УДК 512.552.12

І. С. Васюник, Б. В. Забавський

ФАКТОРІАЛЬНИЙ АНАЛОГ ЛОКАЛЬНОЇ КВАЗІДУО ОБЛАСТІ

I. S. Vasyunyk, B. V. Zabavsky. *Factorial analogue of the local quasi-duo domain*, Mat. Stud. **35** (2011), 74–77.

Its shown that if the R — quasi-duo the right Bezout domain, with the unique maximally non-principal N ideal, then N is an ideal of ring. That is to say R is a factorial analogue of the local ring.

И. С. Васюнык, Б. В. Забавский. *Факториальный аналог локальной квазидуо области* // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №1. – С.74–77.

Доказано, что если R — квазидуо правая область Безу с единственным максимально неглавным правым идеалом N, то этот идеал N является двухсторонним. Т.е. R является факториальным аналогом локального кольца.

Дистрибутивні кільця активно досліджуються у наш час і у багатьох випадках відіграють важливу роль при побудові структурної теорії кілець. Проте клас дистрибутивних кілець є доволі вузьким і спецефічним. Так, наприклад, дистрибутивне кільце Безу — це кільце в якому довільний максимальний ідеал є двобічним [1], тобто кільце є квазідуо кільце. Звідси не кожна область головних ідеалів є диситрибутивною. Області Безу є природнім узагальненням областей головних ідеалів. В той же час вони відрізняються від областей головних ідеалів наявністю неголовних однобічних ідеалів, що дозволило одному з авторів [2] ввести до розгляду, так звані, максимально неголовні ідеали. В даній роботі вивчається квазідуо область через вивчення структури максимально неголовних правих ідеалів. А саме показано, що якщо R-квазідуо права область Безу з єдиним максимально неголовним правим ідеалом N, то цей ідеал N є двобічним. Тобто R є факторіальним аналогом локального кільця.

Під кільцем R завжди розуміємо асоціативне кільце з одиницею і $1 \neq 0$. Більше того будемо вважати, що R не є областю головних правих ідеалів.

Наведемо необхідні означення і факти. Елемент кільця називається атомом, якщо він є незворотнім, ненульовим і не може бути зображений у вигляді добутку двох незворотніх елементів. Атомним розкладом елемента називається його зображення у вигляді добутку деяких елементів, якщо всі незворотні співмножники даного добутку є атомами. Назвемо два атомні розклади елемента a у добуток елементів (не дільників нуля) $a = c_1...c_n$ і $a = b_1...b_m$ ізоморфними, якщо $n = m$ і існує підстановка $i \to i'$ індексів $1, 2, ..., n$ така що $R/b_iR \cong R/c_iR$ як праві R-модулі. Назвемо ненульовий елемент, який не є дільником нуля, факторіальним, якщо він володіє скінченним атомним розкладом, причому довільні два атомні розклади даного елемента ізоморфні. Ненульовий елемент a кільця називається правим (лівим) дуо-елементом, якщо $Ra \subseteq aR (aR \subset eqRa)$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41A46, 42A10.

і дуо-елементом, якщо $Ra = aR$[3]. Якщо довільний максимальний правий (лівий) ідеал кільця R є двобічним, тоді кільце R називається правим (лівим) квазідуо кільцем. Квазідуо кільце — це кільце, яке є правим і лівим квазідуо одночасно.

Правий (лівий) ідеал I в кільці R, який є максимальним в множині неголовних правих (лівих) ідеалів, назвемо максимально неголовним правим (лівим) ідеалом. Оскільки множина неголовних правих (лівих) ідеалів кільця індукована [2], то має місце такий результат:

Твердження 1. *Довільний правий (лівий) неголовний ідеал кільця R міститься хоча б в одному максимально неголовному правому (лівому) ідеалі.*

Теорема 1. *Нехай R — квазідуо область, а a — довільний елемент, який не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу. Тоді a — дуо-елемент, який не міститься в жодному максимальному неголовному лівому ідеалі.*

Доведення. Зауважимо, якщо для елемента $a \in R$ правий ідеал aR є максимальним правим ідеалом, то a є атомом, який є дуо-елементом.

Отже, нехай a довільний елемент, який не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу. Розглянемо правий ідеал aR. Якщо aR — максимальний правий ідеал, то тоді a — атом, який є дуо-елементом, і все доведено.

У протилежному випадку існує такий максимальний правий ідеал m_1R, що $aR \subset m_1R$. Зауважимо, що елемент m_1 є атомом кільця. Тоді $a = m_1b_1$. Оскільки R-квазідуо область, то всі такі атоми області R є дуо-елементами, то для елемента m_1 існує елемент $a_1 \in R$, такий що $m_1b_1 = a_1m_1$. Якщо елемент a_1 є атомом, то все доведено. У протилежному випадку існує такий атом m_2, що $a_1 = m_2b_2 = a_2m_2$. Продовжуючи даний процес і враховуючи, що елемент $a = a_1m_1 = a_2m_2m_1 = ...$ не міститься в жодному максимально неголовному правому ідеалі (тобто елемент a не міститься в жодному неголовному правому ідеалі), ми отримаємо скінчений ланцюг головних правих ідеалів $aR \subset a_1R \subset a_2R \subset ... \subset a_nR$ де $a_i = a_{i+1}m_{i+1}$ і m_i — атоми кільця R, звідси $a = m_n...m_1$. Так як всі такі атоми області R є дуо-елементами, а добуток дуо-елементів є дуо-елементом, то ми отримаємо, що a — дуо-елемент. Згідно [4], a не міститься в жодному неголовному лівому ідеалі, а значить a не міститься в максимально неголовному лівому ідеалі. Теорема 1 доведена. □

Теорема 2. *Нехай R — квазідуо кільце. Якщо максимально неголовний правий ідеал кільця R є двобічним, то він цілком простий.*

Доведення. Нехай N — максимально неголовний правий ідеал кільця R, який є двобічним. Якщо R/N не є областю, то в R знайдуться такі елементи $a \notin N$ і $b \notin N$, що $ab \in N$. Розглянемо правий ідеал $N + bR$. Оскільки N — максимально неголовний правий ідеал і $b \in N + bR$, але $b \notin N$, то тоді $N + bR = dR$ — головний правий ідеал. В силу теореми 1, елемент d є дуо-елементом, тобто $dR = Rd$. Розглянемо множину $J = \{x|xd \in N\}$. Зауважимо, що J — правий ідеал. Дійсно, якщо $x_1, x_2 \in J$, то очевидно, що $(x_1 - x_2)d \in N$. Більше того, якщо $xd \in N$, тоді для довільного $y \in R$, маємо $xyd = xdy'$, де y' такий елемент R, що $yd = dy'$. Зауважимо, що такий елемент y' існує, оскільки d — дуо-елемент. Оскільки $N + bR = dR = Rd$, тоді існують такі елементи $n \in N, r \in R$,що $n + br = d$. Тоді для елемента $a \in R$ маємо $an + abr = ad \in R$. Тобто $a \in J$, але $a \notin N$. Оскільки N — двобічний ідеал, то для довільного $m \in N$ маємо $md \in N$. Тобто $N \subset J$ і $N \neq J$. Значить $J = cR$. В силу теореми 2 c-дуо-елемент, тобто

$J = cR = Rc$. Оскільки $N \subset dR = Rd$, тоді для довільного $m \in N$, маємо $m = yd$, для деякого елемента $y \in R$. Згідно означення правого ідеалу J, маємо $y \in J$, тобто $y = xc$, для деякого елемента $x \in R$. Звідси $m = xcd$. Оскільки c і d — дуо-елементи, то cd також дуо-елемент, тобто $m = cdx'$, для деякого елемента $x' \in R$. В силу довільності елемента m маємо $N \subset cdR$. Оскільки R — кільце з 1 і є J, тоді $cd \in N$, тобто $cdR \subset N$. Звідси ми отримаємо $N = cdR$,що протирічить вибору правого ідеалу N. Отже наше припущення невірне, отже N цілком простий ідеал. Теорема доведена. □

Теорема 3. *Нехай R-квазідуо права область Безу з єдиним максимально неголовним правим ідеалом N. Тоді N — двобічний ідеал, більше того N є максимально неголовним лівим ідеалом.*

Доведення. Припустимо, що N не є двобічним ідеалом, тоді існує елемент $n \in N$ і $r \in R$, такі що $rn \notin N$. Згідно теореми 1, в силу [3] rn — дуо-елемент. Якщо $r \in N$, тоді очевидно, що $rn \in N$, що неможливо в силу [4]. Значить $r \notin N$, тобто, згідно теореми 1 і [3], r — факторіальний дуо-елемент. Покажемо, що n — дуо-елемент, тобто $nR = Rn$. Нехай x довільний елемент з R і нехай $y = nx$, тоді $rnx = ry$. Оскільки rn — дуо-елемент, тоді існує елемент x', такий що $x'rn = rnx$. Так як r — дуо-елемент, то існує $x'' \in R$, такий що $x'r = rx''$. Звідси $rx''n = rnx$. Оскільки R — область, то з того що $r \neq 0$ і рівності $r(x''n - nx) = 0$ випливає, що $x''n = nx$. Тобто ми довели, що для довільного елемента $x \in R$ існує елемент $x'' \in R$ такий що $nx = x''n$. Аналогічно показується, що для довільного $x \in R$ існує $y \in R$, такий що $xn = ny$. Отже n — дуо-елемент. Значить, тоді для елемента $r \in R$ такого що $rn \notin N$ існує елемент $r' \in R$, такий що $rn = nr'$. Але оскільки $n \in N$, то маємо $nr' \in N$. Отримане протиріччя з вибором елементів $n \in N$ і $r \in R$ показує, що N — двобічний ідеал.

Припустимо, що N є головним лівим ідеалом, тобто $N = Rn$. Покажемо спочатку, що N — максимальний правий ідеал. Нехай це не так. Тоді існує власний правий ідеал N такий, що $N \subset M$ і причому $M \neq N$. Згідно означення N маємо рівність $M = mR$. Оскільки $N \subset M$, то $n = mx$, де $x \in R$. Зважаючи на те, що R-права область Безу, то згідно теореми 3 маємо, що N — цілком простий ідеал кільця R. Оскільки $m \in N$, то $x \in N$ і тоді $x = yn$, де $y \in R$. Звідси $n = myn$. З огляду на те, що R — область і $n \neq 0$ маємо $my = 1$. Звідси $M = mR = R$, що суперечить вибору правого ідеалу M. Отже ми показали, що N — максимальний правий ідеал. Більше того покажемо, що N — максимальний лівий ідеал. Для цього досить показати, що для довільного елемента a кільця R, який не належить N, виконується $N + Ra = R$. Оскільки N — максимальний правий ідеал, то $N + aR = R$, тобто $m + ab = 1$, для деяких елементів $m \in N$ і $b \in R$. Звідси $bm + bab = b$, а отже $bm = (1 - ba)b$. Оскільки $m \in N$ і N — двобічний ідеал, то $(1 - ba)b \in N$. Як вже зазначалось, N — цілком простий ідеал, тоді $b \in N$ або $1 - ba \in N$. Випадок $b \in N$ неможливий, оскільки $1 = m + ab \in N$. Отже $1 - ba \in N$, звідси $M + Ra = R$, що і потрібно довести.

Отже, ми довели, що якщо N — головний лівий ідеал, то він є максимальним правим і лівим ідеалом. Оскільки $N = Rn$ і N — двобічний ідеал, то маємо наступне включення $nR \subset N = Rn$. Нехай x — довільний елемент області R, тоді, оскільки R — права область Безу, то $nR + xnR = dR$ для деякого елемента $d \in R$. Звідси $d = nu + xnv$ для деяких елементів $u, v \in R$.

Оскільки N — двобічний ідеал, то $nR \subset Rn$, а значить існують елементи $u', v' \in R$ такі, що $mu = u'm$ та з іншої сторони $mv = v'm$. Звідси, ми отримаємо таку рівність $d = u'n+xv'n$, що дає нам таке включення $Rd \subset Rn$. На підставі того, що $nR+xnR = dR$

маємо включення $nR \subset dR$, тобто виконується рівність $n = dt$ для деякого елемента $t \in R$ і, окрім того, маємо таке включення $Rn \subset Rt$. Оскільки $N = Rn$ максимальний лівий ідеал, то можливі випадки $Rt = R$, або $Rt = Rn$.

Якщо $Rt = R$, то t — правий дільник одиниці. Оскільки R — область, то згідно [3] t — дільник одиниці. Звідси ми отримаємо рівність $nt^{-1} = d$, а звідси рівність для правих ідеалів $nR = dR$. Враховуючи, що $nR + xnR = dR$, отримаємо в підсумку, що $xnR \subset dR \subset nR$.

В силу довільності елемента $x \in R$ отримаємо включення $Rn \subset nR$. А оскільки $nR \subset Rn$, то $N = nR = Rm$, що суперечить тому, що N — неголовний правий ідеал. Якщо $Rt = Rn$, то отримаємо таку рівність $t = yn$ для деякого елемента $y \in R$. На підставі того, що $n = dt$ і рівності $t = yn$ маємо $n = dyn$. Оскільки R — область і $n \neq 0$, то це можливо лише у випадку $dy = 1$, тобто d — лівий дільник одиниці, але оскільки R — область, то d — дільник одиниці. Ми показали, що $Rd \subset Rn$, а це можливо, якщо n — лівий дільник одиниці, а значить $N = R$, що знову суперечить вибору N. Отже, ми показали що N не може бути головним лівим ідеалом. Більше того N є максимально неголовним лівим ідеалом. Дійсно, що існує неголовний лівий ідеал M такий що, $N \subset M$ і $N \neq M$, то тоді існує елемент $m \in M$, такий що $m \notin N$. Згідно теореми 1 і [3], m — факторіальний дуо-елемент. Тоді $m \notin M$ згідно теореми 2. Отримане протиріччя з вибором m завершує наше доведення. Теорема доведена. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Brungs H.H. *Rings with a distributive lattice of right ideals*// J. Algebra. – 1976. – V.40. – P. 392–400.
2. Забавський Б.В. *Некоммутативный аналог теорем Коена*// Укр. мат. ж. – 1996. – Т.48, №5. – С. 707–710.
3. Кон П. Свободные кольца и их связи. – М: Мир, 1976.
4. Beauregard R. *Left Ore principal right ideal domains*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – V.102, №3. – P. 459–462.

Department of Mechanics and Mathematics,
Lviv National University

Надійшло 08.04.2010
Після переробки 12.01.2011