

УДК 517.51

С. А. СТАСЮК

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B_{p,\theta}^\omega$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ПОЛІНОМАМИ ЗІ СПЕКТРОМ В КУБІЧНИХ ОБЛАСТЯХ

S. A. Stasyuk. *Approximation of classes $B_{p,\theta}^\omega$ of periodic functions of several variables by polynomials with spectrum from cubic areas*, Mat. Stud. **35** (2011), 66–73.

We have obtained exact order estimates for error of approximation of classes $B_{p,\theta}^\omega$ of periodic functions of several variables by trigonometric polynomials with spectrum from cubic areas.

С. А. Стасюк. *Приближение классов $B_{p,\theta}^\omega$ периодических функций многих переменных полиномами со спектром в кубических областях* // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №1. – С.66–73.

Получены точные по порядку оценки погрешности приближения классов $B_{p,\theta}^\omega$ периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами со спектром в кубических областях.

1. Вступ. У статті отримано точні за порядком оцінки найкращого наближення класів $B_{p,\theta}^\omega$ періодичних функцій багатьох змінних тригонометричними поліномами зі спектром в кубічних областях, а також точні за порядком оцінки наближення функцій з цих класів кубічними сумами Фур'є.

Для викладу одержаних результатів наведемо необхідні позначення.

Нехай $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, позначає d -мірний простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi; \pi]$, — простір 2π -періодичних за кожною змінною функцій $f(x)$, норма в якому визначається рівністю

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, де $h \in \mathbb{R}^d$. Тоді кратну різницю порядку $l, l \in \mathbb{N}$, функції $f(x)$ в точці x з кроком h визначимо за формулою $\Delta_h^l f(x) = \Delta_h \Delta_h^{l-1} f(x)$, $\Delta_h^0 f(x) = f(x)$.

Відштовхуючись від кратної різниці $\Delta_h^l f(x)$, задамо модуль неперервності l -го порядку функції $f \in L_p(\pi_d)$ згідно з формулою

$$\omega_l(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p, \quad \text{де} \quad |h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_d^2}.$$

Нехай $\omega(t)$ — функція типу *модуля неперервності* порядку l , тобто $\omega(t)$ для $t \geq 0$ задовольняє такі умови: 1) $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ для $t > 0$; 2) $\omega(t)$ неперервна; 3) $\omega(t)$ зростає; 4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, $\omega(nt) \leq Cn^l\omega(t)$, де стала $C > 0$ не залежить від n і t .

Будемо вважати, що $\omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l) , які називають умовами Барі-Стєчкаїна ([1]). Це означає наступне.

Функція $\omega(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S) , якщо $\omega(\tau)/\tau^\alpha$ *майже зростає* при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\omega(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Функція $\omega(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l) , якщо $\omega(\tau)/\tau^\gamma$ *майже спадає* при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\omega(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Будемо говорити, що функція $f \in L_p(\pi_d)$ належить до простору $B_{p,\theta}^\omega$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$ (див., наприклад, [2]), якщо

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{\omega_l(f, t)_p}{\omega(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < \infty \text{ при } 1 \leq \theta < \infty \quad \text{і} \quad \sup_{t>0} \frac{\omega_l(f, t)_p}{\omega(t)} < \infty \text{ при } \theta = \infty,$$

де $\omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l .

Норма в просторі $B_{p,\theta}^\omega$ визначається за формулою

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\omega} = \begin{cases} \|f\|_p + \left(\int_0^\infty \left(\frac{\omega_l(f, t)_p}{\omega(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \|f\|_p + \sup_{t>0} \frac{\omega_l(f, t)_p}{\omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простори $B_{p,\theta}^\omega$ є узагальненням просторів Бесова $B_{p,\theta}^r$ ([3]–[4]), тобто $B_{p,\theta}^\omega \equiv B_{p,\theta}^r$, якщо $\omega(t) = t^r$, $0 < r < l$. Надалі за позначенням $B_{p,\theta}^\omega$ закріпимо позначення класу функцій $f \in L_p(\pi_d)$, для яких $\|f\|_{B_{p,\theta}^\omega} \leq 1$. Класи $B_{p,\theta}^\omega$ з точки зору апроксимації розглядалися в роботах [2], [5], [6].

В наведених нижче міркуваннях нам буде зручно користуватись еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) визначенням норми класів $B_{p,\theta}^\omega$.

Нехай $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, позначає ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kt.$$

Тоді багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \pi_d$, визначимо згідно з формулою $V_m(x) = \prod_{j=1}^d V_m(x_j)$. Нехай V_m — оператор, який задає згортку функції $f \in L_p(\pi_d)$ з багатовимірним ядром $V_m(x)$, тобто $V_m f(x) \stackrel{\text{df}}{=} f(x) * V_m(x) = V_m(f, x)$.

Покладемо для $f \in L_1(\pi_d)$

$$\sigma_0(f, x) = V_1(f, x), \sigma_s(f, x) = V_{2^s}(f, x) - V_{2^{s-1}}(f, x), \quad s = 1, 2, \dots$$

В наведених позначеннях при $1 \leq p \leq \infty$ (з точністю до абсолютних сталих) класи $B_{p,\theta}^\omega$ можна визначити наступним чином (див., наприклад, [2]): $B_{p,\theta}^\omega = \{f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\omega} \leq 1\}$, де

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\omega} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\sigma_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \quad (1)$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\omega} = \sup_{s \geq 0} \frac{\|\sigma_s(f, \cdot)\|_p}{\omega(2^{-s})}, \quad (2)$$

у випадку, коли функція $\omega(t)$ є функцією типу модуля неперервності порядку l і задовольняє умови (S) та (S_l) .

Зазначимо, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентні (з точністю до абсолютних сталих) означення норм функцій з класів $B_{p,\theta}^\omega$, використовуючи в (1) та (2) замість $\|\sigma_s(f, \cdot)\|_p$ норми відповідних двійкових "блоків" ряду Фур'є функції f .

Для $f \in L_p(\pi_d)$ і $s \in \mathbb{Z}_+$ введемо позначення

$$f_{(0)}(x) = \widehat{f}(0), f_{(s)}(x) = \sum_{2^{s-1} \leq \max\{|k_j| : 1 \leq j \leq d\} < 2^s} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

де $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$, а $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f .

Тоді при $1 < p < \infty$, якщо $\omega(t)$ задовольняє умови 1) — 4), (S) (з деяким $\alpha > 0$) та (S_l) ,

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\omega} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-\theta}(2^{-s}) \|f_{(s)}(\cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \quad (3)$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\omega} = \sup_{s \geq 0} \frac{\|f_{(s)}(\cdot)\|_p}{\omega(2^{-s})}. \quad (4)$$

2. Наближення класів $B_{p,\theta}^\omega$ в просторі L_q тригонометричними поліномами зі спектром в кубічних областях. Визначимо тепер величини, які будуть досліджуватись в роботі. Для $f \in L_1(\pi_d)$ і $n \in \mathbb{N}$ через $S_{\square_{2^n}}(f, x)$ позначимо кратну суму Фур'є

$$S_{\square_{2^n}}(f, x) = \sum_{|k_j| < 2^n, 1 \leq j \leq d} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)} = \sum_{k \in \square_{2^n}} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

($\square_{2^n} = \{k = (k_1, \dots, k_d) : |k_j| < 2^n, 1 \leq j \leq d\}$), яку природно назвати кубічною сумою Фур'є функції $f(x)$. Зазначимо, що згідно з наведеними вище позначеннями суму $S_{\square_{2^n}}(f, x)$ можна записати у вигляді

$$S_{\square_{2^n}}(f, x) = \sum_{s=0}^n f_{(s)}(x).$$

Отже, для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, позначимо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q = \|f(\cdot) - S_{\square_{2^n}}(f, \cdot)\|_q \quad (5)$$

і якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(F)_q = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q$.

Нехай $T_{\square_{2^n}} = \{t(x) : t(x) = \sum_{k \in \square_{2^n}} c_k e^{i(k,x)}, c_k \in \mathbb{C}\}$.
Для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, покладемо

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q = \inf_{t(\cdot) \in T_{\square_{2^n}}} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_q \quad (6)$$

і для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$: $E_{\square_{2^n}}(F)_q = \sup\{E_{\square_{2^n}}(f)_q : f \in F\}$.

Зауважимо, що у випадку $1 < q < \infty$ для величин (5) і (6) має місце співвідношення (див., наприклад, [7])

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q \asymp \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q. \quad (7)$$

Одержані результати будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. Для функцій $\mu_1(n)$ и $\mu_2(n)$ запис $\mu_1(n) \ll \mu_2(n)$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(n) \leq C\mu_2(n)$ для всіх $n \geq 1$. Співвідношення $\mu_1(n) \asymp \mu_2(n)$ рівносильне тому, що $\mu_1(n) \ll \mu_2(n)$ і $\mu_1(n) \gg \mu_2(n)$. Всі сталі C_j , $j = 1, 2, \dots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від тих параметрів, які містяться в означенні класів, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Сформулюємо допоміжне твердження, яким будемо користуватися.

Теорема А ([3]). Нехай $n = (n_1, \dots, n_d)$, $n_j \in \mathbb{N}$ ($1 \leq j \leq d$), і $t(x) = \sum_{|k_j| \leq n_j} c_k e^{i(k,x)}$. Тоді при $1 \leq p < q \leq \infty$ має місце нерівність

$$\|t(\cdot)\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|t(\cdot)\|_q. \quad (8)$$

Співвідношення (8) називається нерівністю різних метрик С.М. Нікольського.

Забігаючи наперед, зазначимо, що у випадку $d = 1$ результати теорем 1 та 2 (при певних співвідношеннях між параметрами p і q) є відомими і слідують із результатів робіт [8]–[17], де класи $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних визначались через функцію $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l . Детальніше про це буде сказано в коментарях після доведення теорем. Зауважимо, що для розглядуваних класів порядок l є довільним фіксованим, тобто одним і тим самим в усіх результатах.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. Нехай $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, а функція $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$, а також умову (S_l) , тоді

$$E_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^\omega)_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}, \quad (9)$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доведення. Поскільки при $1 \leq \theta \leq \infty$ має місце вкладення

$$B_{p,1}^\omega \subset B_{p,\theta}^\omega \subset B_{p,\infty}^\omega \equiv H_p^\omega, \quad (10)$$

а права частина (9) не залежить від θ , то шукану оцінку зверху будемо встановлювати для величини $E_{\square_{2^n}}(H_p^\omega)_q$, а знизу — для $E_{\square_{2^n}}(B_{p,1}^\omega)_q$.

Спочатку одержимо в (9) оцінку зверху. Розглянемо всі можливі співвідношення між параметрами p та q .

Нехай спочатку $1 \leq q \leq p \leq \infty$, тоді використовуючи нерівність $\|\sigma_s(f, \cdot)\|_p \leq \omega(2^{-s})$ та той факт, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$, одержимо

$$\begin{aligned} E_{\square_{2^n}}(f)_q &\leq \|f(\cdot) - V_{2^{n-1}}(f, \cdot)\|_q = \|f(\cdot) - \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(f, \cdot)\|_q \leq \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_q \leq \\ &\leq \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_p \leq \sum_{s=n}^{\infty} \omega(2^{-s}) = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-\alpha s} \asymp \omega(2^{-n}). \end{aligned} \quad (11)$$

У випадку $1 \leq p < q \leq \infty$, враховуючи нерівність різних метрик Нікольського та (11), одержимо

$$\begin{aligned} E_{\square_{2^n}}(f)_q &\leq \|f(\cdot) - \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(f, \cdot)\|_q \leq \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_q \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_p \leq \\ &\leq \sum_{s=n}^{\infty} \omega(2^{-s}) 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-(\alpha-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))s} \ll \\ &\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-(\alpha-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))s} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \end{aligned}$$

Таким чином, оцінки зверху в (9) встановлені.

Перейдемо до доведення в (9) оцінок знизу.

Розглянемо випадок $1 \leq q \leq p \leq \infty$ і покажемо, що функція

$$f_1(x) = C_3 \omega(2^{-n}) \prod_{j=1}^d e^{i2^{n+1}x_j}, \quad C_3 > 0,$$

реалізує нижню оцінку в (9). Переконаємось, що $f_1 \in B_{\infty,1}^\omega$ при деякому виборі сталої $C_3 > 0$. Дійсно, згідно з (1) маємо $\|f_1(\cdot)\|_{B_{\infty,1}^\omega} = \omega^{-1}(2^{-(n+1)}) \|\sigma_{n+1}(f_1, \cdot)\|_\infty = C_3 \omega(2^{-n}) \times \omega^{-1}(2^{-(n+1)}) \ll 1$.

Далі, нехай $t_n^*(x) = \sum_{k \in \square_{2^n}} c_k^* e^{i(k,x)}$ — поліном найкращого наближення функції $f_1(x)$ у просторі $L_1(\pi_d)$. Тоді, з одного боку, беручи до уваги, що функція $e^{i(2^{n+1},x)}$ не містить гармонік з номерами з множини $\square_{2^n}$, можемо записати

$$(f_1(x) - t_n^*(x), e^{i(2^{n+1},x)}) = (f_1(x), e^{i(2^{n+1},x)}) \asymp \omega(2^{-n}) \|e^{i(2^{n+1},\cdot)}\|_2^2 = \omega(2^{-n}). \quad (12)$$

З іншого боку, внаслідок нерівності Гельдера будемо мати

$$(f_1(x) - t_n^*(x), e^{i(2^{n+1},x)}) \leq \|f_1(\cdot) - t_n^*(\cdot)\|_1 \|e^{i(2^{n+1},\cdot)}\|_\infty = E_{\square_{2^n}}(f_1)_1. \quad (13)$$

Співставивши (12) і (13), приходимо до оцінки

$$E_{\square_{2^n}}(B_{\infty,1}^\omega)_1 \geq E_{\square_{2^n}}(f_1)_1 \gg \omega(2^{-n}). \quad (14)$$

А тому внаслідок (10) і (14) маємо

$$E_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^\omega)_q \geq E_{\square_{2^n}}(B_{\infty,\theta}^\omega)_q \geq E_{\square_{2^n}}(B_{\infty,1}^\omega)_q \geq E_{\square_{2^n}}(B_{\infty,1}^\omega)_1 \gg \omega(2^{-n}).$$

Нехай $1 \leq p < q \leq \infty$. У випадку $1 \leq p < \infty$, $q = \infty$, розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_4 \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-1)} v_{n+1}(x), \quad C_4 > 0, \quad \text{де} \quad v_{n+1}(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)).$$

Оскільки (див., наприклад, [18], с. 66)

$$\|v_{n+1}(\cdot)\|_p \asymp 2^{nd(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (15)$$

то неважко переконатися, що $f_2 \in B_{p,1}^\omega$ при відповідному значенні сталої $C_4 > 0$. Дійсно, згідно з (1) та (15) маємо

$$\begin{aligned} \|f_2(\cdot)\|_{B_{p,1}^\omega} &= \sum_{s=n}^{n+2} \omega^{-1}(2^{-s}) \|\sigma_s(f_2, \cdot)\|_p \ll \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-1)} \sum_{s=n}^{n+2} \omega^{-1}(2^{-s}) \|v_s(\cdot)\|_p \asymp \\ &\asymp \omega(2^{-n}) \sum_{s=n}^{n+2} \omega^{-1}(2^{-s}) \ll 1, \end{aligned}$$

тобто $f_2 \in B_{p,1}^\omega$.

Далі, нехай $t_n^{**}(x) = \sum_{k \in \square_{2^n}} c_k^{**} e^{i(k,x)}$ — поліном найкращого наближення функції $f_2(x)$ у просторі $L_\infty(\pi_d)$. Тоді, з одного боку, приймаючи до уваги, що функція $v_{n+1}(x)$ не містить гармонік з “номерами” з множини $\square_{2^n}$, можемо записати

$$(f_2(x) - t_n^{**}(x), v_{n+1}(x)) = (f_2(x), v_{n+1}(x)) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-1)} \|v_{n+1}(\cdot)\|_2^2 \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{nd}{p}}. \quad (16)$$

З іншого боку, внаслідок нерівності Гельдера та оцінки (15), будемо мати

$$(f_2(x) - t_n^{**}(x), v_{n+1}(x)) \leq \|f_2(\cdot) - t_n^{**}(\cdot)\|_\infty \|v_{n+1}(\cdot)\|_1 \asymp \|f_2(\cdot) - t_n^{**}(\cdot)\|_\infty = E_{\square_{2^n}}(f_2)_\infty. \quad (17)$$

Співставивши (14) і (17), приходимо до оцінки

$$E_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^\omega)_\infty \geq E_{\square_{2^n}}(B_{p,1}^\omega)_\infty \geq E_{\square_{2^n}}(f_2)_\infty \gg \omega(2^{-n}) 2^{\frac{nd}{p}}.$$

Нехай тепер має місце випадок $1 \leq p < q < \infty$. Розглянемо функцію $f_2(x) = C_3 \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-1)} v_{n+1}(x)$, $C_3 > 0$.

Вище показано, що $f_2 \in B_{p,1}^\omega$. Тому, згідно з (7) та (15), маємо

$$\begin{aligned} E_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^\omega)_\infty &\geq E_{\square_{2^n}}(B_{p,1}^\omega)_\infty \geq E_{\square_{2^n}}(f_2)_q \asymp \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f_2)_q = \|f_2(\cdot) - S_{\square_{2^n}}(f_2, \cdot)\|_q = \\ &= \|f_2(\cdot)\|_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-1)} \|v_{n+1}(\cdot)\|_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \end{aligned}$$

Оцінки знизу в (9) доведені. Теорему 1 доведено. $\square$

Наслідок 1. Нехай $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, а функція $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$, а також умову (S_l) , тоді

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^\omega} \|f(\cdot) - V_{2^{n-1}}(f, \cdot)\|_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}. \quad (18)$$

Оцінку зверху в (18) наведено у доведенні теореми 1. Оцінка знизу випливає з очевидної нерівності $\|f(\cdot) - V_{2^{n-1}}(f, \cdot)\|_q \geq E_{\square_{2^n}}(f)_q$ та співвідношення (9).

Зауваження 1. При $d = 1$ та за певних співвідношень між параметрами p, q порядкова рівність (9) для класів H_p^Ω встановлена в [8, 9], а для класів $B_{p,\theta}^\Omega$, $1 \leq \theta < \infty$, — в [10]–[13], [17].

Теорема 2. Нехай $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, $(p, q) \neq (1, 1), (\infty, \infty)$, а функція $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$, а також умову (S_l). Тоді

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^\omega)_q \asymp \omega(2^{-n})2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}. \quad (19)$$

Доведення. Для $1 \leq p \leq \infty$, $1 < q < \infty$ співвідношення (19) слідує з (9) внаслідок (7).

Так як $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^\omega)_q \geq E_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^\omega)_q$, то для $1 < p \leq \infty$, $q = 1$ і $1 \leq p < \infty$, $q = \infty$ оцінки знизу вже встановлені в теоремі 1.

Встановимо оцінки зверху у випадках $1 < p \leq \infty$, $q = 1$ та $1 \leq p < \infty$, $q = \infty$.

Нехай спочатку $1 \leq p < \infty$, $q = \infty$. Для деякого $p_* \in (p, \infty)$, використовуючи нерівність різних метрик Нікольського, будемо мати

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_\infty &\leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}(\cdot)\|_\infty \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}(\cdot)\|_{p_*} 2^{\frac{s}{p_*}} \asymp \sum_{s=n+1}^{\infty} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_{p_*} 2^{\frac{s}{p_*}} \leq \\ &\leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_p 2^{\frac{s}{p_*}} 2^{s(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_*})} \ll \sum_{s=n+1}^{\infty} \omega(2^{-s}) 2^{\frac{s}{p}} \ll \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}}. \end{aligned}$$

У випадку $1 < p \leq \infty$, $q = 1$ для деякого $p_{**} \in (1, p)$ одержуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_1 &\leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}(\cdot)\|_1 \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}(\cdot)\|_{p_{**}} \asymp \sum_{s=n+1}^{\infty} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_{p_{**}} \leq \\ &\leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_p \ll \sum_{s=n+1}^{\infty} \omega(2^{-s}) \ll \omega(2^{-n}). \end{aligned}$$

Оцінки зверху в (19) доведені. Теорему 2 доведено. $\square$

Зауваження 2. При $d = 1$ та за певних співвідношень між параметрами p, q порядкову рівність (19) для класів H_p^Ω встановлено в [8, 9], а для класів $B_{p,\theta}^\Omega$, $1 \leq \theta < \infty$, — в [10]–[17].

Зауваження 3. При $\omega(t) = t^r$ і за відповідних умов на параметри p, q і r точні за порядком оцінки величин $E_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^r)_q$ і $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^r)_q$ одержано в роботі [19].

ЛІТЕРАТУРА

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*// Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – Т.5. – С. 483–522.

2. Yongping Liu, Guiqiao Xu *The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes*// J. Complexity. – 2002. – V.18, №3. – P. 815–832.
3. Никольский С.М. *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных*// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1951. – Т.38. – С. 244–278.
4. Бесов О.В. *Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения*// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1961. – Т.60. – С. 42–61.
5. Dinh Dung, Mai Xuan Thao. *Optimal recovery of periodic functions using wavelet decompositions*// Vietnam J. Math. – 2002. – V.30, №3. – P. 295–298.
6. Xu Guiqiao. *The n-widths for a generalized periodic Besov classes*// Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. – 2005. – V.25, №4. – P. 663–671.
7. Лизоркин П.И. *Обобщенные гильбертовы пространства $B_{p,\theta}^{(r)}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L_p^{(r)}$* // Сибирский матем. журн. – 1968. – Т.9, №5. – С. 1127–1152.
8. Пустовойтов Н.Н. *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности*// Anal. Math. – 1994. – Т.20, №1. – P. 35–48.
9. Пустовойтов Н.Н. *О приближении и характеристизации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида*// Anal. Math. – 2003. – Т.29, №3. – P. 201–218.
10. Yongsheng Sun, Heping Wang *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness*// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. – 1997. – V.219. – С. 356–377.
11. Стасюк С.А. *Найкраще наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega(\gamma)$ в метриці простору L_q* // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т.2, №2. – С. 258–267.
12. Стасюк С.А. *Найкраще наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega(\gamma)$ періодичних функцій багатьох змінних в метриці простору L_p* // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т.3, №4. – С. 255–265.
13. Стасюк С.А. *Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних*// Укр. матем. журн. – 2004. – Т.56, №11. – С. 1557–1568.
14. Стасюк С.А. *Наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці*// Укр. матем. журн. – 2002. – Т.54, №11. – С. 1551–1559.
15. Федунік О.В. *Оцінки апроксимативних характеристик класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q* // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т.2, №2. – С. 268–294.
16. Стасюк С.А., Федунік О.В. *Апроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних*// Укр. матем. журн. – 2006. – Т.58, №5. – С. 692–704.
17. Стасюк С.А. *Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B_{p,\theta}^\Omega$* // Мат. заметки. – 2010. – Т.87, № 1. – С. 108–121.
18. Темляков В.Н. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1986. – Т.178. – С. 1–112.
19. Романюк А.С. *Приближение изотропных классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q* // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – Т.5, №1. – С. 263–278.