УДК 517.51

С. А. Стасюк

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ПОЛІНОМАМИ ЗІ СПЕКТРОМ В КУБІЧНИХ ОБЛАСТЯХ

S. A. Stasyuk. *Approximation of classes $B^{\omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables by polynomials with spectrum from cubic areas* , Mat. Stud. **35** (2011), 66–73.

We have obtained exact order estimates for error of approximation of classes $B^{\omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables by trigonometric polynomials with spectrum from cubic areas.

С. А. Стасюк. *Приближение классов $B^{\omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами со спектром в кубических областях* // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №1. – С.66–73.

Получены точные по порядку оценки погрешности приближения классов $B^{\omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами со спектром в кубических областях.

1. Вступ. У статті отримано точні за порядком оцінки найкращого наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних тригонометричними поліномами зі спектром в кубічних областях, а також точні за порядком оцінки наближення функцій з цих класів кубічними сумами Фур'є.

Для викладу одержаних результатів наведемо необхідні позначення.

Нехай $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, позначає d-мірний простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi;\pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(x)$, норма в якому визначається рівністю

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, де $h \in \mathbb{R}^d$. Тоді кратну різницю порядку l, $l \in \mathbb{N}$, функції $f(x)$ в точці x з кроком h визначимо за формулою $\Delta^l_h f(x) = \Delta_h \Delta^{l-1}_h f(x), \quad \Delta^0_h f(x) = f(x)$.

Відштовхуючись від кратної різниці $\Delta^l_h f(x)$, задамо модуль неперервності l-го порядку функції $f \in L_p(\pi_d)$ згідно з формулою

$$\omega_l(f,t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta^l_h f(\cdot)\|_p, \quad \text{де} \quad |h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_d^2}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41A46, 42A10.

Нехай $\omega(t)$ — функція типу *модуля неперервності* порядку l, тобто $\omega(t)$ для $t \geq 0$ задовольняє такі умови: 1) $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ для $t > 0$; 2) $\omega(t)$ неперервна; 3) $\omega(t)$ зростає; 4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, $\omega(nt) \leq Cn^l\omega(t)$, де стала $C > 0$ не залежить від n і t.

Будемо вважати, що $\omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі-Стєчкіна ([1]). Це означає наступне.

Функція $\omega(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S), якщо $\omega(\tau)/\tau^{\alpha}$ *майже зростає* при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \leq C_1 \frac{\omega(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}\,, \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Функція $\omega(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\omega(\tau)/\tau^{\gamma}$ *майже спадає* при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \geq C_2 \frac{\omega(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}\,, \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Будемо говорити, що функція $f \in L_p(\pi_d)$ належить до простору $B^{\omega}_{p,\theta}$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$ (див., наприклад, [2]), якщо

$$\left(\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)} \right)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < \infty \text{ при } 1 \leq \theta < \infty \quad \text{і} \quad \sup_{t>0} \frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)} < \infty \text{ при } \theta = \infty,$$

де $\omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l.

Норма в просторі $B^{\omega}_{p,\theta}$ визначається за формулою

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} = \begin{cases} \|f\|_p + \left(\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)} \right)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \|f\|_p + \sup\limits_{t>0} \frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простори $B^{\omega}_{p,\theta}$ є узагальненням просторів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ ([3]–[4]), тобто $B^{\omega}_{p,\theta} \equiv B^{r}_{p,\theta}$, якщо $\omega(t) = t^r$, $0 < r < l$. Надалі за позначенням $B^{\omega}_{p,\theta}$ закріпимо позначення класу функцій $f \in L_p(\pi_d)$, для яких $\|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} \leq 1$. Класи $B^{\omega}_{p,\theta}$ з точки зору апроксимації розглядались в роботах [2], [5], [6].

В наведених нижче міркуваннях нам буде зручно користуватись еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) визначенням норми класів $B^{\omega}_{p,\theta}$.

Нехай $V_m(t), m \in \mathbb{N}$, позначає ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kt.$$

Тоді багатовимірне ядро $V_m(x), m \in \mathbb{N}, x \in \pi_d$, визначимо згідно з формулою $V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j)$. Нехай V_m — оператор, який задає згортку функції $f \in L_p(\pi_d)$ з багатовимірним ядром $V_m(x)$, тобто $V_m f(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x) * V_m(x) = V_m(f,x)$.

Покладемо для $f \in L_1(\pi_d)$

$$\sigma_0(f,x) = V_1(f,x), \sigma_s(f,x) = V_{2^s}(f,x) - V_{2^{s-1}}(f,x),\ s = 1, 2, \ldots .$$

В наведених позначеннях при $1 \le p \le \infty$ (з точністю до абсолютних сталих) класи $B^{\omega}_{p,\theta}$ можна визначити наступним чином (див., наприклад, [2]): $B^{\omega}_{p,\theta} = \{f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} \le 1\}$, де

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\sigma_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, \ 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\infty}} = \sup_{s \ge 0} \frac{\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p}{\omega(2^{-s})}, \tag{2}$$

у випадку, коли функція $\omega(t)$ є функцією типу модуля неперервності порядку l і задовольняє умови (S) та (S_l).

Зазначимо, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентні (з точністю до абсолютних сталих) означення норм функцій з класів $B^{\omega}_{p,\theta}$, використовуючи в (1) та (2) замість $\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p$ норми відповідних двійкових "блоків" ряду Фур'є функції f.

Для $f \in L_p(\pi_d)$ і $s \in \mathbb{Z}_+$ введемо позначення

$$f_{(0)}(x) = \widehat{f}(0), f_{(s)}(x) = \sum_{2^{s-1} \le \max\{|k_j| : \ 1 \le j \le d\} < 2^s} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}, \ s = 1, 2, \ldots,$$

де $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$, а $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коєфіцієнти Фур'є функції f.

Тоді при $1 < p < \infty$, якщо $\omega(t)$ задовольняє умови $1) - 4)$, (S) (з деяким $\alpha > 0$) та (S_l),

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-\theta}(2^{-s}) \|f_{(s)}(\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, \ 1 \le \theta < \infty, \tag{3}$$

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\infty}} = \sup_{s \ge 0} \frac{\|f_{(s)}(\cdot)\|_p}{\omega(2^{-s})}. \tag{4}$$

2. Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ в просторі L_q тригонометричними поліномами зі спектром в кубічних областях. Визначимо тепер величини, які будуть досліджуватись в роботі. Для $f \in L_1(\pi_d)$ і $n \in \mathbb{N}$ через $S_{\square_{2^n}}(f,x)$ позначимо кратну суму Фур'є

$$S_{\square_{2^n}}(f,x) = \sum\nolimits_{|k_j| < 2^n, \ 1 \le j \le d} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)} = \sum\nolimits_{k \in \square_{2^n}} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

($\square_{2^n} = \{k = (k_1, \ldots, k_d) : |k_j| < 2^n, 1 \le j \le d\}$), яку природно назвати кубічною сумою Фур'є функції $f(x)$. Зазначимо, що згідно з наведеними вище позначеннями суму $S_{\square_{2^n}}(f,x)$ можна записати у вигляді

$$S_{\square_{2^n}}(f,x) = \sum_{s=0}^{n} f_{(s)}(x).$$

Отже, для $f \in L_q(\pi_d), 1 \le q \le \infty$, позначимо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q = \|f(\cdot) - S_{\square_{2^n}}(f,\cdot)\|_q \tag{5}$$

і якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(F)_q = \sup\limits_{f \in F} \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q$.

Нехай $T_{\square_{2^n}} = \{t(x) : t(x) = \sum_{k\in\square_{2^n}} c_k e^{i(k,x)}, c_k \in \mathbb{C}\}$.

Для $f \in L_q(\pi_d), 1 \le q \le \infty$, покладемо

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q = \inf_{t(\cdot)\in T_{\square_{2^n}}} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_q \tag{6}$$

і для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$: $E_{\square_{2^n}}(F)_q = \sup\{E_{\square_{2^n}}(f)_q : f \in F\}$.

Зауважимо, що у випадку $1 < q < \infty$ для величин (5) і (6) має місце співвідношення (див., наприклад, [7])

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q \asymp \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q. \tag{7}$$

Одержані результати будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. Для функцій $\mu_1(n)$ и $\mu_2(n)$ запис $\mu_1(n) \ll \mu_2(n)$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(n) \le C\mu_2(n)$ для всіх $n \ge 1$. Співвідношення $\mu_1(n) \asymp \mu_2(n)$ рівносильне тому, що $\mu_1(n) \ll \mu_2(n)$ і $\mu_1(n) \gg \mu_2(n)$. Всі сталі C_j, $j = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від тих параметрів, які містяться в означенні класів, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Сформулюємо допоміжне твердження, яким будемо користуватися.

Теорема A ([3]). *Нехай $n = (n_1, \ldots, n_d)$, $n_j \in \mathbb{N}$ $(1 \le j \le d)$, і $t(x) = \sum_{|k_j|\le n_j} c_k e^{i(k,x)}$. Тоді при $1 \le p < q \le \infty$ має місце нерівність*

$$\|t(\cdot)\|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|t(\cdot)\|_q. \tag{8}$$

Співвідношення (8) називається нерівністю різних метрик С.М. Нікольського.

Забігаючи наперед, зазначимо, що у випадку $d = 1$ результати теорем 1 та 2 (при певних співвідношеннях між параметрами p і q) є відомими і слідують із результатів робіт [8]–[17], де класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних визначались через функцію $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l. Детальніше про це буде сказано в коментарях після доведення теорем. Зауважимо, що для розглядуваних класів порядок l є довільним фіксованим, тобто одним і тим самим в усіх результатах.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $1 \le p, q, \theta \le \infty$, а функція $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$, а також умову (S_l), тоді*

$$E_{\square_{2^n}}(B^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}, \tag{9}$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доведення. Поскільки при $1 \le \theta \le \infty$ має місце вкладення

$$B^{\omega}_{p,1} \subset B^{\omega}_{p,\theta} \subset B^{\omega}_{p,\infty} \equiv H^{\omega}_p, \tag{10}$$

а права частина (9) не залежить від θ, то шукану оцінку зверху будемо встановлювати для величини $E_{\square_{2^n}}(H^{\omega}_p)_q$, а знизу — для $E_{\square_{2^n}}(B^{\omega}_{p,1})_q$.

Спочатку одержимо в (9) оцінку зверху. Розглянемо всі можливі співвідношення між параметрами p та q.

Нехай спочатку $1 \le q \le p \le \infty$, тоді використовуючи нерівність $\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p \le \omega(2^{-s})$ та той факт, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$, одержимо

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q \le \|f(\cdot) - V_{2^{n-1}}(f,\cdot)\|_q = \|f(\cdot) - \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(f,\cdot)\|_q \le \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s(f,\cdot)\|_q \le$$

$$\le \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s(f,\cdot)\|_p \le \sum_{s=n}^{\infty} \omega(2^{-s}) = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-\alpha s} \asymp \omega(2^{-n}). \qquad (11)$$

У випадку $1 \le p < q \le \infty$, враховуючи нерівність різних метрик Нікольського та (11), одержимо

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q \le \|f(\cdot) - \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(f,\cdot)\|_q \le \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s(f,\cdot)\|_q \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\sigma_s(f,\cdot)\|_p \le$$

$$\le \sum_{s=n}^{\infty} \omega(2^{-s}) 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-(\alpha - d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))s} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-(\alpha - d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))s} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Таким чином, оцінки зверху в (9) встановлені.

Перейдемо до доведення в (9) оцінок знизу.

Розглянемо випадок $1 \le q \le p \le \infty$ і покажемо, що функція

$$f_1(x) = C_3 \omega(2^{-n}) \prod_{j=1}^{d} e^{i2^{n+1}x_j}, \;\; C_3 > 0,$$

реалізує нижню оцінку в (9). Переконаємось, що $f_1 \in B^{\omega}_{\infty,1}$ при деякому виборі сталої $C_3 > 0$. Дійсно, згідно з (1) маємо $\|f_1(\cdot)\|_{B^{\omega}_{\infty,1}} = \omega^{-1}(2^{-(n+1)}) \|\sigma_{n+1}(f_1,\cdot)\|_\infty = C_3 \omega(2^{-n}) \times$ $\times \omega^{-1}(2^{-n-1}) \ll 1$.

Далі, нехай $t^*_n(x) = \sum_{k \in \square_{2^n}} c^*_k e^{i(k,x)}$ — поліном найкращого наближення функції $f_1(x)$ у просторі $L_1(\pi_d)$. Тоді, з одного боку, беручи до уваги, що функція $e^{i(2^{n+1},x)}$ не містить гармонік з номерами з множини $\square_{2^n}$, можемо записати

$$\big(f_1(x) - t^*_n(x), e^{i(2^{n+1},x)}\big) = \big(f_1(x), e^{i(2^{n+1},x)}\big) \asymp \omega(2^{-n}) \|e^{i(2^{n+1},\cdot)}\|_2^2 = \omega(2^{-n}). \qquad (12)$$

З іншого боку, внаслідок нерівності Гельдера будемо мати

$$\big(f_1(x) - t^*_n(x), e^{i(2^{n+1},x)}\big) \le \|f_1(\cdot) - t^*_n(\cdot)\|_1 \|e^{i(2^{n+1},\cdot)}\|_\infty = E_{\square_{2^n}}(f_1)_1. \qquad (13)$$

Співставивши (12) і (13), приходимо до оцінки

$$E_{\square_{2^n}}(B^{\omega}_{\infty,1})_1 \ge E_{\square_{2^n}}(f_1)_1 \gg \omega(2^{-n}). \qquad (14)$$

А тому внаслідок (10) і (14) маємо

$$E_{\square_{2^n}}(B^{\omega}_{p,\theta})_q \ge E_{\square_{2^n}}(B^{\omega}_{\infty,\theta})_q \ge E_{\square_{2^n}}(B^{\omega}_{\infty,1})_q \ge E_{\square_{2^n}}(B^{\omega}_{\infty,1})_1 \gg \omega(2^{-n}).$$

Нехай $1 \le p < q \le \infty$. У випадку $1 \le p < \infty$, $q = \infty$, розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_4 \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-1)} \upsilon_{n+1}(x), \quad C_4 > 0, \quad \text{де} \quad \upsilon_{n+1}(x) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)).$$

Оскільки (див., наприклад, [18], с. 66)

$$\|\upsilon_{n+1}(\cdot)\|_p \asymp 2^{nd(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{15}$$

то неважко переконатися, що $f_2 \subset B^{\omega}_{p,1}$ при відповідному значенні сталої $C_4 > 0$. Дійсно, згідно з (1) та (15) маємо

$$\|f_2(\cdot)\|_{B^{\omega}_{p,1}} = \sum_{s=n}^{n+2} \omega^{-1}(2^{-s}) \|\sigma_s(f_2, \cdot)\|_p \ll \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-1)} \sum_{s=n}^{n+2} \omega^{-1}(2^{-s}) \|\upsilon_s(\cdot)\|_p \asymp$$
$$\asymp \omega(2^{-n}) \sum_{s=n}^{n+2} \omega^{-1}(2^{-s}) \ll 1,$$

тобто $f_2 \in B^{\omega}_{p,1}$.

Далі, нехай $t^{**}_n(x) = \sum_{k \in \square_{2^n}} c^{**}_k e^{i(k,x)}$ — поліном найкращого наближення функції $f_2(x)$ у просторі $L_\infty(\pi_d)$. Тоді, з одного боку, приймаючи до уваги, що функція $\upsilon_{n+1}(x)$ не містить гармонік з “номерами” з множини $\square_{2^n}$, можемо записати

$$\big(f_2(x) - t^{**}_n(x), \upsilon_{n+1}(x)\big) = (f_2(x), \upsilon_{n+1}(x)) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-1)} \|\upsilon_{n+1}(\cdot)\|_2^2 \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{nd}{p}}. \tag{16}$$

З іншого боку, внаслідок нерівності Гельдера та оцінки (15), будемо мати

$$\big(f_2(x) - t^{**}_n(x)), \upsilon_{n+1}(x)\big) \le \|f_2(\cdot) - t^{**}_n(\cdot)\|_\infty \|\upsilon_{n+1}(\cdot)\|_1 \asymp \|f_2(\cdot) - t^{**}_n(\cdot)\|_\infty = E_{\square_{2^n}}(f_2)_\infty. \tag{17}$$

Співставивши (14) і (17), приходимо до оцінки

$$E_{\square_{2^n}}(B^{\omega}_{p,\theta})_\infty \ge E_{\square_{2^n}}(B^{\omega}_{p,1})_\infty \ge E_{\square_{2^n}}(f_2)_\infty \gg \omega(2^{-n}) 2^{\frac{nd}{p}}.$$

Нехай тепер має місце випадок $1 \le p < q < \infty$. Розглянемо функцію $f_2(x) = C_3 \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-1)} \upsilon_{n+1}(x), C_3 > 0$.

Вище показано, что $f_2 \in B^{\omega}_{p,1}$. Тому, згідно з (7) та (15), маємо

$$E_{\square_{2^n}}(B^{\omega}_{p,\theta})_\infty \ge E_{\square_{2^n}}(B^{\omega}_{p,1})_\infty \ge E_{\square_{2^n}}(f_2)_q \asymp \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f_2)_q = \|f_2(\cdot) - S_{\square_{2^n}}(f_2, \cdot)\|_q =$$
$$= \|f_2(\cdot)\|_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-1)} \|\upsilon_{n+1}(\cdot)\|_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Оцінки знизу в (9) доведені. Теорему 1 доведено. □

Наслідок 1. *Нехай $1 \le p, q, \theta \le \infty$, а функція $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > d\big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big)_+$, а також умову (S_l), тоді*

$$\sup_{f \in B^{\omega}_{p,\theta}} \|f(\cdot) - V_{2^{n-1}}(f, \cdot)\|_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}. \tag{18}$$

Оцінку зверху в (18) наведено у доведенні теореми 1. Оцінка знизу випливає з очевидної нерівності $\|f(\cdot)-V_{2^{n-1}}(f,\cdot)\|_q \geq E_{\square_{2^n}}(f)_q$ та співвідношення (9).

Зауваження 1. При $d=1$ та за певних співвідношень між параметрами p, q порядкова рівність (9) для класів H_p^{Ω} встановлена в [8, 9], а для класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$, $1\leq\theta<\infty$, — в [10]–[13], [17].

Теорема 2. *Нехай* $1\leq p,q,\theta\leq\infty$, $(p,q)\neq(1,1),(\infty,\infty)$, *а функція* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha>d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+$, *а також умову* (S_l). *Тоді*

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^{\omega})_q \asymp \omega(2^{-n})2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}. \tag{19}$$

Доведення. Для $1\leq p\leq\infty$, $1<q<\infty$ співвідношення (19) слідує з (9) внаслідок (7).

Так як $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^{\omega})_q \geq E_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^{\omega})_q$, то для $1<p\leq\infty$, $q=1$ і $1\leq p<\infty$, $q=\infty$ оцінки знизу вже встановлені в теоремі 1.

Встановимо оцінки зверху у випадках $1<p\leq\infty$, $q=1$ та $1\leq p<\infty$, $q=\infty$.

Нехай спочатку $1\leq p<\infty$, $q=\infty$. Для деякого $p_*\in(p,\infty)$, використовуючи нерівність різних метрик Нікольського, будемо мати

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_\infty \leq \sum_{s=n+1}^{\infty}\|f_{(s)}(\cdot)\|_\infty \leq \sum_{s=n+1}^{\infty}\|f_{(s)}(\cdot)\|_{p_*}2^{\frac{s}{p_*}} \asymp \sum_{s=n+1}^{\infty}\|\sigma_s(f,\cdot)\|_{p_*}2^{\frac{s}{p_*}} \leq$$

$$\leq \sum_{s=n+1}^{\infty}\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p 2^{\frac{s}{p_*}}2^{s(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_*})} \ll \sum_{s=n+1}^{\infty}\omega(2^{-s})2^{\frac{s}{p}} \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}.$$

У випадку $1<p\leq\infty$, $q=1$ для деякого $p_{**}\in(1,p)$ одержуємо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_1 \leq \sum_{s=n+1}^{\infty}\|f_{(s)}(\cdot)\|_1 \leq \sum_{s=n+1}^{\infty}\|f_{(s)}(\cdot)\|_{p_{**}} \asymp \sum_{s=n+1}^{\infty}\|\sigma_s(f,\cdot)\|_{p_{**}} \leq$$

$$\leq \sum_{s=n+1}^{\infty}\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p \ll \sum_{s=n+1}^{\infty}\omega(2^{-s}) \ll \omega(2^{-n}).$$

Оцінки зверху в (19) доведені. Теорему 2 доведено. $\square$

Зауваження 2. При $d=1$ та за певних співвідношень між параметрами p, q порядкову рівність (19) для класів H_p^{Ω} встановлено в [8, 9], а для класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$, $1\leq\theta<\infty$, — в [10]–[17].

Зауваження 3. При $\omega(t)=t^r$ і за відповідних умов на параметри p, q і r точні за порядком оцінки величин $E_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^{r})_q$ і $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^{r})_q$ одержано в роботі [19].

ЛІТЕРАТУРА

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*// Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – Т.5. – С. 483–522.

2. Yongping Liu, Guiqiao Xu *The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes*// J. Complexity. – 2002. – V.18, №3. – P. 815–832.
3. Никольский С.М. *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных*// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1951. – Т.38. – С. 244–278.
4. Бесов О.В. *Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения*// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1961. – Т.60. – С. 42–61.
5. Dinh Dung, Mai Xuan Thao. *Optimal recovery of periodic functions using wavelet decompositions*// Vietnam J. Math. – 2002. – V.30, №3. – P. 295–298.
6. Xu Guiqiao. *The n-widths for a generalized periodic Besov classes*// Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. – 2005. – V.25, №4. – P. 663–671.
7. Лизоркин П.И. *Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$* // Сибирский матем. журн. – 1968. – Т.9, №5. – С. 1127–1152.
8. Пустовойтов Н.Н. *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности*// Anal. Math. – 1994. – Т.20, №1. – P. 35–48.
9. Пустовойтов Н.Н. *О приближении и характеризации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида*// Anal. Math. – 2003. – Т.29, №3. – P. 201–218.
10. Yongsheng Sun, Heping Wang *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness*// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. – 1997. – V.219. – С. 356–377.
11. Стасюк С.А. *Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\gamma)$ в метриці простору L_q*// Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т.2, №2. – С. 258–267.
12. Стасюк С.А. *Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\gamma)$ періодичних функцій багатьох змінних в метриці простору L_p*// Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т.3, №4. – С. 255–265.
13. Стасюк С.А. *Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних*// Укр. матем. журн. – 2004. – Т.56, №11. – С. 1557–1568.
14. Стасюк С.А. *Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці*// Укр. матем. журн. – 2002. – Т.54, №11. – С. 1551–1559.
15. Федуник О.В. *Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторы L_q*// Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т.2, №2. – С. 268–294.
16. Стасюк С.А., Федуник О.В. *Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних*// Укр. матем. журн. – 2006. – Т.58, №5. – С. 692–704.
17. Стасюк С.А. *Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$*// Мат. заметки. – 2010. – Т.87, № 1. – С. 108–121.
18. Темляков В.Н. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1986. – Т.178. – С. 1–112.
19. Романюк А.С. *Приближение изотропных классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q*// Теорія наближення функцій та суміжні питання. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – Т.5, №1. – С. 263–278.

Інститут математики НАН України,
stasyuk@imath.kiev.ua

Надійшло 24.07.2009