \cup \bigcup_{j=1}^{3} U_\sigma^n(j). \tag{18}$$

L'ensemble $\bigcup_{j=1}^3 U_\sigma^n(j)$ n'est pas vide, et si u est l'un de ses points, alors $d(u, c_\sigma^n)$ est l'un des nombres $\frac{1}{2}4^{-(m_\sigma+3)}$, $\frac{4}{6}4^{-(m_\sigma+3)}$ et $\frac{5}{6}4^{-(m_\sigma+3)}$. Puisque $d_H(g(z_i), g(z_{i'})) < 4^{-(m_0+6)}$, il existe $y \in r(z_{i'})$ et un $w \in g(y)$ tels que $d(u, w) < 4^{-(m_0+6)} \leq 4^{-(m_\sigma+6)}$. Puisque $\sigma_0^i \leq \sigma$, nous avons $m_0 \geq m_\sigma \geq m_0 - 1$, donc le point w doit vérifier

$$4^{-(m_\sigma+4)} + 4^{-(m_\sigma+5)} < d(c_\sigma, w) < 4^{-(m_\sigma+3)} - 4^{-(m_\sigma+5)}. \tag{19}$$

Fixons un $y \in r(z_{i'})$ pour lequel il existe $w \in g(y)$ vérifiant (19). Pour simplifier les notations, nous noterons $[b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}]$ le simplexe de $\tau_{i'}^{(1)}$ contenant y, et reprendrons les notations utilisées dans la construction de $g|[b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}]$. Si t est tel que $y = (1-t)b_{\sigma_0} + tb_{\sigma_1}$, il existe $x \in F_{\sigma_0}$ tel que $w \in \zeta_x(t)$.

Puisque $\sigma_0^{i'} \leq \sigma_0 \leq \sigma_1$, nous avons $m_0 \geq m_{\sigma_0} \geq m_{\sigma_1} \geq m_0' \geq m_0 - 1$, et $m_\sigma \geq m_0 - 1$, donc $\overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) \cap \overline{B}(x, 4^{-(m_0'+2)}) = \varnothing$ si $c_\sigma^n \neq x \in F_{\sigma_0}$. Par conséquent, si x est un point de F_{σ_0} distinct de c_σ^n et tel que $\zeta_x(t)$ contienne un point w vérifiant (19), alors x appartient à $F_{\sigma_0} \setminus F_{\sigma_1}$, et il existe $s \in I$ tel que $w \in \chi_x(s) \subset \zeta_x(t) \subset g(y) \subset g(z_{i'})$. Si x' est un point de $E_{m_{\sigma_0}+1}$ distinct de c_σ^n, alors $d(c_\sigma^n, x') \geq 4^{-(m_{\sigma_0}+1)} \geq 4^{-(m_\sigma+2)}$. Le point w n'est donc dans aucune boule $\overline{B}(x', 4^{-(m_{\sigma_0}+4)})$ avec $c_\sigma^n \neq x' \in E_{m_{\sigma_0}+1}$, et la construction de χ_x garantit que $\chi_x(s)$ contient un arc $\overline{ww'}$ où w' est soit égal à $\hat{x}$, soit tel qu'il existe $x' \in E_{m_{\sigma_0}+1}$ avec $d(x', w') = 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$. Mais le point $\hat{x}$ ne peut vérifier $4^{-(m_{\sigma_0}+4)} < d(c_\sigma^n, \hat{x}) < 4^{-(m_\sigma+3)}$. En effet, comme $\hat{x}$ appartient à $F_{\sigma_1} \cup (\bigcup_{n' \in N_0} \bigcup_{\sigma_1 \leq \sigma'} U_{\sigma'}^{n'})$, il devrait exister un point $c_{\sigma'}^{n'} \in C_{\sigma_1} \subset F_{\sigma_1}$ tel que $d(\hat{x}, c_{\sigma'}^{n'}) \leq 4^{-(m_{\sigma_0}+2)}$, et la seule possibilité est $c_{\sigma'}^{n'} = c_\sigma^n$. L'affirmation 3 garantit qu'alors $d(\hat{x}, c_\sigma^n) = 4^{-(m_{\sigma'}+3)} = 4^{-(m_\sigma+3)}$ (puisque, par construction, c_σ^n appartient à $E_{m_\sigma} \setminus E_{m_\sigma-1}$ et $c_{\sigma'}^{n'}$ à $E_{m_{\sigma'}} \setminus E_{m_{\sigma'}-1}$). Nous avons donc deux possibilités: $d(c_\sigma^n, w') \geq 4^{-(m_\sigma+3)}$ ou $d(c_\sigma^n, w') = 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$. Dans le premier cas, $\overline{ww'}$ contient un point

w'' tel que $d(c_\sigma^n, w'') = 4^{-(m_\sigma+3)} - 4^{-(m_\sigma+5)}$; ce point appartient à $g(z_{i'})$, et (18) entraîne que $d_H(g(z_{i'}), g(z_i)) \geq d(w'', g(z_i)) \geq 4^{-(m_\sigma+5)} \geq 4^{-(m_0+6)}$.

Dans le deuxième cas, nous avons, en utilisant (18),

$$d_H(g(z_{i'}), g(z_i)) \geq d(w', g(z_i)) = 4^{-(m_{\sigma_0}+4)} > 4^{-(m_0+6)}.$$

Ces inégalités contredisent le choix de i_0, donc il n'existe pas de point $x \neq c_\sigma^n$ tel que $\zeta_x(t)$ contienne un point w vérifiant (19). Nous avons donc $x = c_\sigma^n$. Examinons les diverses possibilités:

$x = c_\sigma^n \in F_{\sigma_1} \setminus C_{\sigma_0}$. Alors $\zeta_x(t) \subset \overline{B}(x, \eta_{\sigma_1}(x)) \subset \overline{B}(x, 4^{-(m_{\sigma_1}+4)}) \subset \overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+4)})$. Impossible, car aucun point de $\zeta_x(t)$ ne vérifie (19).

$x = c_\sigma^n \in F_{\sigma_0} \setminus (F_{\sigma_1} \cup C_{\sigma_0})$. Si $t \leq 1/4$, alors $\zeta_x(t)$ contient la boule $\overline{B}(x, \eta_{\sigma_0}(x))$ avec $\eta_{\sigma_0}(x) \geq 4^{-(m_{\sigma_0}+6)} \geq 4^{-(m_0+6)}$. Si w' est un point tel que $d(x, w') = 4^{-(m_{\sigma_0}+6)}$, alors w' appartient à $g(y)$ et, en utilisant (18), nous obtenons $d_H(g(z_{i'}), g(z_i)) \geq d(w', g(z_i)) \geq 4^{-(m_0+6)}$, donc ce cas est impossible. Si $t > 1/4$ et si $\zeta_x(t)$ contient un point w vérifiant (19), le raisonnement fait quand $x \neq c_\sigma^n$ s'applique à nouveau: $\zeta_x(t)$ doit contenir un arc $\overline{ww'}$ avec soit $d(x, w') = 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$, soit $d(w', x) \geq 4^{-(m_\sigma+3)}$, ce qui mène encore à une contradiction.

$x = c_\sigma^n \in C_{\sigma_1}$. Alors c_σ^n est aussi de la forme $c_{\sigma'}^{n'}$ avec $\sigma_1 \leq \sigma'$, et $\zeta_x(t) = c_{\sigma'}^{n'} \cup U_{\sigma'}^{n'}$ pour tout t. Le choix des c_σ^n garantit que $m_\sigma = m_{\sigma'}$, donc

$$\zeta_x(t) \cap B(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) = \{c_\sigma^n\} \cup \bigcup_{j=1}^{3} U_{\sigma'}^{n'}(j).$$

$x = c_\sigma^n \in C_{\sigma_0} \cap (F_{\sigma_1} \setminus C_{\sigma_1})$, donc $c_\sigma^n = c_{\sigma'}^{n'}$ avec $\sigma_0 \leq \sigma'$. Si $t \geq 1/2$, alors $\zeta_x(t)$ contient $\psi_x^1(0) = \overline{B}(x, \eta_{\sigma_1}(x))$; comme nous l'avons remarqué, ce cas est impossible. Si $t < 1/2$, $\zeta_x(t) = \psi_x^0(0) \cup \psi_x^1(1-2t)$. Mais $\psi_x^1(1-2t)$ est contenu dans $\overline{B}(x, 4^{-(m_\sigma+4)})$ et $\psi_x^0(0) = \{c_{\sigma'}^{n'}\} \cup U_{\sigma'}^{n'}$. Ici encore, $m_{\sigma'} = m_\sigma$, et nous avons

$$\zeta_x(t) \cap \big(B(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) \setminus \overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+4)})\big) = \bigcup_{j=1}^{3} U_{\sigma'}^{n'}(j).$$

$x = c_\sigma^n \in C_{\sigma_0} \setminus F_{\sigma_1}$, donc $x = c_{\sigma'}^{n'}$ avec $\sigma_0 \leq \sigma'$. Il existe alors un plus petit $\hat{t} < 1/4$ tel que $\chi_x(4\hat{t}(t_0^+ + \frac{1}{2}(t_1^- - t_0^+))$ contienne $\kappa_{x,0}^+(4^{-(m_{\sigma_0}+4)})$. Si $t \geq \hat{t}$, nous sommes dans la même situation que quand $x \neq c_\sigma^n$: $\zeta_x(t)$ contient un arc $\overline{ww'}$ avec $d(x, w') = 4^{-(m_{\sigma_0}+4)}$ ou $d(w', x) \geq 4^{-(m_\sigma+3)}$, ce qui est impossible. Si $t < \hat{t}$, alors

$$\zeta_x(t) \cap \big(B(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) \setminus \overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+4)})\big) = \psi_x^0(0) \cap \big(B(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) \setminus \overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+4)})\big) = \\ = \bigcup_{j=1}^{3} U_{\sigma'}^{n'}(j).$$

Comme nous l'avons remarqué, l'ensemble $\bigcup_{j=1}^{3} U_{\sigma'}^{n'}(j)$ ne dépend pas du choix du simplexe σ' tel que $\sigma_0^{i'} \leq \sigma'$ et $c_\sigma^n = c_{\sigma'}^{n'}$. Il résulte de ce qui précède que, pour tout point $y \in r(z_{i'})$ pour lequel il existe $w \in g(y)$ vérifiant (19), il existe $c_{\sigma'}^{n'} \in C_{\sigma_0^{i'}}$ tel que

$$g(y) \cap \big(B(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) \setminus \overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+4)})\big) = \bigcup_{j=1}^{3} U_{\sigma'}^{n'}(j),$$

d'où

$$g(z_{i'}) \cap \big(B(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+3)}) \setminus \overline{B}(c_\sigma^n, 4^{-(m_\sigma+4)})\big) = \bigcup_{j=1}^{3} U_{\sigma'}^{n'}(j). \tag{20}$$

Compte tenu du fait que $m_\sigma = m_{\sigma'}$ et de la définition des $U_\sigma^n(j)$, si $d_H(g(z_i), g(z_{i'})) < 4^{-(m_0+6)}$, les relations (18) et (20) ne peuvent être vérifiées que si $U_\sigma^n(j) = U_{\sigma'}^{n'}(j)$ pour $1 \le j \le 3$, et l'affirmation résulte alors de la définition des ensembles $U_\sigma^n(2)$ et $U_\sigma^n(3)$. $\square$

Affirmation 6. *Soient $i, i' > i_0$. Si n, n' sont deux entiers pairs tels que $n+2 < n'$, alors $\delta(x) < \delta(x')$ quels que soient $x \in C^n_{\sigma_0^i}$ et $x' \in C^{n'}_{\sigma_0^{i'}}$.*

Démonstration. Puisque C_σ^n est contenu dans F_σ^n, l'affirmation 2 entraîne que, pour tout simplexe σ de K et tout couple d'entiers pairs n_0, n_1 vérifiant $n_0 < n_1$, nous avons $\delta(x) < \delta(x')$ quels que soient $x \in C_\sigma^{n_0}$ et $x' \in C_\sigma^{n_1}$.

Supposons l'affirmation fausse, et soit n le plus petit entier pair pour lequel il existe $n' > n+2$ et des points $x \in C^n_{\sigma_0^i}$ et $x' \in C_{\sigma_0^{i'}}$ vérifiant $\delta(x) \ge \delta(x')$. Supposons que $n = 4p$, et prenons $x'' \in C^{4p+2}_{\sigma^{i'}_{q_{i'}}} \subset C^{4p+2}_{\sigma_0^{i'}}$. Puisque $4p+2 < n'$, nous avons $\delta(x'') < \delta(x')$.

L'affirmation 5 entraîne qu'il existe p' tel que x'' appartienne à $C^{4p'+2}_{\sigma_0^i}$, et le choix de n garantit que $p' \ge p$. Nous avons alors $\delta(x'') > \delta(x) \ge \delta(x')$, ce qui est contradictoire.

Le cas où $n = 4p+2$ se traite de façon analogue. $\square$

Soient $i, i' > i_0$. Pour $n \in N_0$, prenons un point $c_\sigma^n \in C^n_{\sigma^i_{q_i}}$. L'affirmation 5 entraîne l'existence d'un n' tel que c_σ^n appartienne à $C^{n'}_{\sigma_0^{i'}}$, et en outre, si $n = 4p$ (resp. $n = 4p+2$), alors $n' = 4p'$ (resp. $n' = 4p'+2$). Mais l'affirmation 6 entraîne que $|n - n'| \le 2$, donc $n = n'$. Si c_σ^n appartient à $C^{\dim}_{\sigma^i_{q_i}}$, i.e. $n \le 2k_i$, alors c_σ^n appartient aussi à $C^{\dim}_{\sigma_0^{i'}}$, donc $n \le 2k_{i'}$. Nous avons donc $k_i \le k_{i'}$ et, par symétrie, $k_i = k_{i'}$. La dimension k_i du complexe K_{α_i} ne dépend donc pas de i si $i > i_0$; nous noterons k_0 cette dimension.

Si $i \ne i'$, il existe un entier p tel que $N_{\alpha_i} \setminus N_{\alpha_{i'}}$ contienne $\{6p+1, 6p+3, 6p+5\}$. Soit x_0 un point de $\widetilde{F}^{6p+3}_{\sigma_{q_i}}$. Pour tout $j \le q_i$, le point x_0 appartient à $F^{6p+3}_{\sigma_j^i}$, donc $\eta_{\sigma_j^i}(x_0) = 4^{-(m_{\sigma_j^i}+4)} \ge 4^{-(m_0+4)}$. Il en résulte que, pour tout $y \in \tau_i^{(1)}$, le point $g(y)$ contient la boule $\overline{B}(x_0, 4^{-(m_0+4)})$, donc $g(z_i)$ contient cette boule.

Pour tout $j' \le q_{i'}$, le point x_0 n'appartient pas à $F^*_{\sigma^{i'}_{j'}}$. En effet, si x' est un point de $F^*_{\sigma^{i'}_{j'}}$, il existe $n \in N_{\alpha_{i'}}$ tel que $x' \in F^n_{\sigma^{i'}_{j'}}$. Etant impair, n vérifie soit $n \ge 6p+7$, soit $n \le 6p-1$. Soit $x_1 = c^{6p+4}_{\sigma^i_{q_i}} \in \widetilde{F}^{6p+4}_{\sigma^i_{q_i}}$. Nous avons $\delta(x_0) < \gamma_{6p+4}(f(b_{\sigma^i_{q_i}})) < \delta(x_1)$.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, x_1 appartient à $C^{6p+4}_{\sigma_0^{i'}} \subset F^{6p+4}_{\sigma_0^{i'}}$, et l'affirmation 2 entraîne que $\delta(x') > \delta(x_1) > \delta(x_0)$ pour $x' \in F^n_{\sigma_0^{i'}} \supset F^n_{\sigma^{i'}_{j'}}$ avec $n \ge 6p+7$. Un argument analogue montre que $\delta(x') < \delta(x_0)$ pour $x' \in F^n_{\sigma^{i'}_{j'}}$ avec $n \le 6p-1$.

Puisque x_0 appartient à $E_{m_0'}$ et que $m_{\sigma^{i'}_{j'}} \ge m_0'$ pour tout $j' \le q_{i'}$, l'affirmation 4 est applicable à x_0 et à tout 1-simplexe de $\tau_{i'}$. Pour tout $j' \le q_{i'}$, nous avons $m_0 \le m_{\sigma^{i'}_{j'}} \le m_0 - 1$, donc si $[b_{\sigma^{i'}_{j'}}, b_{\sigma^{i'}_{j''}}]$ est un 1-simplexe contenu dans $\tau_{i'}$, alors $]4^{-(m_0'+6)}, 4^{-(m_{\sigma^{i'}_{j'}}+4)}[$ contient $]4^{-(m_0+5)}, 4^{-(m_0+4)}[$, et l'affirmation 4 entraîne que, pour tout $y' \in \tau_{i'}^{(1)}$, l'intervalle

$]4^{-(m_0+5)}, 4^{-(m_0+4)}[$ contient au plus 5 réels s tels qu'il existe $x' \in g(y')$ vérifiant $d(x', x_0) = s$. Puisque $K_{\alpha_{i'}}$ est de dimension k_0, $r(z_{i'})$ contient au plus 3^{k_0-1} points, donc l'intervalle $]4^{-(m_0+5)}, 4^{-(m_0+4)}[$ contient au plus $5 \cdot 3^{k_0-1}$ nombres s pour lesquels il existe $x' \in g(z_i)$ tel que $d(x', x_0) = s$. Nous pouvons donc trouver un intervalle $]v_1, v_2[\subset]4^{-(m_0+5)}, 4^{-(m_0+4)}[$ de longueur $v_2 - v_1 \geq (4^{-(m_0+4)} - 4^{-(m_0+5)})/5 \cdot 3^{k_0-1} = \ell$ ne contenant aucun nombre s tel qu'il existe $x' \in g(z_{i'})$ avec $d(x', x_0) = s$. Soit $v_3 = \frac{v_1+v_2}{2}$. La boule $\overline{B}(x_0, 4^{-(m_0+4)})$ contient un point w tel que $d(w, x_0) = v_3$, et ce point appartient à $g(z_i)$. Pour tout $x' \in g(z_{i'})$, nous avons $d(w, x') \geq |d(w, x_0) - d(x', x_0)| \geq \ell/2$, d'où $d_H(g(z_i), g(z_{i'})) \geq d(w, g(z_{i'})) \geq \ell/2$. Ceci étant vrai quels que soient les entiers distincts $i, i' > i_0$, la suite $\{g(z_i)\}$ ne peut converger. Cette contradiction achève la démonstration du lemme 4, donc aussi celle du théorème. $\square$

REFERENCES

1. Curtis D. *Hyperspaces of noncompact metric spaces*// Compositio Math. – 1980. – V.40. – P. 139–152.
2. Curtis D., Nguyen To Nhu. *Hyperspaces of finite susets which are homeomorphic to $\aleph_0$-dimensional linear metric spaces*// Topology Appl. – 1985. – V.19. – P. 251–260.
3. Kubiś W., Sakai K. *Hausdorff hyperspaces of $\mathbb{R}^n$ and there dense subspaces*// J. Math. Soc. Japan. – 2008. – P. 193–217.
4. Kurihara M., Sakai K. Yaguchi M., *Hyperspaces with the Hausdorff metric and uniform ANR's*// J. Math. Soc. Japan. – 2008. – V.57. – P. 523–535.
5. Toruńczyk H. *Characterizing Hilbert space topology*// Fund. Math. – 1981. – V.111. – P. 247–272.
6. Toruńczyk H. *A correction of two papers concening Hilbert manifolds*// Fund. Marh. – 1985. – V.125. – P. 89–93.

Université Paris 6, Institut de mathématiques de Jussieu
cauty@math.jussieu.fr

Received 14.06.10

Revised 15.12.10