УДК 512.53

В. О. Пєхтєрєв, К. С. Третьяк

КОНГРУЕНЦІЇ НАПІВГРУПИ $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$

V. O. Pyekhtyeryev, K. S. Tretyak. *Congruences of the semigroup* $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$, Mat. Stud. **35** (2011), 22–27.

We describe congruences of the semigroup $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ of all order-preserving partial bijections on the set $\mathbb{N}$ with the natural order. In particular, we prove that this semigroup contains only one non-Rees congruence.

В. А. Пехтерев, К. С. Третьяк. *Конгруэнции полугруппы* $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №1. – С.22–27.

Описаны конгруэнции единственного (с точностью до изоморфизма) $\mathcal{H}$-сечения $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ инверсно-симметрической полугруппы $\mathcal{IS}_{\mathbb{N}}$. В частности, доказано, что данная полугруппа содержит всего одну конгруэнцию, которая не является конгруэнцией Риса.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел разом з природнім лінійним порядком. Напівгрупа $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ всіх частково визначених ін'єкцій $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, що зберігають природній порядок на $\mathbb{N}$ (тобто для всіх $x < y$ з області визначення a маємо, що $a(x) < a(y)$), є цікавим об'єктом дослідження, оскільки вона є перетином інверсно-симетричної напівгрупи $\mathcal{IS}_{\mathbb{N}}$ та напівгрупи усіх монотонних перетворень множини $\mathbb{N}$. Вивченню інверсно-симетричної напівгрупи $\mathcal{IS}_X$ присвячено не один десяток робіт, оскільки вона вже давно займає одне з центральних місць у теорії напівгруп. Напівгрупи монотонних перетворень також досліджувались різними авторами (див. [1], [3]–[5]).

У роботі [6] доведено, що $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ містить рівно по одному елементу з кожного $\mathcal{H}$-класу симетричної інверсної напівгрупи $\mathcal{IS}_{\mathbb{N}}$ всіх частково визначених ін'єктивних перетворень множини $\mathbb{N}$. Іншими словами, $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ є $\mathcal{H}$-зрізом $\mathcal{IS}_{\mathbb{N}}$. Також у цій роботі показано, що всі $\mathcal{H}$-зрізи $\mathcal{IS}_{\mathbb{N}}$ можуть бути отримані з $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ за допомогою спряження, тобто мають вигляд $\pi^{-1}\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}\pi$ для деякої перестановки π симетричної групи $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$, а тому є ізоморфними між собою.

Ця робота присвячена вивченню конгруенцій напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$. Зокрема, показано, що дана напівгрупа містить лише одну конгруенцію, що не є конгруенцією Ріса.

2. Теоретичні відомості. Ми будемо дотримуватись стандартних позначень (див. [2]). Для кожної часткової ін'єкції $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ символами $\operatorname{dom}(a)$ та $\operatorname{im}(a)$ будемо позначати область визначення і образ перетворення a відповідно. Кардинал $\operatorname{rank}(a) = |\operatorname{dom}(a)| = |\operatorname{im}(a)|$ називається *рангом* перетворення a. Очевидно, для довільних перетворень a та b напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ виконується нерівність $\operatorname{rank}(ab) \le \min(\operatorname{rank}(a), \operatorname{rank}(b))$. Для кожної пари рівнопотужних підмножин A та B множини $\mathbb{N}$ існує таке єдине перетворення $a \in \mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$, що $\operatorname{dom}(a) = A$ та $\operatorname{im}(a) = B$, яке надалі позначатимемо символом $\pi_{A,B}$. Напівгрупа $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ є інверсною, та $\pi_{A,B}^{-1} = \pi_{B,A}$. До того ж $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ містить

2010 *Mathematics Subject Classification:* 20M20, 20M10.

одиницю, що збігається з тотожним перетворенням $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, та нуль, що збігається з ніде не визначеним перетворенням.

Множина всіх двосторонніх ідеалів напівгрупи $\mathscr{IO}_{\mathbb{N}}$ утворює ланцюг

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_{k-1} \subset I_k \subset I_{k+1} \subset ... \subset I_F \subset \mathscr{IO}_{\mathbb{N}},$$

де $I_k = \{a \in \mathscr{IO}_{\mathbb{N}} \colon \operatorname{rank}(a) \leq k\}$, $I_F = \{a \in \mathscr{IO}_{\mathbb{N}} \colon \operatorname{rank}(a) < \infty\}$.

3. Основний результат. Напівгрупа $\mathscr{IO}_{\mathbb{N}}$, очевидно, містить конгруенції Ріса ρ_{I_k}, $k \in \mathbb{N}$, ρ_{I_F} і $\rho_{\mathscr{IO}_{\mathbb{N}}}$.

Далі для кожної пари перетворень a, b напівгрупи $\mathscr{IO}_{\mathbb{N}}$ позначимо символом $P_{a,b}{:=}\{n \in \operatorname{dom}(a) \cap \operatorname{dom}(b) \colon a(n) = b(n)\}$ та визначимо наступні перетворення

$$a \cap b{:=}a|_{P_{a,b}} = b|_{P_{a,b}},\ \ a \setminus (a \cap b){:=}a|_{\operatorname{dom}(a) \setminus P_{a,b}},\ \ b \setminus (a \cap b){:=}b|_{\operatorname{dom}(b) \setminus P_{a,b}}.$$

Для довільної трійки елементів a, b, c з $\mathscr{IO}_{\mathbb{N}}$ маємо

$$\begin{gathered} P_{a,b\cap c} = \{n \in \operatorname{dom}(a) \cap \operatorname{dom}(b \cap c) \colon a(n) = (b \cap c)(n)\} = \\ = \{n \in \operatorname{dom}(a) \cap \operatorname{dom}(b) \cap \operatorname{dom}(c) \colon a(n) = b(n) = c(n)\} = \\ = \{n \in \operatorname{dom}(a \cap b) \cap \operatorname{dom}(c) \colon (a \cap b)(n) = c(n)\} = P_{a\cap b,c}. \end{gathered}$$

Тому $a \cap (b \cap c) = (b \cap c)|_{P_{a,b\cap c}} = (b \cap c)|_{P_{a\cap b,c}} = (c|_{P_{b,c}})|_{P_{a\cap b,c}} = c|_{P_{a\cap b,c}} = (a \cap b) \cap c$, бо $P_{a\cap b,c} \subseteq P_{b,c}$. Отже, замість виразів $a \cap (b \cap c)$ та $(a \cap b) \cap c$ будемо писати $a \cap b \cap c$.

Розглянемо перетворення $ac \setminus (ac \cap bc)$ та $(a \setminus (a \cap b))c$. Тоді

$$\begin{gathered} \operatorname{dom}(ac \setminus (ac \cap bc)) = \operatorname{dom}(ac) \setminus P_{ac,bc} = \\ = \{n \in \operatorname{dom}(a) : a(n) \in \operatorname{dom}(c)\} \setminus \{n \in \operatorname{dom}(ac) \cap \operatorname{dom}(bc) \colon (ac)(n) = (bc)(n)\} = \\ = \{n \in \operatorname{dom}(a) \colon a(n) \in \operatorname{dom}(c)\} \setminus \{n \in \operatorname{dom}(a) \cap \operatorname{dom}(b) \colon a(n) = b(n) \in \operatorname{dom}(c)\} = \\ = \{n \in \operatorname{dom}(a) \colon a(n) \neq b(n), a(n) \in \operatorname{dom}(c)\} = \\ = \{n \in \operatorname{dom}(a \setminus (a \cap b)) \colon a(n) \in \operatorname{dom}(c)\} = \operatorname{dom}((a \setminus (a \cap b))c), \end{gathered}$$

причому для довільного елемента n з множини $\operatorname{dom}(ac \setminus (ac \cap bc))$ маємо, що $(ac \setminus (ac \cap bc))(n) = (ac)(n) = ((a \setminus (a \cap b))c)(n)$. Тому перетворення $ac \setminus (ac \cap bc)$ та $(a \setminus (a \cap b))c$ рівні.

Означення 1. Кажуть, що два перетворення a та b напівгрупи $\mathscr{IO}_{\mathbb{N}}$ мають *різницю* рангу ξ, якщо $\max(\operatorname{rank}(a \setminus (a \cap b)), \operatorname{rank}(b \setminus (a \cap b))) = \xi$.

Якщо обидва перетворення мають скінченні ранги, то вони, очевидно, мають різницю скінченного рангу. Якщо одне перетворення має скінченний ранг, а інше — нескінченний, то їх різниця буде нескінченного рангу. Два перетворення нескінченного рангу можуть мати різницю як скінченного, так і нескінченного рангу. Наприклад, перетворення $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ та $\mathrm{id}_{\mathbb{N}\setminus\{1\}}$ мають різницю рангу 1, а перетворення $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ та $\mathrm{id}_{2\mathbb{N}}$ — різницю нескінченного рангу.

Означення 2. Символом $\widetilde{\rho}$ позначимо бінарне відношення на напівгрупі $\mathscr{IO}_{\mathbb{N}}$, визначене за правилом $a\widetilde{\rho}\,b$ тоді і тільки тоді, коли a і b мають різницю скінченного рангу.

Твердження 1. *Відношення $\widetilde{\rho}$ є конгруенцією.*

Доведення. Відношення $\widetilde{\rho}$, очевидно, є симетричним і рефлексивним. Покажемо транзитивність. Нехай a, b, c — такі елементи напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$, що $a\widetilde{\rho}b$ та $b\widetilde{\rho}c$, тобто елементи a і b та b і c мають різниці скінченних рангів відповідно. Це означає, що множини $\operatorname{dom}(a \setminus (a \cap b))$, $\operatorname{dom}(b \setminus (a \cap b))$, $\operatorname{dom}(c \setminus (c \cap b))$ та $\operatorname{dom}(b \setminus (c \cap b))$ скінченні. Розглянемо перетворення $a \cap b \cap c$. З включень $\operatorname{dom}(a \setminus (a \cap (b \cap c))) \subset \operatorname{dom}(a \setminus (a \cap b)) \cup \operatorname{dom}(b \setminus (c \cap b))$ та $\operatorname{dom}(c \setminus ((a \cap b) \cap c)) \subset \operatorname{dom}(c \setminus (c \cap b)) \cup \operatorname{dom}(b \setminus (a \cap b))$ випливає, що множини $\operatorname{dom}(a \setminus (a \cap (b \cap c)))$ та $\operatorname{dom}(c \setminus ((a \cap b) \cap c))$ скінченні. Тому

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(a \setminus (a \cap c)) = |\operatorname{dom}(a \setminus (a \cap c))| = |\operatorname{dom}(a) \setminus P_{a,c}| \leq |\operatorname{dom}(a) \setminus P_{a,b\cap c}| = \\ = |\operatorname{dom}(a \setminus (a \cap (b \cap c)))| < \infty.\end{aligned}$$

Аналогічно $c \setminus (a \cap c)$ має скінченний ранг. Отже, за означенням 1, перетворення a та c мають різницю скінченного рангу, тобто $a\widetilde{\rho}c$. Таким чином, $\widetilde{\rho}$ — відношення еквівалентності. Для кожної пари перетворень a, b з $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ з того, що $a\widetilde{\rho}b$, випливає, що перетворення a та b мають різницю скінченного рангу, тобто перетворення $a \setminus (a \cap b)$ та $b \setminus (a \cap b)$ мають скінченні ранги. Тоді для довільного елемента c напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ перетворення $ac \setminus (ac \cap bc) = (a \setminus (a \cap b))c$ та $bc \setminus (ac \cap bc) = (b \setminus (a \cap b))c$ також мають скінченні ранги. Звідки ac та bc мають різницю скінченного рангу, тобто $(ac)\widetilde{\rho}(bc)$. Аналогічно $(ca)\widetilde{\rho}(cb)$. Отже, $\widetilde{\rho}$ — конгруенція. □

Твердження 2. *Конгруенція $\widetilde{\rho}$ не є конгруенцією Ріса.*

Доведення. Припустимо протилежне. Розглянемо перетворення $a := \operatorname{id}_{\mathbb{N}}$, $b := \operatorname{id}_{\mathbb{N}\setminus\{1\}}$ та $c := \operatorname{id}_{\{1\}}$. Тоді елементи a та b мають різницю рангу 1, тобто $a\widetilde{\rho}b$. Оскільки $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b) = \infty$ і $a \neq b$, то з того, що $\widetilde{\rho}$ є конгруенцією Ріса, випливає, що $I_{\widetilde{\rho}} = \mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$, тобто $\widetilde{\rho}$ є повним відношенням еквівалентності, тому $a\widetilde{\rho}c$. А це суперечить тому, що перетворення a та c мають різницю нескінченного рангу. Отримана суперечність доводить твердження. □

Неважко бачити, що конгруенція $\widetilde{\rho}$ має нескінченну кількість класів еквівалентності, бо, наприклад, перетворення $\operatorname{id}_{2^k\mathbb{N}}, k \in \mathbb{N}$ не є попарно еквівалентними.

Для того, щоб показати, що всі конгруенції на напівгрупі $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ вичерпуються наведеними конгруенціями Ріса ρ_{I_k}, $k \in \mathbb{N}$, ρ_{I_F} та $\rho_{\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}}$ і конгруенцією $\widetilde{\rho}$, сформулюємо та доведемо наступні твердження.

Твердження 3. *Нехай ρ — конгруенція на напівгрупі $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$. Якщо перетворення a з $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ ранга ξ конгруентне за відношенням ρ деякому перетворенню b з $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ меншого ранга η, то всі перетворення ранга не більшого за ξ еквівалентні між собою, тобто $I_\xi \subseteq I_\rho$.*

Доведення. Розглянемо два випадки.

Нехай $\xi = \infty$. Тоді η скінченний, а множина $A = \operatorname{dom}(a) \setminus \operatorname{dom}(b)$ нескінченна. З того, що ρ конгруенція, випливає, що $(\operatorname{id}_A \cdot a)\rho(\operatorname{id}_A \cdot b)$. Тобто $(\operatorname{id}_A \cdot a)\rho 0$, бо $\operatorname{id}_A \cdot b = 0$. Звідки $I_\rho \supseteq J(\operatorname{id}_A \cdot a) = \mathcal{IO}_{\mathbb{N}} = I_\xi$, бо ранг перетворення $\operatorname{id}_A \cdot a$ нескінченний.

Нехай ξ скінченне. Оскільки $\eta < \xi$, то існує такий елемент $m \in \mathbb{N}$, що $m \in \operatorname{dom}(a) \setminus \operatorname{dom}(b)$. З того, що $a\rho b$ випливає, що $(\operatorname{id}_{\{m\}} \cdot a)\rho(\operatorname{id}_{\{m\}} \cdot b)$, але $\operatorname{id}_{\{m\}} \cdot b = 0$, тому $\operatorname{id}_{\{m\}} \cdot a \in I_\rho$. Звідки $I_1 = J(\operatorname{id}_m \cdot a) \subseteq I_\rho$. Нехай всі перетворення, ранг яких не перевищує деяке натуральне число $k < \xi$, належать I_ρ. Покажемо, що це ж справедливо для елементів рангу $k+1$. Розглянемо таку підмножину $A \subseteq \operatorname{dom}(a)$, що $|A| = k+1$ і $m \in A$. Це завжди можна зробити внаслідок того, що $k+1 \leq \xi$. З того, що $a\rho b$ випливає, що $(\operatorname{id}_A \cdot a)\rho(\operatorname{id}_A \cdot b)$. Звідки $\operatorname{id}_A \cdot a \in I_\rho$, бо $\operatorname{rank}(\operatorname{id}_A \cdot b) \leq k$. Тому $I_{k+1} = J(\operatorname{id}_A \cdot a) \subseteq I_\rho$. Поєднуючи попередні міркування, отримаємо, що $I_\xi \subseteq I_\rho$. □

Наслідок 1. *Якщо два перетворення напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ еквівалентні за конгруенцією ρ, але не еквівалентні нулю, то їх ранги рівні.*

Наслідок 2. *Якщо перетворення a напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$, що має скінченний ранг, еквівалентне за конгруенцією ρ деякому перетворенню b з $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$, але не еквівалентне нулю, то $a = b$.*

Доведення. Нехай $\operatorname{rank}(a) = k$ для деякого натурального числа k. За наслідком 1 $\operatorname{rank}(b) = k$. Якщо $\operatorname{dom}(a) \neq \operatorname{dom}(b)$, то з того, що ρ — конгруенція, випливає, що $(\mathrm{id}_{\operatorname{dom}(a)} \cdot a)\rho(\mathrm{id}_{\operatorname{dom}(a)} \cdot b)$, тобто a конгруентне елементу меншого ранга. Тоді за твердженням 3 маємо $a\rho 0$, що суперечить умові. Отже, $\operatorname{dom}(a) = \operatorname{dom}(b)$. Аналогічно доводимо, що $\operatorname{im}(a) = \operatorname{im}(b)$. Звідки маємо, що $a = b$. □

Лема 1. *Нехай перетворення a напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ має нескінченний ранг і не лишає на місці жодного елемента, тобто для довільного $n \in \operatorname{dom}(a)$: $a(n) \neq n$. Тоді існує така нескінченна підмножина $A \subset \operatorname{dom}(a)$, що $a(A) \cap A = \varnothing$.*

Доведення. Оскільки множина $\operatorname{dom}(a)$ злічена, то множина $\operatorname{dom}(a)^2$ також злічена, та існує взаємно однозначне відображення $\varphi\colon \operatorname{dom}(a)^2 \to \operatorname{dom}(a)$. Розглянемо відображення $\widetilde{\varphi}\colon \operatorname{dom}(a) \to 2^{\operatorname{dom}(a)}$, де $2^{\operatorname{dom}(a)}$ — множина підмножин $\operatorname{dom}(a)$, визначене за правилом $\widetilde{\varphi}(n) = \varphi(\{n\} \times \operatorname{dom}(a))$ для кожного $n \in \operatorname{dom}(a)$. Оскільки φ бієкція, то всі множини $\widetilde{\varphi}(n)$ є зліченими, попарно не перетинаються, тобто $\widetilde{\varphi}(n) \cap \widetilde{\varphi}(m) = \varnothing$, коли $n \neq m$, та в об'єднанні дають усю множину $\operatorname{dom}(a)$. Якщо існує таке $n \in \operatorname{dom}(a)$, що $a(\widetilde{\varphi}(n)) \cap \widetilde{\varphi}(n) = \varnothing$, то лему доведено. В іншому разі для довільного $n \in \operatorname{dom}(a)$ маємо, що $a(\widetilde{\varphi}(n)) \cap \widetilde{\varphi}(n) \neq \varnothing$. Нехай $x_n \in a(\widetilde{\varphi}(n)) \cap \widetilde{\varphi}(n)$ для кожного $n \in \operatorname{dom}(a)$. Розглянемо такі $y_n \in \widetilde{\varphi}(n)$, що $a(y_n) = x_n$. Тоді внаслідок диз'юнктності множин $\widetilde{\varphi}(n), n \in \operatorname{dom}(a)$ множина $A := \{y_n \colon n \in \operatorname{dom}(a)\}$ є зліченою підмножиною множини $\operatorname{dom}(a)$. За умовою $a(y_n) \neq y_n$ для всіх $n \in \operatorname{dom}(a)$. Також $a(y_n) \neq y_m$ при $n \neq m$, бо $a(y_n) = x_n \in \widetilde{\varphi}(n), y_m \in \widetilde{\varphi}(m)$ за побудовою. Отже, $a(A) \cap A = \varnothing$. □

Твердження 4. *Якщо два еквівалентних за конгруенцією ρ перетворення напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ мають різницю нескінченного рангу, то ρ є повною конгруенцією, тобто всі перетворення еквівалентні між собою.*

Доведення. Для довільної пари еквівалентних за конгруенцією ρ елементів a, b з $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ з того, що вони мають різницю нескінченного рангу випливає, що або одне з перетворень має скінченний ранг, а інше — нескінченний, або обидва перетворення мають нескінченний ранг. Якщо ранг хоча б одного з елементів a чи b скінченний, то це твердження випливає з твердження 3. Нехай $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b) = \infty$. Покладемо $c = a \cap b$, $d = a \setminus c$, $e = b \setminus c$. Оскільки перетворення a і b мають різницю нескінченного рангу, то хоча б одне з перетворень d або e має нескінченний ранг. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $\operatorname{rank}(d) = \infty$. Домноживши $a\rho b$ зліва на $\mathrm{id}_{\operatorname{dom}(d)}$, а справа — на d^{-1}, отримаємо

$$(\mathrm{id}_{\operatorname{dom}(d)} \cdot a \cdot d^{-1})\rho(\mathrm{id}_{\operatorname{dom}(d)} \cdot b \cdot d^{-1}).$$

Звідки $(\mathrm{id}_{\operatorname{dom}(d)})\rho(\mathrm{id}_{\operatorname{dom}(d)} \cdot e \cdot d^{-1})$, оскільки

$$\mathrm{id}|_{\operatorname{dom}(d)} \cdot b = b|_{\operatorname{dom}(d)} = b|_{\operatorname{dom}(a)\setminus P_{a,b}} = b|_{(\operatorname{dom}(a)\setminus P_{a,b})\cap \operatorname{dom}(b)} = b|_{(\operatorname{dom}(a)\cap\operatorname{dom}(b))\setminus P_{a,b}} =$$
$$= b|_{\operatorname{dom}(a)\setminus P_{a,b}} = e|_{\operatorname{dom}(a)\setminus P_{a,b}} = e|_{\operatorname{dom}(d)} = \mathrm{id}|_{\operatorname{dom}(d)} \cdot e.$$

Позначимо $f{:=}\,\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(d)}\cdot e\cdot d^{-1}$. Якщо f має скінченний ранг, то наше твердження випливає з твердження 3, бо перетворення $\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(d)}$ має нескінченний ранг. Нехай $\mathrm{rank}(f)=\infty$. Тоді перетворення f задовольняє умовам леми 1, бо $d\cap e=0$. Тому існує така нескінченна підмножина $A\subset\mathrm{dom}(f)$, що $f(A)\cap A=\varnothing$, або, що те саме, $\mathrm{id}_A\cdot f\cdot\mathrm{id}_A=0$. Оскільки $\mathrm{dom}(f)\subset\mathrm{dom}(d)$, то $A\subset\mathrm{dom}(d)$. Домноживши $\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(d)}\,\rho f$ зліва і справа на id_A, отримаємо $\mathrm{id}_A\,\rho 0$. Позаяк ранг перетворення id_A нескінченний, то за твердженням 3 маємо, що ρ — повна конгруенція. □

Лема 2. *Якщо для конгруенції ρ на напівгрупі $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ існують такі нескінченна множина $A\subset\mathbb{N}$ та елемент m з доповнення $\mathbb{N}\setminus A$, для яких виконується*

$$\mathrm{id}_{A\cup\{m\}}\,\rho\,\mathrm{id}_A, \tag{1}$$

то для довільних диз'юнктних нескінченної та скінченної підмножин B і C множини натуральних чисел відповідно виконується

$$\mathrm{id}_{B\cup C}\,\rho\,\mathrm{id}_B\,. \tag{2}$$

Доведення. Спочатку доведемо лему для таких множин B і C, що $\max\limits_{n\in C} n<\max\limits_{m\in B} m$. Розглянемо множину $A'{:=}\{n\in A\colon n>m\}$, яка, очевидно, є нескінченною. Домноживши (1) на $\mathrm{id}_{A'\cup\{m\}}$, отримаємо

$$\mathop{\mathrm{id}}_{A'\cup\{m\}}\rho\,\mathrm{id}_{A'}\,. \tag{3}$$

Скористаємось методом математичної індукції за кількістю елементів у множині C.

Якщо $|C|=1$ і $C=\{k\}$, то k є мінімальним елементом множини $B\cup C$. Тому для перетворення $\pi_{B\cup C,A'\cup\{m\}}$ маємо, що $\pi_{B\cup C,A'\cup\{m\}}(k)=m$. Домноживши (3) на $\pi_{B\cup C,A'\cup\{m\}}$ зліва і на $\pi^{-1}_{B\cup C,A'\cup\{m\}}$ справа, отримаємо (2).

Припустимо, що твердження вірне, коли $|C|\le n-1$. Нехай $|C|=n$. Розглянемо множину $C_1{:=}C\setminus\{k\}$, де k — максимальний елемент множини C. Оскільки $|C_1|=n-1$, то за припущенням індукції маємо, що $\mathrm{id}_{(B\cup\{k\})\cup C_1}\,\rho\,\mathrm{id}_{B\cup\{k\}}$ та $\mathrm{id}_{B\cup\{k\}}\,\rho\,\mathrm{id}_B$. Звідки $\mathrm{id}_{B\cup C}\,\rho\,\mathrm{id}_B$, бо $B\cup C=B\cup\{k\}\cup C_1$.

Тепер нехай C — довільна диз'юнкта з B скінченна множина. Подамо множину B у вигляді диз'юнктного об'єднання множин $B'=\{n\in B\colon n<k\}$ та $B''=\{n\in B\colon n>k\}$, де k — максимальний елемент множини C. За попереднім випадком маємо $\mathrm{id}_{B'\cup C\cup B''}\,\rho\,\mathrm{id}_{B''}$ та $\mathrm{id}_{B'\cup B''}\,\rho\,\mathrm{id}_{B''}$, тому $\mathrm{id}_{B\cup C}\,\rho\,\mathrm{id}_B$. □

Твердження 5. *Якщо існують два різних перетворення нескінченного рангу a та b напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$, що мають різницю скінченного рангу і конгруентні за відношенням ρ, то довільні два перетворення напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$, які мають різницю скінченного рангу, також конгруентні за відношенням ρ.*

Доведення. Покладемо $c=a\cap b$, $d=a\setminus c$, $e=b\setminus c$. Тоді ранги елементів а d та e — скінченні, а тому c має нескінченний ранг. З того, що $a\ne b$, випливає, що хоча б одне з перетворень d та e не рівне нулю. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $d\ne 0$. Розглянемо деякий елемент m з множини $\mathrm{dom}(d)$. Домноживши $a\rho b$ зліва на $\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(c)\cup\{m\}}$ і справа на $a^{-1}\cdot\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(c)\cup\{m\}}$, отримаємо $\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(c)\cup\{m\}}\,\rho\,\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(c)}$, бо $b(m)\ne a(m)$, тобто для конгруенції ρ виконується умова леми 2.

Нехай $\pi_{A,B}$ — довільне перетворення скінченого рангу. Внаслідок леми 2 маємо, що

$$\mathrm{id}_{(\mathbb{N}\setminus A)\cup A}\,\rho\,\mathrm{id}_{\mathbb{N}\setminus A}\,. \tag{4}$$

Домноживши (4) на $\pi_{A,B}$ справа, отримаємо $\pi_{A,B}\rho 0$. Тому всі перетворення скінченного рангу еквіваленті нулю, а отже, еквівалентні між собою.

Далі нехай f, g — два перетворення напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ нескінченного рангу, які мають різницю скінченного рангу. Покладемо $h = f \cap g$, $s = f \setminus h$, $t = g \setminus h$. Тоді перетворення s і t мають скінченні ранги, а ранг h — нескінченний. За лемою 2 маємо

$$\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(h)\cup\mathrm{dom}(s)}\,\rho\,\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(h)}\,. \tag{5}$$

Домноживши (5) справа на f, отримаємо $f\rho h$, оскільки $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(h) \cup \mathrm{dom}(s)$. Аналогічно $g\rho h$. Таким чином, $f\rho g$. □

Теорема. *Напівгрупа $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ містить єдину відмінну від конгруенцій Ріса конгруенцію $\widetilde{\rho}$.*

Доведення. Нехай ρ — деяка конгруенція на напівгрупі $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$, яка не є конгруенцією Ріса. Тоді існують не рівні між собою перетворення a, b з $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$, еквівалентні за конгруенцією ρ, але не еквівалентні нулю. Якби перетворення a мало скінченний ранг, то з наслідка 2 отримали б $a = b$, але a і b не рівні між собою, тому $\mathrm{rank}(a) = \infty$. Аналогічно $\mathrm{rank}(b) = \infty$. Оскільки ρ не є повною конгруенцією, то для довільних елементів c і d напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$ з того, що $c\rho d$, за твердженням 4 випливає, що c і d мають різницю скінченного рангу, тобто $c\widetilde{\rho}d$. Звідки $\rho \subseteq \widetilde{\rho}$.

Зокрема, перетворення a і b мають різницю скінченного рангу, і внаслідок твердження 5 для довільних елементів c і d напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathbb{N}}$, які мають різницю скінченного рангу, тобто $c\widetilde{\rho}d$, маємо, що $c\rho d$. Звідки $\widetilde{\rho} \subseteq \rho$. Отже, $\rho = \widetilde{\rho}$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Fernandes V.H. *The monoid of all injective order preserving partial transformations on a finite chain*// Semigroup Forum. – 1997. – V.54, №2. – P. 230–236.
2. Ganyushkin O., Mazorchuk V. Introduction to classical finite transformation semigroup. – London: Springer, 2009. – 314 p.
3. Ganyushkin O., Mazorchuk V. *On the structure of $\mathcal{IO}_n$*// Semigroup Forum. – 2003. – V.66, №3. – P. 455–483.
4. Garba G.U. *Nilpotents in semigroups of partial one-to-one order-preserving mappings*// Semigroup Forum. – 1994. – V.48, №1. – P. 37–49.
5. Higgins P.M., Mitchell J.D., Ruskuc N. *Generating the full transformation semigroup using order preserving mappings*// Semigroup Forum. – 2003. – V.45, №3. – P. 557–566.
6. Pyekhtyeryev V.O. *$\mathcal{H}-$, $\mathcal{R}-$ and $\mathcal{L}-$cross-sections of infinite symmetric inverse semigroup*// J. Algebra and Discrete Mathematics. – 2005. – V.1. – P. 92–104.
7. Либер А.Е. *О симметрических обобщенных группах.* Мат. сборник. – 1953. – Т.33(75), №3. – P. 531–544.

Механіко-математичний факультет
КНУ ім.Тараса Шевченко
vasiliy@univ.kiev.ua
ch_slavka@ukr.net

Надійшло 21.09.2010