УДК 517.576

М. М. Грицiв, М. М. Шеремета

ТРИЧЛЕННА ПОКАЗНИКОВА АСИМПТОТИКА ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦIЛОГО РЯДУ ДIРIХЛЕ

M. M. Hrytsiv, M. M. Sheremeta. *Three-term exponential asymtotic for the maximal term of an entire Dirichlet series*, Mat. Stud. **35** (2011), 37–49.

Conditions on the coefficients and the exponents of an entire Dirichlet series, under which for its maximal term the asymptotic equality $\ln\mu(\sigma) = T_1 e^{\varrho_1\sigma} + T_2 e^{\varrho_2\sigma} + (\tau + o(1))e^{\varrho\sigma}$ $(\sigma \to +\infty)$ is valid, where $0 < \varrho < \varrho_2 < \varrho_1 < +\infty$, $T_1 > 0$, $T_2 \in R\backslash\{0\}$ and $\tau \in R\backslash\{0\}$, are found.

Н. Н. Грыцив, М. Н. Шеремета. *Трехчленная показательная асимптотика логарифма максимального члена целого ряда Дирихле* // Мат. Студiї. – 2011. – Т.35, №1. – С.37–49.

Найдены условия на коэффициенты и показатели целого ряду Дирихле, при выполнении которых для его максимального члена $\ln\mu(\sigma)$ справедливо асимптотическое равенство $\ln\mu(\sigma) = T_1 e^{\varrho_1\sigma} + T_2 e^{\varrho_2\sigma} + (\tau + o(1))e^{\varrho\sigma}$ $(\sigma \to +\infty)$, где $0 < \varrho < \varrho_2 < \varrho_1 < +\infty$, $T_1 > 0$, $T_2 \in R\backslash\{0\}$ и $\tau \in R\backslash\{0\}$.

1. Вступ. Для цiлої функцiї f порядку $\varrho \in (0, +\infty)$ i типу $\tau \in (0, +\infty)$ ще у 1903 р. Е. Лiндельоф [1] знайшов умови на тейлоровi коефiцiєнти, за яких $\ln\max\{|f(z)|\colon |z| = r\} = (1 + o(1))\tau r^{\varrho}$ при $r \to +\infty$. Цей результат для функцiй експонцiйного типу був передвiдкритий у 1979 р. М. В. Говоровим i Н. М. Черних [2]. Безпосереднiм узагальненням степеневого розвинення цiлої функцiї є цiлий (абсолютно збiжний у всiй комплекснiй площинi) ряд Дiрiхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

де (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послiдовнiсть невiд'ємних чисел $(\lambda_0 = 0)$. Зростання ряду (1) ототожнюють зi зростанням функцiї $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)|\colon t \in R\}$. Знаходження зв'язку мiж зростанням $M(\sigma, F)$ при $\sigma \to +\infty$ i спаданням коефiцiєнтiв a_n ряду (1) здiйснюється у два етапи. Спочатку знаходять зв'язок мiж зростанням максимального члена $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n)\colon n \geq 0\}$ ряду (1) i спаданням коефiцiєнтiв a_n, а потiм з огляду на нерiвнiсть Кошi $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ знаходяться оцiнки зверху $\mu(\sigma, F)$ через $M(\sigma, F)$. Отже, теорiя максимального члена є одним iз центральних мiсць у загальнiй теорiї рядiв Дiрiхле. У 1998 р. М. В. Заболоцький i М. М. Шеремета [3], узагальнюючи теорему Е. Лiндельофа, вказали необхiдну i достатню умову на a_n i λ_n для того, щоб $\ln\mu(\sigma, F) = (1 + o(1))\Phi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, для додатної необмеженої на $(-\infty, +\infty)$ функцiї Φ такої, що її похiдна Φ' є невiд'ємною, неперервною i зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. З отриманого ними результату випливає, що для того,

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

щоб $\ln\mu(\sigma,F)=(1+o(1))T_R e^{\varrho_R\sigma}$ при $\sigma\to+\infty$, де $0<T_R<+\infty$ і $0<\varrho_R<+\infty$, необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon\in(0,T_R)$: 1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln|a_n|\le-\frac{\lambda_n}{\varrho}\ln\frac{n}{e\varrho(T_R+\varepsilon)}$ для всіх $n\ge n_0$ та 2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $\ln|a_{n_k}|\ge-\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho}\ln\frac{\lambda_{n_k}}{e\varrho(T_R-\varepsilon)}$ для всіх $k\ge1$ і $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}}=1$.

Зв'язки між зростанням $\ln\mu(\sigma,F)$ і спаданням a_n у термінах двочленної асимптотики вперше розглянуто в [4]. Для двочленної показникової асимптотики в [4] доведено, що для того, щоб $\ln\mu(\sigma,F)=T_Re^{\varrho_R\sigma}+(1+o(1))\tau e^{\varrho\sigma},\ \sigma\to+\infty$, де $0<\varrho<\varrho_R<+\infty$, $T_R>0$ і $\tau\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:

1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln|a_n|\le-\frac{\lambda_n}{\varrho_R}\ln\frac{\lambda_n}{e\varrho_RT_R}+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{\varrho_RT_R}\right)^{\varrho/\varrho_R}$ для всіх $n\ge n_0$;
2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $\ln|a_{n_k}|\ge-\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_R}\times$ $\times\ln\frac{\lambda_{n_k}}{e\varrho_RT_R}+(\tau-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_RT_R}\right)^{\varrho/\varrho_R}$ і $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\varrho+\varrho_R}{2\varrho_R}}\right)$ $(k\to+\infty)$.

Ці дослідження були продовжені в [5]. З отриманого там результату про багаточленну показникову асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле (1) випливає, що якщо $T_1>0,\ \ T_2\in R\backslash\{0\},\ \ \tau\in R\backslash\{0\},\ \ 0<\varrho<\varrho_2<\varrho_1$ і $\varrho_2<\frac{\varrho_1+\varrho}{2}$, то для того, щоб

$$\ln\mu(\sigma,F)=T_1e^{\varrho_1\sigma}+T_2e^{\varrho_2\sigma}+\tau(1+o(1))e^{\varrho\sigma}\ (\sigma\to+\infty),\tag{2}$$

необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:
1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\ge n_0$

$$\ln|a_n|\le-\frac{\lambda_n}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_n}{e\varrho_1T_1}+T_2\left(\frac{\lambda_n}{\varrho_1T_1}\right)^{\varrho_2/\varrho_1}+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{\varrho_1T_1}\right)^{\varrho/\varrho_1};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що при $k\to+\infty$

$$\ln|a_{n_k}|\ge-\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_{n_k}}{e\varrho_1T_1}+T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1T_1}\right)^{\varrho_2/\varrho_1}+(\tau-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1T_1}\right)^{\varrho/\varrho_1}\ \text{і}\ \lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\varrho_1+\varrho}{2\varrho_1}}\right).$$

Постає природне запитання, за яких умов на (a_n) і (λ_n) асимптотична рівність (2) буде правильною, якщо умова $\varrho_2<\frac{\varrho_1+\varrho}{2}$ не виконується. Цій проблемі присвячена наша стаття. У доведенні теореми 1 використовуватимемо результати статей [3, 6, 7].

Через $\Omega(+\infty)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty,+\infty)$ функцій Φ, таких що похідна Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$. Нехай φ — функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma)=\sigma-\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Лема 1 ([6, 7]). *Якщо ряд (1) цілий і $\Phi\in\Omega(+\infty)$, то для того, щоб $\ln\mu(\sigma)\le\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma\ge\sigma_0$, необхідно і досить, щоб $\ln|a_n|\le-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n\ge n_0$.*

Для $\Phi\in\Omega(+\infty)$ і чисел $0<a<b<+\infty$ приймемо

$$G_1(a,b,\Phi)=\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt,\ \ G_2(a,b,\Phi)=\Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)dt\right).$$

Лема 2 ([3, 7]). *Нехай $\Phi\in\Omega(+\infty)$. Для кожних $0<a<b<+\infty$ виконується нерівність $G_1(a,b,\Phi)<G_2(a,b,\Phi)$.*

Лема 3 ([7]). *Нехай $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і $\ln|a_{n_k}| \geq -\lambda_{n_k}\Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел. Тоді для всіх $\sigma \in [\varphi(\lambda_{n_k}), \varphi(\lambda_{n_k+1})]$ і всіх $k \geq k_0$ правильна нерівність $\ln\mu(\sigma) \geq \Phi(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi) - G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi))$.*

Лема 4 ([7]). *Нехай $\Phi_1 \in \Omega(+\infty)$, $\Phi_2 \in \Omega(+\infty)$ і $\Phi_1(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma) \leq \Phi_1(\sigma)$ для всіх $\sigma \geq \sigma_0$. Тоді $\ln|a_n| \leq -\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n))(n \geq n_0)$ та існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $\ln|a_{n_k}| \geq -\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k}))$ і*

$$G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \geq \Phi_1\left(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}\int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}} \varphi_2(t)dt\right),$$

де Ψ_j і φ_j побудовані, як і вище, за Φ_j.

Позначимо $\tau^* = \tau I_{\{\varrho\geq 2\varrho_2-\varrho_1\}}(\varrho) - \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2} I_{\{\varrho\leq 2\varrho_2-\varrho_1\}}(\varrho)$, де $I_E(\varrho)$ — характеристична функція множини E, тобто $I_E(\varrho) = 1$, коли $\varrho \in E$, $I_E(\varrho) = 0$, коли $\varrho \notin E$. Правильною є така теорема.

Теорема 1. *Для того, щоб $\ln\mu(\sigma)$ мав тричленну показникову асимптотику (2), необхідно, а у випадку, коли $\varrho \geq 2\varrho_2 - \varrho_1$, і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:*
1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -\frac{\lambda_n}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_n}{eT_1\varrho_1} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} + (\tau^* + \varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\max\{\varrho,\ 2\varrho_2-\varrho_1\}}{\varrho_1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq -\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_{n_k}}{eT_1\varrho_1} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} + (\tau^* - \varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\max\{\varrho,\ 2\varrho_2-\varrho_1\}}{\varrho_1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\varrho_1+\max\{\varrho,\ 2\varrho_2-\varrho_1\}}{2\varrho_1}}\right) \quad (k \to +\infty).$$

2. Основна лема. Надалі будемо вважати, що $\Phi \in \Omega(+\infty)$ — така функція, що

$$\Phi(\sigma) = T_1\exp\{\varrho_1\sigma\} + T_2\exp\{\varrho_2\sigma\} + \tau\exp\{\varrho\sigma\} + \delta\exp\{s\sigma\} \quad (\sigma \geq \sigma_0), \tag{3}$$

де $\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho,\ T_1,\ T_2, \tau$ такі ж, як у співвідношенні (2), а $0 < s \leq \varrho$ і $\delta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Позначимо $U(x) = \frac{1}{\varrho_1}\ln\frac{x}{T_1\varrho_1} - \frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}}$. Правильна наступна лема.

Лема 5. *Якщо функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що виконується (3), то для функції φ при $x \to +\infty$ справедливі наступні асимптотичні рівності :*

1) якщо $s = \varrho > 2\varrho_2 - \varrho_1$ і $\tau + \delta \neq 0$, то $\varphi(x) = U(x) - \frac{\varrho(\tau+\delta)}{T_1\varrho_1^2}(1 + o(1))\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho-\varrho_1}{\varrho_1}}$;

2) якщо $s = \varrho < 2\varrho_2 - \varrho_1$, то $\varphi(x) = U(x) + (1 + o(1))\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{2}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}}$;

3) якщо $s = \varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $\tau \neq \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ і $\tau + \delta \neq \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, то

$$\varphi(x) = U(x) - (1 + o(1))\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{T_1\varrho_1^2}\left(\tau + \delta - \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}};$$

4) якщо $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $s = 3\varrho_2 - 2\varrho_1 \neq 0$, $\tau = \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ і $\delta \neq \frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{6(T_1\varrho_1^2)^2(T_2\varrho_2)^3}$, то

$$\varphi(x) = U(x) + (1 + o(1))\frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{6(T_1\varrho_1^2)^2}(T_2\varrho_2)^3 - \delta\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{3(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}};$$

5) якщо $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $s = 4\varrho_2 - 3\varrho_1$, $3\varrho_2 - 2\varrho_1 = 0$, $\tau = \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ *і* $\delta \neq \left(\frac{2T_2}{3}\right)^4 \frac{\varrho_1^2}{216T_1^3}$ *, то*

$$\varphi(x) = U(x) - (1+o(1))\tfrac{1}{3T_1\varrho_1}\left(\left(\tfrac{2T_2}{3}\right)^4 \tfrac{\varrho_1^2}{216T_1^3} - \delta\right)\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}}.$$

Доведення. Оскільки $\Phi'(\sigma) = T_1\varrho_1 e^{\varrho_1\sigma} + T_2\varrho_2 e^{\varrho_2\sigma} + \tau\varrho e^{\varrho\sigma} + \delta s e^{s\sigma}$ $(\sigma \geq \sigma_0)$, то для знаходження асимптотики функції φ треба розв'язати рівняння

$$T_1\varrho_1 \exp\{\varrho_1\sigma\} + T_2\varrho_2 \exp\{\varrho_2\sigma\} + \tau\varrho \exp\{\varrho\sigma\} + \delta s \exp\{s\sigma\} = x. \tag{4}$$

Очевидно, що розв'язок $\sigma = \sigma(x)$ цього рівняння задовольняє умову $T_1\varrho_1 \exp\{\varrho_1\sigma\}(1 + o(1)) = x$ $(x \to +\infty)$, і тому будемо шукати його у вигляді

$$\sigma = \frac{1}{\varrho_1}\ln\frac{x}{T_1\varrho_1} + \alpha, \tag{5}$$

де $\alpha = \alpha(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$. Підставивши (5) в (4), отримаємо $T_1\varrho_1 \exp\left\{\ln\frac{x}{T_1\varrho_1} + \alpha\varrho_1\right\} +$ $+T_2\varrho_2 \exp\left\{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\ln\frac{x}{T_1\varrho_1} + \alpha\varrho_2\right\} + \tau\varrho\exp\left\{\frac{\varrho}{\varrho_1}\ln\frac{x}{T_1\varrho_1} + \alpha\varrho\right\} + \delta s \exp\left\{\frac{s}{\varrho_1}\ln\frac{x}{T_1\varrho_1} + \alpha s\right\} = x$, тобто $e^{\varrho_1\alpha} + \frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}} e^{\varrho_2\alpha} + \frac{\tau\varrho}{T_1\varrho_1}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho-\varrho_1}{\varrho_1}} e^{\varrho\alpha} + \frac{s\delta}{T_1\varrho_1}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{s-\varrho_1}{\varrho_1}} e^{s\alpha} = 1.$
Використовуючи асимптотичне розвинення показникової функції, звідси при $x \to +\infty$ отримуємо

$$\begin{gathered}\alpha = -\frac{\varrho_1\alpha^2}{2} - \frac{\varrho_1^2\alpha^3}{6} - \frac{\varrho_1^3\alpha^4}{24} + O(\alpha^5) - \\ -\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}}\left(1 + \varrho_2\alpha + \frac{\varrho_2^2\alpha^2}{2} + \frac{\varrho_2^3\alpha^3}{6} + O(\alpha^4)\right) - \\ -\frac{\tau\varrho}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho-\varrho_1}{\varrho_1}}\left(1 + \varrho\alpha + \frac{\varrho^2\alpha^2}{2} + O(\alpha^3)\right) - \frac{s\delta}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{s-\varrho_1}{\varrho_1}}(1 + O(\alpha)).\end{gathered} \tag{6}$$

З (6) видно, що

$$\alpha(x) = -\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}} + \beta(x), \tag{7}$$

де $\beta(x) = o(x^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}})$ $(x \to +\infty)$. Підставивши (7) в (6), одержимо

$$\begin{gathered}\beta = -\tfrac{\varrho_1}{2}\left(-\tfrac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}} + \beta(x)\right)^2 - \tfrac{\varrho_1^2}{6}\left(-\tfrac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}} + \beta(x)\right)^3 - \\ -\tfrac{\varrho_1^3}{24}\left(-\tfrac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}} + \beta(x)\right)^4 + O(x^{5(\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}) - \\ -\tfrac{T_2\varrho_2^2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}}\left(-\tfrac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}} + \beta(x)\right) - \\ -\tfrac{T_2\varrho_2^3}{2T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}}\left(-\tfrac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}} + \beta(x)\right)^2 - \\ -\tfrac{T_2\varrho_2^4}{6T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}}\left(-\tfrac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}} + \beta(x)\right)^3 + O(x^{5(\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}) -\end{gathered}$$

$$- \tfrac{\tau\varrho}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho-\varrho_1}{\varrho_1}} - \tfrac{\tau\varrho^2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho-\varrho_1}{\varrho_1}}\left(-\tfrac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}} + \beta(x)\right) -$$
$$-\tfrac{\tau\varrho^3}{2T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho+2\varrho_2-3\varrho_1}{\varrho_1}}\left(-\tfrac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}} + \beta(x)\right)^2 +$$
$$+ O(x^{(\varrho+3\varrho_2-4\varrho_1)/\varrho_1}) - \tfrac{s\delta}{T_1\varrho_1}\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{s-\varrho_1}{\varrho_1}} + O(x^{(s+\varrho_2-2\varrho_1)/\varrho_1}) \ \ (x \to +\infty),$$

звідки випливає, що

$$(1+o(1))\beta(x) = -\frac{\tau\varrho}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho-\varrho_1}{\varrho_1}} - \frac{s\delta}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{s-\varrho_1}{\varrho_1}} +$$
$$+ \frac{2\varrho_2-\varrho_1}{2}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} + \frac{\varrho_1^2-3\varrho_2^2}{6}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{3(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} +$$
$$+ \frac{4\varrho_2^2-\varrho_1^3}{24}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} + \frac{\tau\varrho^2}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho+\varrho_2-2\varrho_1}{\varrho_1}} -$$
$$- \frac{\tau\varrho^3}{2T_1\varrho_1^2}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho+2\varrho_2-3\varrho_1}{\varrho_1}} + O(x^{5(\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}) \ (x \to +\infty). \tag{8}$$

Якщо $s = \varrho > 2\varrho_2 - \varrho_1$ і $\tau + \delta \neq 0$, то $\varrho - \varrho_1 > 2(\varrho - \varrho_1) > 3(\varrho - \varrho_1) > 4(\varrho - \varrho_1) > 5(\varrho - \varrho_1)$ і з (8) отримуємо $\beta(x) = -(1+o(1))\frac{\varrho(\tau+\delta)}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho-\varrho_1}{\varrho_1}}$ $(x \to +\infty)$, звідки з огляду на (5) і (7) маємо твердження 1) леми 5.

Якщо ж $s = \varrho < 2\varrho_2 - \varrho_1$, то $2(\varrho_2 - \varrho_1) > \varrho - \varrho_1$ і з (8) отримуємо

$$\beta(x) = (1+o(1))\tfrac{2\varrho_2-\varrho_1}{2}\left(\tfrac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^2\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} \ \ (x \to +\infty),$$

тобто з огляду на (5) і (7) маємо твердження 2) леми 5.

Припустимо тепер, що $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$. Тоді рівність (8) має вигляд

$$(1+o(1))\beta(x) = -\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{T_1\varrho_1^2}\left(\tau - \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} +$$
$$+\left(\frac{\varrho_1^2-3\varrho_2^2}{6}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^3 + \frac{\tau(2\varrho_2-\varrho_1)^2}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{3(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} +$$
$$+ \left(\frac{4\varrho_2^3-\varrho_1^3}{24}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^4 - \frac{\tau(2\varrho_2-\varrho_1)^3}{2T_1\varrho_1^2}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^2\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} -$$
$$- \frac{s\delta}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{s-\varrho_1}{\varrho_1}} + O(x^{5(\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}) + O(x^{(\varrho_2+s-2\varrho_1)/\varrho_1}) \ (x \to +\infty). \tag{9}$$

Якщо $s = \varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $\tau \neq \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ і $\tau + \delta \neq \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, то з (9) випливає, що

$$\beta(x) = -(1+o(1))\tfrac{2\varrho_2-\varrho_1}{T_1\varrho_1^2}\left(\tau + \delta - \tfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}\right)\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} \ \ (x \to +\infty),$$

і отже, твердження 3) леми 5 доведено.

Якщо $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, і $\tau = \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, то з (9) при $x \to +\infty$ маємо

$$(1+o(1))\beta(x) = -\frac{s\delta}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{s-\varrho_1}{\varrho_1}} + \frac{(3\varrho_2-2\varrho_1)^2}{6}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{3(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} +$$
$$+\frac{4\varrho_2^3-\varrho_1^3-6(2\varrho_2-\varrho_1)^3}{24}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} + O(x^{5(\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}) + O(x^{(\varrho_2+s-2\varrho_1)/\varrho_1}), \tag{10}$$

а якщо додатково припустити, що $2\varrho_1 - 3\varrho_2 \neq 0$ і $s = 3\varrho_2 - 2\varrho_1 \neq 0$, то

$$\beta(x) = (1+o(1))\frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{6(T_1\varrho_1^2)^2}(T_2\varrho_2)^3-\delta\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{3(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}}.$$

З огляду на (5) і (7) маємо твердження 4) леми 5.

Нарешті, якщо $3\varrho_2 - 2\varrho_1 = 0$ і $0 < s = 4\varrho_2 - 3\varrho_1$, то з (10) маємо

$$(1+o(1))\beta(x) = \left(\frac{4\varrho_2^3-\varrho_1^3}{24}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^4 - \frac{(2\varrho_2-\varrho_1)^3}{4}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^4 - \frac{(4\varrho_2-3\varrho_1)\delta}{T_1\varrho_1^2}\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} =$$
$$= -\frac{\varrho_1^3}{648}\left(\frac{T_2\varrho_2}{T_1\varrho_1^2}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} + \frac{\delta\varrho_1}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}} = -\frac{1}{3T_1\varrho_1}\left(\left(\frac{2T_2}{3}\right)^4\frac{\varrho_1^2}{216T_1^3}-\delta\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}}$$

при $x \to +\infty$, тобто отримуємо твердження 5). Лему 5 повністю доведено. □

Позначимо

$$V(x) = \frac{x}{\varrho_1} + T_2\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} \text{ і } W(x) = \frac{x}{\varrho_1}\ln\frac{x}{eT_1\varrho_1} - T_2\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}.$$

Оскільки $(t\Psi(\varphi(t)))' = \varphi(t)$ і $\Phi(\varphi(t)) = t\varphi(t) - t\Psi(\varphi(t))$, то з леми 5 випливає наступна лема.

Лема 6. *Якщо функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що виконується (3), то при $x \to +\infty$ правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s = \varrho > 2\varrho_2 - \varrho_1$ і $\tau + \delta \neq 0$, то

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + (\tau+\delta+o(1))\frac{\varrho_1-\varrho}{\varrho_1}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho}{\varrho_1}},$$
$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) - (\tau+\delta+o(1))\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho}{\varrho_1}};$$

2) якщо $s = \varrho < 2\varrho_2 - \varrho_1$, то

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) - \left(\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1}+o(1)\right)\frac{(T_2\varrho_2)^2}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}},$$
$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) + \frac{1+o(1)}{2}\frac{(T_2\varrho_2)^2}{T_1\varrho_1^2}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}};$$

3) якщо $s = \varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $\tau \neq \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ і $\tau + \delta \neq \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, то

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \frac{2(\varrho_1-\varrho_2)}{\varrho_1}\left(\tau+\delta+o(1)-\frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}},$$
$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) - \left(\tau+\delta+o(1)-\frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}};$$

4) якщо $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $s = 3\varrho_2 - 2\varrho_1 \neq 0$, $\tau = \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ і $\delta \neq \frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{6(T_1\varrho_1^2)^2(T_2\varrho_2)^3}$, то

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \frac{3(\varrho_1-\varrho_2)}{\varrho_1}\left(\delta+o(1)-\frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{6}\frac{(T_2\varrho_2)^3}{(T_1\varrho_1^2)^2}\right)\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{\varrho_1}},$$

$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) - \tfrac{2(3\varrho_2-2\varrho_1)}{\varrho_1}\left(\delta + o(1) - \tfrac{3\varrho_2-2\varrho_1}{6}\tfrac{(T_2\varrho_2)^3}{(T_1\varrho_1^2)^2}\right)\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{\varrho_1}};$$

5) якщо $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $s = 4\varrho_2 - 3\varrho_1$, $3\varrho_2 - 2\varrho_1 = 0$, $\tau = \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ *і* $\delta \neq \left(\frac{2T_2}{3}\right)^4 \frac{\varrho_1^2}{216T_1^3}$, *то*

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \tfrac{2}{3}\left(\delta + o(1) - \tfrac{\varrho_1^2}{216}\tfrac{(T_2\varrho_2)^4}{(T_1\varrho_1^2)^3}\right)\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4\varrho_2-3\varrho_1}{\varrho_1}},$$

$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) - \left(\delta + o(1) - \tfrac{\varrho_1^2}{216}\tfrac{(T_2\varrho_2)^4}{(T_1\varrho_1^2)^3}\right)\left(\tfrac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4\varrho_2-3\varrho_1}{\varrho_1}}.$$

3. Асимптотичне поводження величин $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi)$ і $G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi)$.

Нехай $0 < t_k \uparrow +\infty$ і $t_{k+1} = (1 + \theta_k)t_k$ $(k \to +\infty)$. Використовуючи лему 6, неважко довести наступні три леми.

Лема 7. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to +\infty$ $(j \to \infty)$, то для цієї послідовності за умов будь-якого з тверджень леми 5*

$$G_1(t_{k_j}, t_{k_j}(1 + \theta_{k_j}), \Phi) = (1 + o(1))\frac{t_{k_j}}{\varrho_1} \ln \theta_{k_j} \quad (j \to +\infty).$$

Лема 8. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \theta \in (0, +\infty)$ $(j \to \infty)$, то для цієї послідовності за умов будь-якого з тверджень леми 5*

$$G_1(t_{k_j}, t_{k_j}(1 + \theta_{k_j}), \Phi) = (1 + o(1))\frac{(1+\theta)t_{k_j}}{\varrho_1\theta} \ln(1 + \theta) \quad (j \to +\infty).$$

Для формулювання наступної леми позначимо

$$A^*(t_k, \theta_k) = \frac{t_k}{\varrho_1} + \frac{t_k\theta_k}{2\varrho_1} - \frac{t_k\theta_k^2}{6\varrho_1} + \frac{T_2(\varrho_1-\varrho_2)}{\varrho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{\varrho_2/\varrho_1} + \frac{T_2(\varrho_1-\varrho_2)\varrho_2\theta_k}{2\varrho_1^2}\left(\frac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{\varrho_2/\varrho_1}.$$

Лема 9. *Нехай функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що виконується (3) і $\theta_k \to 0$ $(k \to +\infty)$. Тоді при $k \to +\infty$ правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s = \varrho > 2\varrho_2 - \varrho_1$ *і* $\tau + \delta \neq 0$, *то*

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = A^*(t_k, \theta_k) + O(t_k\theta_k^3) + O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2) + \tfrac{\varrho_1-\varrho}{\varrho_1}(\tau + \delta + o(1))\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{\varrho/\varrho_1};$$

2) якщо $s = \varrho < 2\varrho_2 - \varrho_1$, *то*

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = A^*(t_k, \theta_k) + O(t_k\theta_k^3) + O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2) - \left(\tfrac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1} + o(1)\right)\tfrac{(T_2\varrho_2)^2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{(2\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1};$$

3) якщо $s = \varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $\tau \neq \dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ *і* $\tau + \delta \neq \dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, *то*

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = A^*(t_k, \theta_k) + O(t_k\theta_k^3) + O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2) + \tfrac{2(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}\left(\tau + \delta + o(1) - \tfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}\right)\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{(2\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1};$$

4) якщо $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $\tau = \dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, $2\varrho_1 - 3\varrho_2 \neq 0$, $s = 3\varrho_2 - 2\varrho_1$ *і* $\delta \neq \dfrac{(3\varrho_2 - 2\varrho_1)}{6}\dfrac{(T_2\varrho_2)^3}{(T_1\varrho_1^2)^2}$, *то*

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = A^*(t_k, \theta_k) + O(t_k\theta_k^3) + O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2) + \tfrac{3(\varrho_1-\varrho_2)}{\varrho_1}\left(\delta + o(1) - \tfrac{3\varrho_2-2\varrho_1}{6}\tfrac{(T_2\varrho_2)^3}{(T_1\varrho_1^2)^2}\right)\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{(3\varrho_2-2\varrho_1)/\varrho_1};$$

5) якщо $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $\tau = \dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1 r_1^2}$, $2\varrho_1 - 3\varrho_2 = 0$, $s = 4\varrho_2 - 3\varrho_1$ *і* $\delta \neq \dfrac{\varrho_1^2}{216}\dfrac{(T(_2\varrho_2)^4}{(T_1\varrho_1^2)^3}$, *то*

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = A^*(t_k, \theta_k) + O(t_k\theta_k^3) + O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2) +$$
$$+ \tfrac{2}{3}\left(\delta + o(1) - \tfrac{1}{216\varrho_1}\tfrac{(T_2\varrho_2)^4}{(T_1\varrho_1)^3}\right)\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{(4\varrho_2-3\varrho_1)/\varrho_1}.$$

Знаходження асимптотики $G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi)$ значно складніше. Спочатку, використовуючи лему 5, знаходимо асимптотику $\kappa(t_k, t_{k+1}, \Phi) = \frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)dt$, а потім, використовуючи розвинення у степеневий ряд показникової функції, знаходимо асимптотику $G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi)$. В результаті отримуємо наступні три леми.

Лема 10. *Якщо існує зростаюча послідовність* (k_j) *натуральних чисел така, що* $\theta_{k_j} \to +\infty$ $(j \to \infty)$, *то для цієї послідовності за умов будь-якого з тверджень леми 5*

$$G_2(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) = (1+o(1))\tfrac{t_{k_j}}{e\varrho_1}(1+\theta_{k_j})^{(1+\theta_{k_j})/\theta_{k_j}} \quad (j \to +\infty).$$

Лема 11. *Якщо існує зростаюча послідовність* (k_j) *натуральних чисел така, що* $\theta_{k_j} \to \theta > 0$ $(j \to \infty)$, *то для цієї послідовності за умов будь-якого з тверджень леми 5*

$$G_2(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) = (1+o(1))\tfrac{t_{k_j}}{e\varrho_1}(1+\theta)^{(1+\theta)/\theta} \quad (j \to +\infty).$$

Щоб сформулювати наступний результат, позначимо

$$B^*(t_k, \theta_k) = \tfrac{t_k}{\varrho_1} + \tfrac{t_k\theta_k}{2\varrho_1} - \tfrac{t_k\theta_k^2}{24\varrho_1} + \tfrac{T_2(\varrho_1-\varrho_2)}{\varrho_1}\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{\varrho_2/\varrho_1} + \tfrac{T_2(\varrho_1-\varrho_2)\varrho_2\theta_k}{2\varrho_1^2}\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{\varrho_2/\varrho_1}.$$

Лема 12. *Якщо функція* $\Phi \in \Omega(+\infty)$ *така, що виконується (3), і* $\theta_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, *то при* $k \to \infty$ *правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s = \varrho > 2\varrho_2 - \varrho_1$ *і* $\tau + \delta \neq 0$, *то*

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B^*(t_k, \theta_k) + O(t_k\theta_k^3) + O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2) +$$
$$+ \tfrac{\varrho_1-\varrho}{\varrho_1}(\tau + \delta + o(1))\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{\varrho/\varrho_1};$$

2) якщо $s = \varrho < 2\varrho_2 - \varrho_1$, *то*

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B^*(t_k, \theta_k) + O(t_k\theta_k^3) + O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2) -$$
$$-\left(\tfrac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1} + o(1)\right)\tfrac{(T_2\varrho_2)^2}{T_1\varrho_1^2}\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{(2\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1};$$

3) якщо $s = \varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $\tau \neq \dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ *і* $\tau + \delta \neq \dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, *то*

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B^*(t_k, \theta_k) + O(t_k\theta_k^3) + O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2) +$$
$$+ \tfrac{2(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}\left(\tau + \delta + o(1) - \tfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}\right)\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{(2\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1};$$

4) якщо $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $\tau = \dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, $2\varrho_1 - 3\varrho_2 \neq 0$, $s = 3\varrho_2 - 2\varrho_1$ *і* $\delta \neq \frac{(3\varrho_2-2\varrho_1)}{6}\dfrac{(T_2\varrho_2)^3}{(T_1\varrho_1^2)^2}$, *то*

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B^*(t_k, \theta_k) + O(t_k\theta_k^3) + O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2) +$$
$$+ \tfrac{3(\varrho_1-\varrho_2)}{\varrho_1}\left(\delta + o(1) - \tfrac{3\varrho_2-2\varrho_1}{6}\tfrac{(T_2\varrho_2)^3}{(T_1\varrho_1^2)^2}\right)\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{(3\varrho_2-2\varrho_1)/\varrho_1};$$

5) якщо $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, $\tau = \dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1 r_1^2}$, $2_1 - 3\varrho_2 = 0$, $s = 4\varrho_2 - 3\varrho_1$ *і* $\delta \neq \dfrac{\varrho_1^2}{216}\dfrac{(T_2\varrho_2)^4}{(T_1\varrho_1^2)^3}$, *то*

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B^*(t_k, \theta_k) + O(t_k\theta_k^3) + O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2) +$$
$$+ \tfrac{2}{3}\left(\delta + o(1) - \tfrac{1}{216\varrho_1}\tfrac{(T_2\varrho_2)^4}{(T_1\varrho_1)^3}\right)\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{(4\varrho_2-3\varrho_1)/\varrho_1}.$$

З огляду на те, що

$$B^*(t_k,\theta_k)-A^*(t_k,\theta_k)=\frac{t_k\theta_k^2}{8\varrho_1}.$$

з лем 9 і 12 випливає наступна лема.

Лема 13. *Якщо функція* $\Phi\in\Omega(+\infty)$ *така, що виконується (3), і* $\theta_k\to 0$ $(k\to+\infty)$, *то*

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)-G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=\tfrac{t_k\theta_k^2}{8\varrho_1}+O(t_k\theta_k^3)+O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2)+g(t_k,\theta_k),$$

де при $k\to+\infty$ *правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s=\varrho>2\varrho_2-\varrho_1$ *і* $\tau+\delta\neq 0$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\varrho/\varrho_1}\right)$;

2) якщо $s=\varrho<2\varrho_2-\varrho_1$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{(2\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}\right)$;

3) якщо $s=\varrho=2\varrho_2-\varrho_1$, $\tau\neq\dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ *і* $\tau+\delta\neq\dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{(2\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}\right)$;

4) якщо $\varrho=2\varrho_2-\varrho_1$, $\tau=\dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, $2\varrho_1-3\varrho_2\neq 0$, $s=3\varrho_2-2\varrho_1$ *і* $\delta\neq\dfrac{(3\varrho_2-2\varrho_1)}{6}\dfrac{(T_2\varrho_2)^3}{(T_1\varrho_1^2)^2}$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{(3\varrho_2-2\varrho_1)/\varrho_1}\right)$;

5) якщо $\varrho=2\varrho_2-\varrho_1$, $\tau=\dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, $2\varrho_1-3\varrho_2=0$, $s=4\varrho_2-3\varrho_1$ *і* $\delta\neq\dfrac{\varrho_1^2}{216}\dfrac{(T_2\varrho_2)^4}{(T_1\varrho_1^2)^3}$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{(4\varrho_2-3\varrho_1)/\varrho_1}\right)$.

Нам буде потрібною також і така лема.

Лема 14. *Нехай функція* $\Phi_1\in\Omega(+\infty)$ *і* $\Phi_2\in\Omega(+\infty)$ *такі, що при* $\sigma\geq\sigma_0$

$$\Phi_1(\sigma)=T_1e^{\varrho_1\sigma}+T_2e^{\varrho_2\sigma}+\tau e^{\varrho\sigma}-\delta e^{s\sigma}\quad i\quad \Phi_2(\sigma)=T_1e^{\varrho_1\sigma}+T_2e^{\varrho_2\sigma}+\tau e^{\varrho\sigma}+\delta e^{s\sigma},$$

де $\delta>0$ *і* $s\leq\varrho$. *Припустимо, що* $t_{k+1}=(1+\theta_k)t_k$ *і*

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi_2)\geq\Phi_1(\kappa(t_k,t_{k+1},\Phi_2)). \tag{11}$$

Тоді $\theta_k\to 0$ $(k\to+\infty)$ *і*

$$\theta_k^2\leq\frac{16}{T_1}(\delta+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{(s-\varrho_1)/\varrho_1}+g^*(t_k,\theta_k)\quad(k\to+\infty), \tag{12}$$

де при $k\to\infty$ *правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s=\varrho>2\varrho_2-\varrho_1$ *і* $\tau+\delta\neq 0$, *то* $g^*(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{(\varrho-\varrho_1)/\varrho_1}\right)$;

2) якщо $s=\varrho<2\varrho_2-\varrho_1$, *то* $g^*(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{2(\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}\right)$;

3) якщо $s=\varrho=2\varrho_2-\varrho_1$, $\tau\neq\frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ *і* $\tau+\delta\neq\dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, *то* $g^*(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{2(\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}\right)$;

4) якщо $\varrho=2\varrho_2-\varrho_1$, $\tau=\dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, $2\varrho_1-3\varrho_2\neq 0$, $s=3\varrho_2-2\varrho_1$ *і* $\delta\neq\dfrac{(3\varrho_2-2\varrho_1)}{6}\dfrac{(T_2\varrho_2)^3}{(T_1\varrho_1^2)^2}$, *то* $g^*(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{3(\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}\right)$;

5) якщо $\varrho=2\varrho_2-\varrho_1$, $\tau=\dfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, $2\varrho_1-3\varrho_2=0$, $s=4\varrho_2-3\varrho_1$ *і* $\delta\neq\dfrac{\varrho_1^2}{216}\dfrac{(T_2\varrho_2)^4}{(T_1\varrho_1^2)^3}$, *то* $g^*(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{4(\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}\right)$.

Доведення. Оскільки $\Phi_1(\sigma)=\Phi_2(\sigma)-2\delta e^{s\sigma}$ і $\Phi_2(\kappa(t_k,t_{k+1},\Phi_2))=G_2(t_k,t_{k+1},\Phi_2)$, то з (11) маємо

$$G_1(t_k,t_{k+1},\Phi_2)\ge G_2(t_k,t_{k+1},\Phi_2)-2\delta\exp\{s\kappa(t_k,t_{k+1},\Phi_2)\}. \tag{13}$$

Припустимо, що $\varlimsup\limits_{k\to+\infty}\theta_k=+\infty$, тобто існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така , що $\theta_{k_j}\to+\infty$ $(j\to+\infty)$. При цьому отримаємо, що

$$2\delta\exp\{s\kappa(t_k,t_{k+1},\Phi_2)\}=o(G_2(t_k,t_{k+1},\Phi_2))\quad(k\to+\infty),$$

то для цієї послідовності з (13) за лемами 7 і 10 маємо

$$(1+o(1))\tfrac{t_{k_j}}{\varrho_1}\ln\theta_{k_j}\ge(1+o(1))\tfrac{t_{k_j}}{e\varrho_1}(1+\theta_{k_j})^{(1+\theta_{k_j})/\theta_{k_j}}\quad(j\to+\infty),$$

що неможливо. Якщо ж $\varlimsup\limits_{k\to+\infty}\theta_k=\theta\in(0,+\infty)$, то існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така , що $\theta_{k_j}\to\theta$ $(j\to+\infty)$, а для цієї послідовності з (13) за лемами 8 і 11 маємо $(1+o(1))\frac{(1+\theta)t_{k_j}}{\varrho_1\theta}\ln(1+\theta)\ge(1+o(1))\frac{t_{k_j}}{e\varrho_1}(1+\theta)^{(1+\theta)/\theta}\quad(j\to+\infty)$, тобто $\ln\left\{(1+\theta)^{(1+\theta)/\theta}\right\}\ge\frac{1}{e}(1+\theta)^{(1+\theta)/\theta}$. Остання нерівність є правильною тоді і тільки тоді, коли $(1+\theta)^{(1+\theta)}=e^{\theta}$, а ця рівність можлива лише за умови $\theta=0$. Отже, $\theta_k\to0$ $(k\to+\infty)$, і першу частину леми 14 доведено.

Нехай тепер $s=\varrho>2\varrho_2-\varrho_1$ і $\tau+\delta\ne0$. Тоді з огляду на твердження 1) лем 9 та 12 (13) при $k\to+\infty$ маємо

$$A^*(t_k,\theta_k)+O(t_k\theta_k^3)+O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2)+\tfrac{\varrho_1-\varrho}{\varrho_1}(\tau+\delta+o(1))\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{\varrho/\varrho_1}\ge$$

$$\ge B^*(t_k,\theta_k)+O(t_k\theta_k^3)+O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2)+\tfrac{\varrho_1-\varrho}{\varrho_1}(\tau+\delta+o(1))\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{\varrho/\varrho_1}-2(\delta+o(1))\left(\tfrac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{s/\varrho_1},$$

тобто отримуємо

$$\frac{t_k\theta_k^2}{8\varrho_1}\le O(t_k\theta_k^3)+O(t_k^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2)+o(t_k^{\varrho/\varrho_1})+2(\delta+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\varrho_1}\right)^{s/\varrho_1}\quad(k\to+\infty), \tag{14}$$

звідки випливає твердження 1) леми 14. Решта тверджень 2)–5) леми 14 доводяться подібно із застосуванням (13) і відповідних тверджень лем 9 і 12. □

4. Зв'язок між зростанням максимального члена і спаданням коефіцієнтів. Неважко перевірити, що теорема 1 випливає з наступних чотирьох теорем.

Теорема 2. *Якщо $\varrho>2\varrho_2-\varrho_1$, то для того, щоб $\ln\mu(\sigma)$ мав тричленну показникову асимптотику (2), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:*
1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\ge n_0$

$$\ln|a_n|\le-\tfrac{\lambda_n}{\varrho_1}\ln\tfrac{\lambda_n}{eT_1\varrho_1}+T_2\left(\tfrac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}+(\tau+\varepsilon)\left(\tfrac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho}{\varrho_1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що при $k\to+\infty$

$$\ln|a_{n_k}|\ge-\tfrac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1}\ln\tfrac{\lambda_{n_k}}{eT_1\varrho_1}+T_2\left(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}+(\tau-\varepsilon)\left(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho}{\varrho_1}},\ \lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\big(\lambda_{n_k}^{\frac{\varrho+\varrho_1}{2\varrho_1}}\big).$$

Теорема 3. *Якщо $\varrho<2\varrho_2-\varrho_1$, то для того, щоб $\ln\mu(\sigma)$ мав тричленну показникову асимптотику (2), необхідно, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:*
1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\ge n_0$

$$\ln|a_n|\le-\tfrac{\lambda_n}{\varrho_1}\ln\tfrac{\lambda_n}{eT_1\varrho_1}+T_2\left(\tfrac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}-\left(\tfrac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}+\varepsilon\right)\left(\tfrac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що при $k \to +\infty$

$$\ln|a_{n_k}| \geq -\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_{n_k}}{eT_1\varrho_1} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} - \left(\frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2} - \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}},\ \lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\big(\lambda_{n_k}^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}\big).$$

Теорема 4. *Якщо $s = \varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$ і $\tau \neq \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, то для того, щоб $\ln\mu(\sigma)$ мав тричленну показникову асимптотику (2), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:*
1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -\frac{\lambda_n}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_n}{eT_1\varrho_1} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} + \left(\tau - \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2} + \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що при $k \to +\infty$

$$\ln|a_{n_k}| \geq -\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_{n_k}}{eT_1\varrho_1} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} + \left(\tau - \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2} - \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}},\ \lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\big(\lambda_{n_k}^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}\big).$$

Теорема 5. *Якщо $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$ і $\tau = \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$, то для того, щоб $\ln\mu(\sigma)$ мав тричленну показникову асимптотику (2), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:*
1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -\frac{\lambda_n}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_n}{eT_1\varrho_1} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} + \varepsilon\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що при $k \to +\infty$

$$\ln|a_{n_k}| \geq -\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_{n_k}}{eT_1\varrho_1} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} - \varepsilon\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}} \quad \text{і} \quad \lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}\right).$$

Теорему 2 доведено в [5], тому, з огляду на аналогію, зупинимось тільки на доведенні теореми 4.

Доведення теореми 4. Почнемо з необхідності. З (2) для довільного

$$\delta \in \left(0, \min\left\{|\tau|, \left|\tau - \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}\right|\right\}\right)$$

і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\delta)$ отримуємо умову леми 1 з $\Phi_1(\sigma) = T_1e^{\varrho_1\sigma} + T_2e^{\varrho_2\sigma} + (\tau - \delta)e^{\varrho\sigma}$ і $\Phi_2(\sigma) = T_1e^{\varrho_1\sigma} + T_2e^{\varrho_2\sigma} + (\tau + \delta)e^{\varrho\sigma}$. Тому за цією лемою правильні нерівності $\ln|a_n| \leq -\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n))(n \geq n_0)$ і $\ln|a_{n_k}| \geq -\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k}))$, для зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел, такої, що $G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \geq \Phi_1(\kappa(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2))$.

Але за твердженням 3) леми 6 при $n \to +\infty$ з $s = \varrho$

$$\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) = \frac{\lambda_n}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_n}{eT_1\varrho_1} - T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} - \left(\tau + \delta - \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2} + o(1)\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}},$$

і для $k \to +\infty$

$$\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) = \frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_{n_k}}{eT_1\varrho_1} - T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} - \left(\tau - \delta - \frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2} + o(1)\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}},$$

а за твердженням 3) леми 14 маємо

$$\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^2 = \theta_k^2 \leq \frac{16}{T_1}(\delta + o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho-\varrho_1}{\varrho_1}} + o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{2(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}}\right) \quad (k \to +\infty),$$

тобто $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} \leq \frac{4}{\sqrt{T_1}}(\delta + o(1))\left(\frac{1}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho-\varrho_1}{2\varrho_1}}\lambda_{n_k}^{\frac{\varrho+\varrho_1}{2\varrho_1}} \quad (k \to +\infty).$

Завдяки довільності δ і рівності $\varrho = 2\varrho_2 - \varrho_1$, з цих співвідношень випливають співвідношення (15)–(17).

Доведемо достатність умов (15)–(17). Використовуючи лему 1 і твердження 3) леми 6 з $s=\varrho$, неважко показати, що з огляду на довільність ε з умови (15) випливає асимптотична нерівність

$$\ln\mu(\sigma)\le T_1e^{\varrho_1\sigma}+T_2e^{\varrho_2\sigma}+(\tau+o(1))e^{\varrho\sigma},\quad (\sigma\to+\infty). \tag{18}$$

Далі, за лемою 3 і твердженням 3) леми 13 з $s=\varrho$ з нерівності (16) для всіх $\sigma\in[\varphi(\lambda_{n_k}),\varphi(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k\ge k_0$, як вище, з огляду на умову (17) маємо

$$\begin{aligned}\ln\mu(\sigma)&\ge\Phi_1(\sigma)-(G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi_1)-G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi_1))=\\&=\Phi_1(\sigma)-\tfrac{\lambda_{n_k}\theta_k^2}{8\varrho_1}+O(\lambda_{n_k}\theta_k^3)+O(\lambda_{n_k}^{\varrho_2/\varrho_1}\theta_k^2)+o\left(\lambda_{n_k}^{(2\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}\right)=\\&=\Phi_1(\sigma)+o\left(\lambda_{n_k}^{(2\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}\right)\quad(k\to+\infty),\end{aligned}$$

і, отже,

$$\ln\mu(\sigma)\ge\Phi_1(\sigma)+o\left(\Phi'(\sigma)^{(2\varrho_2-\varrho_1)/\varrho_1}\right)=\Phi_1(\sigma)+o\left((e^{\varrho_1\sigma})^{\frac{\varrho}{\varrho_1}}\right)=\Phi_1(\sigma)+o\left(e^{\varrho\sigma}\right)\quad(\sigma\to+\infty),$$

звідки, завдяки довільності δ, отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma)\ge T_1e^{\varrho_1\sigma}+T_2e^{\varrho_2\sigma}+(\tau+o(1)e^{\varrho\sigma}\ \ (\sigma\to+\infty). \tag{19}$$

З (18) і (19) випливає (2). Теорему 4 доведено. □

На завершення зауважимо, що подібні результати можна отримати і у випадках, які відповідають твердженням 4) і 5) леми 5. Наприклад, правильні є наступні теореми.

Теорема 6. *Якщо $\varrho=2\varrho_2-\varrho_1$, $\tau=\frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ і $3\varrho_2-2\varrho_1\ne0$, то для того, щоб $\ln\mu(\sigma)$ мав тричленну показникову асимптотику (2), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$: 1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\ge n_0$*

$$\ln|a_n|\le-\frac{\lambda_n}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_n}{eT_1\varrho_1}+T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}-\frac{2(3\varrho_2-2\varrho_1)}{\varrho_1}\left(\frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{6(T_1\varrho_1^2)^2(T_2\varrho_2)^3}+\varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{\varrho_1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}|\ge-\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_{n_k}}{eT_1\varrho_1}+T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}-\frac{2(3\varrho_2-2\varrho_1)}{\varrho_1}\left(\frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{6(T_1\varrho_1^2)^2(T_2\varrho_2)^3}-\varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{3\varrho_2-2\varrho_1}{\varrho_1}}$$

і $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\big(\lambda_{n_k}^{\frac{3\varrho_2-\varrho_1}{2\varrho_1}}\big)$ $(k\to+\infty)$.

Теорема 7. *Якщо $\varrho=2\varrho_2-\varrho_1$, $\tau=\frac{(T_2\varrho_2)^2}{2T_1\varrho_1^2}$ і $3\varrho_2-2\varrho_1=0$, то для того, щоб $\ln\mu(\sigma)$ мав тричленну показникову асимптотику (2), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$: 1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\ge n_0$*

$$\ln|a_n|\le-\frac{\lambda_n}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_n}{eT_1\varrho_1}+T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}-\left(\frac{\varrho_1^2}{216}\frac{(T_2\varrho_2)^2}{(T_1\varrho_1^2)^3}+\varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4\varrho_2-3\varrho_1}{\varrho_1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}|\ge-\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1}\ln\frac{\lambda_{n_k}}{eT_1\varrho_1}+T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}-\left(\frac{\varrho_1^2}{216}\frac{(T_2\varrho_2)^2}{(T_1\varrho_1^2)^3}-\varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{4\varrho_2-3\varrho_1}{\varrho_1}}$$

і $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\big(\lambda_{n_k}^{\frac{2\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}}\big)$ $(k\to+\infty)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lindelöf E. *Sur la détermination de la croissance des fonctions entieres définies par un développement de Taylor*// Bull. Soc. Math. – 1903. – V.27, №1. – P. 1–62.
2. Говоров Н.В., Черных Н.М. *О признаках полной регулярности роста некоторых классов целых функций экспоненциального типа, представленных интегралами Бореля, рядами Ньютона, Дирихле и степенными рядами* // Докл. АН СССР.– 1979. – Т.249, №6. – С. 1295–1299.
3. Заболоцький М.В., Шеремета М.М. *Узагальнення теореми Ліндельофа*// Укр. матем. журн. – 1998. – Т.50, №9. – С. 1117–1192.
4. Шеремета М.Н. *Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле*// Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1990. – Т.54. – С. 16–25.
5. Sumyk O.M. *On n-member asymptotics for logarithm of maximal term of entire Dirichlet series*// Mat. Stud. – 2001. – V.15, №2. – P. 200–208.
6. Шеремета М.М., Федыняк С.И. *О производной ряда Дирихле*// Сиб. мат. журн. – 1998. – Т.39, №1. – С. 206–223.
7. Шеремета М.М., Сумик О.М. *Звя'зок між зростанням спряжених за Юнгом функцій*// Mat. Stud. – 1999. – Т.11, №1. – С. 41–47.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет
tftj@franko.lviv.ua

Надійшло 02.10.2009
Після переробки 15.06.2010