УДК 517.51

В. К. Маслюченко, В. В. Михайлюк, О. Г. Фотій

ЗВ'ЯЗКИ МІЖ НАРІЗНИМИ ТА СУКУПНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

V. K. Maslyuchenko, V. V. Mykhaylyuk, O. G. Fotiy. *The relations between separately and jointly proprities of multi-valued mappings*, Mat. Stud. **35** (2011), 106–112.

We prove the following statement. Let X be a topological space, Y a topological T_1 first-countable space, Z a metrizable locally compact σ-compact space and $F\colon X \times Y \to Z$ a close-valued separately continuous mapping. Then the set $C_y(F)$ is residual in X for each $y \in Y$.

В. К. Маслюченко, В. В. Михайлюк, О. Г. Фотій. *Зв'язки між нарізними та сукупними властивостями многозначних відображень* // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №1. – С.106–112.

Доведено, що якщо X — топологічний простір, Y — топологічний T_1-простір з першою аксіомою зліченності, Z — метризовний локально компактний σ-компактний простір і $F\colon X \times Y \to Z$ — замкненозначне нарізно неперервне відображення, то множина $C_y(F)$ є залишковою в X для кожного $y \in Y$.

1. Нехай X і Y — множини. Позначимо через $\mathcal{Y}$ сукупність усіх непорожніх підмножин множини Y. Кажуть, що задано *многозначне (багатозначне) відображення* $F\colon X \to Y$, якщо кожному елементу x з множини X поставлено у відповідність деяку непорожню підмножину $F(x)$ множини Y. Таким чином, многозначне відображення $F\colon X \to Y$ — це звичайне відображення множини X у множину $\mathcal{Y}$. Многозначні відображення називають ще *мультифункціями.*

Нехай $F\colon X \to Y$ — многозначне відображення і $A \subseteq X$. Покладемо $F(A) = \bigcup_{x\in A} F(x)$. Множину $F(A)$ називають *образом* множини A при відображенні F. Для множини $B \subseteq Y$ розглядають два *прообрази* $F^+(B) = \{x \in X\colon F(x) \subseteq B\}$ і $F^-(B) = \{x \in X\colon F(x) \cap B \neq \varnothing\}$.

Нехай X і Y — топологічні простори і $x_0 \in X$. Многозначне відображення $F\colon X \to Y$ називається *неперервним зверху /знизу/ в точці* x_0, якщо для кожної відкритої в Y множини V, такої, що $F(x_0) \subseteq V$ $/F(x_0) \cap V \neq \varnothing/$, існує такий окіл U точки x_0 в X, що $F(x) \subseteq V$ $/F(x) \cap V \neq \varnothing/$ для кожного $x \in U$. Многозначне відображення $F\colon X \to Y$ називається *неперервним у точці* x_0, якщо воно неперервне у цій точці як зверху, так і знизу. Через $C^+(F)$, $C^-(F)$ і $C(F)$ ми позначаємо множину всіх точок x з X, в яких F відповідно неперервне зверху, знизу чи просто неперервне. Якщо $C^+(F) = X$, $C^-(F) = X$ чи $C(F) = X$ то F називається *неперервним зверху, знизу* чи просто *неперервним.* Неперервність многозначного відображення $F\colon X \to Y$ — це те саме, що й неперервність його як однозначного відображення $F\colon X \to \mathcal{Y}$, коли на $\mathcal{Y}$ розглядати топологію Віторіса [1, с.36]. Відображення $F\colon X \to Y$ буде неперервним зверху /знизу/

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C08.

тоді і тільки тоді, коли для кожної відкритої множини Vту просторі Y множина $F^+(V)$ $/F^-(V)/$ відкрита в X.

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Многозначне відображення $F\colon X\times Y\to Z$ називається *нарізно неперервним*, якщо для кожного $x\in X$ і для кожного $y\in Y$ відображення $F^x\colon Y\to Z$ і $F_y\colon X\to Z$ є неперервними (тут і далі $F^x(y)=F_y(x)=F(x,y)$). Під неперервністю відображення $F\colon X\times Y\to Z$ добутку топологічних просторів X і Y у топологічний простір Z у точці $p_0=(x_0,y_0)\in X\times Y$ ми розуміємо *сукупну неперервність у точці* p_0, тобто неперервність F у точці p_0 відносно топології добутку на $X\times Y$. У відповідності з цим множина $C(F)$ для такого відображення F — це множина його точок сукупної неперервності.

Починаючи з класичних робіт Р. Бера і В. Осґуда кінця XIX століття, математики впродовж XX століття і до наших днів активно досліджували множину $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f\colon X\times Y\to Z$. Серед робіт з цього напрямку зустрічаються і праці, в яких досліджуються і многозначні відображення, хоча їх число невелике. Наскільки нам відомо, першою з таких робіт є праця Ґ. Дебса [2], в якій він встановлює наступний результат: якщо X — берівський простір, Y — простір із зліченною базою, (Z,d) — метричний простір і $F\colon X\times Y\to Z$ — компактнозначне відображення, яке є неперервним знизу відносно першої змінної і неперервним зверху відносно другої змінної, і якщо, крім того, Y або Z — компакт, то існує всюди щільна в X множина A типу G_δ, така, що F неперервне зверху в кожній точці $A\times Y$.

Оскільки в теоремі Дебса на відображення F накладаються змішані умови (неперервність знизу відносно першої змінної і неперервність зверху відносно другої змінної), то природно постало питання: що буде, коли ми розглядатимемо мультифункції, які нарізно неперервні зверху або знизу? Конкретніше: чи кожне нарізно неперервне зверху /знизу/ компактнозначне відображення $F\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$ буде неперервним зверху /знизу/ хоча б в одній точці $p\in[0,1]^2$? У [3] дано негативні відповіді на обидва питання.

Природно поставити і таку задачу, яка раніше практично не розглядалася: дослідити множину точок $C(F)$ сукупної неперервності нарізно неперервного многозначного відображення $F\colon X\times Y\to Z$. Вона є спеціальним випадком загальної задачі, коли у ролі простору значень виступає система усіх непорожніх множин з топологією Віторіса.

Перший результат на цю тему легко отримується з відповідного результату Калбрі-Труалліка [4] для однозначних функцій, якщо використати метрику Гаусдорфа, яка на просторі непорожніх компактних підмножин метричного простору породжує топологію Віторіса [1, с.62].

Теорема 1. ([5]) *Нехай X,Y — топологічні простори, Z — метричний простір, $F\colon X\times Y\to Z$ — компактнозначне нарізно неперервне відображення. Тоді*

(i) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y\in Y$ множина $C_y(F)=\{x\in X\colon (x,y)\in C(F)\}$ залишкова в X;

(ii) якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(F)=\{x\in X\colon \{x\}\times Y\subseteq C(F)\}$ залишкова в X.

Виникає питання: наскільки істотною є та обставина, що відображення F у цій теоремі набуває лише компактних значень? Виявляється, що цю умову у випадку (i) можна послабити (теорема 4), що і є основним результатом даної статті.

2. У цьому пункті ми вивчаємо зв'язки між многозначними відображеннями і породженими ними замкненозначними відображеннями і досліджуємо, які властивості многозначного відображення зберігаються при переході до замкненозначного. Такий підхід дає можливість від одного простору значень переходити до іншого, в якому топологія Віторіса має кращі властивості, наприклад, є метризовною, що дозволяє використати відомі результати про однозначні відображення.

Нехай X, Y — топологічні простори і $F\colon X \to Y$ — многозначне відображення. Для кожного $x \in X$ покладемо $F_{\mathrm{cl}}(x) = \overline{F(x)}$. Відображення $F_{\mathrm{cl}}\colon X \to Y$ називатимемо *замиканням* відображення F у просторі Y.

Твердження 1. *Нехай X, Y — топологічні простори, $F\colon X \to Y$ — многозначне відображення і V — довільна відкрита в Y множина. Тоді $F^-(V) = F^-_{\mathrm{cl}}(V)$.*

Доведення. Достатньо зауважити, що для довільної множини $B \subseteq Y$ множина $B \cap V$ непорожня тоді і тільки тоді, коли множина $\overline{B} \cap V$ непорожня. Це випливає з того, що множина V відкрита в Y. □

Наслідок 1. *Нехай X, Y — топологічні простори, $F\colon X \to Y$ — многозначне відображення. Тоді наступні твердження рівносильні:*

(i) відображення F неперервне знизу;

(ii) відображення F_{cl} неперервне знизу.

Твердження 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — нормальний простір, $F\colon X \to Y$ — многозначне відображення, яке неперервне зверху в точці $x_0 \in X$. Тоді F_{cl} неперервне зверху в цій точці.*

Доведення. Нехай V відкрита в Y множина, така, що $F_{\mathrm{cl}}(x_0) \subseteq V$. Оскільки Y — нормальний простір, то в ньому існує відкрита множина G, така, що $F_{\mathrm{cl}}(x_0) \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq V$. Врахувавши, що $F(x_0) \subseteq G$ і F неперервне зверху в точці x_0, одержимо, що існує окіл U точки x_0 в X, такий, що $F(U) \subseteq G$. Тоді і $F_{\mathrm{cl}}(U) \subseteq \overline{G} \subseteq V$, отже, F_{cl} неперервне зверху в точці x_0. □

Нагадаємо, що для локально компактного некомпактного гаусдорфового простору X через αX позначається *компактифікація Александрова* простору X з одноточковим наростом $\{\infty\} = \alpha X \setminus X$. При цьому базу околів точки ∞ в αX утворюють всі множини вигляду $\alpha X \setminus K$, де $K \subseteq X$ — компактна в X множина.

При дослідженні нарізно неперервних многозначних відображень нам буде корисною наступна спеціалізація замикання многозначного відображення.

Нехай X — топологічний простір, Y — локально компактний некомпактний гаусдорфовий простір і $F\colon X \to Y$ многозначне відображення. Замикання F_{cl} відображення F у просторі αY ми позначатимемо αF і називатимемо його *α-компактифікацією* відображення F.

З наслідку 1 і твердження 2 випливає наступний результат.

Твердження 3. *Нехай X — топологічний простір, Y — локально компактний некомпактний гаусдорфовий простір і $F\colon X \to Y$ — многозначне відображення. Тоді:*

(i) відображення F неперервне знизу тоді і тільки тоді, коли αF неперервне знизу;

(ii) якщо відображення F неперервне зверху, то і αF неперервне зверху.

Наступний приклад показує, що обернена імплікація до твердження 3 (ii) в загальному випадку не є правильною.

Приклад. Нехай $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — замкненозначне відображення, яке діє таким чином

$$F(x) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{якщо } x \le 0, \\ [\frac{1}{x}, +\infty), & \text{якщо } x > 1, \\ \{1, ..., [\frac{1}{x}]\} \cup [\frac{1}{x}; +\infty), & \text{якщо } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Тоді $\alpha F(x) = F(x) \cup \{\infty\}$ для кожного $x \in \mathbb{R}$.

Покажемо, що αF неперервне зверху в кожній точці $x \in \mathbb{R}$. Це зрозуміло, коли $x \neq 0$. Доведемо, що αF неперервне зверху в нулі. Нехай $\widetilde{V}$ відкрита в $\alpha\mathbb{R}$ множина, яка містить $\alpha F(0)$. Тоді $\infty \in \widetilde{V}$, отже, існує таке $E > 0$, що $V_E(\infty) = \{x \in \alpha\mathbb{R}\colon |x| > E\} \subseteq \widetilde{V}$. Покладемо $\delta = \frac{1}{E}$. Якщо $0 < x < \delta$, то $\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = \mathrm{E}$, отже, $[\frac{1}{x}; +\infty] \subseteq V_E(\infty) \subseteq \widetilde{V}$. Крім того, $\widetilde{V} \supseteq \mathbb{N}$. Тому $\alpha F(x) \subseteq \widetilde{V}$ при $x < \delta$. Таким чином, αF неперервне зверху в нулі.

Покажемо, що F не є неперервним зверху в точці $x = 0$. Справді, нехай $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Розглянемо множину $V = V_\varepsilon(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n - \frac{1}{2}; n + \frac{1}{2})$. Зрозуміло, що V — відкрита множина в $\mathbb{R}$, яка містить $\mathbb{N}$, але $\left\{\frac{2k+1}{2}\colon k \in \mathbb{N}\right\} \cap V = \varnothing$. Нехай U — довільний окіл нуля. Ясно, що існує точка $x > 0$, така, що $x \in U$. За побудовою $[\frac{1}{x}; +\infty) \subseteq F(x)$. Але для достатньо великих k числа $\frac{2k+1}{2} \in [\frac{1}{x}; +\infty)$, а значить, і $\frac{2k+1}{2} \in F(x)$. При цьому $\frac{2k+1}{2} \notin V$ для кожного k. Таким чином, $F(x) \not\subseteq V$, отже, $F(U) \not\subseteq V$.

Для одержання оберненої імплікації для нарізно неперервних відображень ми будемо використовувати наступний результат.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — локально компактний некомпактний гаусдорфовий простір, $F\colon X \to Y$ — замкненозначне відображення, $E \subseteq X$, $x_0 \in E$ і K — компактна в Y множина, така, що для довільного околу U точки x_0 в X існує окіл $U_0 \subseteq U$, такий, що*

$$F(U_0) \setminus K = F(U_0 \cap E) \setminus K.$$

Тоді якщо звуження $F|_E$ і відображення αF неперервні зверху в точці x_0, то і F неперервне зверху в цій точці.

Доведення. Нехай V — відкрита в Y множина, така, що $F(x_0) \subseteq V$. Використовуючи неперервність зверху відображень αF і $F|_E$ в точці x_0 виберемо окіл U точки x_0 в X, такий, що $F(U \cap E) \subseteq V$ і $\alpha F(U) \subseteq V \cup (\alpha Y \setminus K)$. Згідно з умовою теореми існує окіл U_0 точки x_0 в X, такий, що $U_0 \subseteq U$ і $F(U_0) \setminus K = F(U_0 \cap E) \setminus K$. Покажемо, що $F(U_0) \subseteq V$. Нехай $x \in U_0$. Тоді, з одного боку, $F(x) \cap K \subseteq \alpha F(x) \subseteq V \cup (\alpha Y \setminus K)$, тому $F(x) \cap K \subseteq V$. З іншого боку,

$$F(x) \setminus K \subseteq F(U_0) \setminus K = F(U_0 \cap E) \setminus K \subseteq F(U \cap E) \subseteq V.$$

Отже, $F(x) \subseteq V$ і теорема доведена. □

3. Для подальших досліджень нам будуть потрібні наступні допоміжні твердження.

Твердження 4. *Нехай X і Y — топологічні простори, $y_0 \in Y$, V — відкритий окіл точки y_0 в Y, Z — регулярний простір, K — замкнена множина в Z і $F\colon X \times Y \to Z$ — замкненозначне відображення, яке неперервне відносно першої змінної. Тоді множина*

$$\{x \in X\colon F^x(V) \setminus K = F^x(y_0) \setminus K\}$$

замкнена в X.

Доведення. Покладемо $G = \{x \in X\colon F^x(V) \setminus K \neq F^x(y_0) \setminus K\}$. Достатньо показати, що множина G відкрита в X. Нехай $x_0 \in G$. Тоді існує точка $y_1 \in V$ така, що $F(x_0, y_1) \setminus (F(x_0, y_0) \cup K) \neq \varnothing$. Візьмемо довільну точку $z_1 \in F(x_0, y_1) \setminus (F(x_0, y_0) \cup K)$. Оскільки простір Z регулярний, то існує відкритий окіл W точки z_1, такий, що $\overline{W} \cap (F(x_0, y_0) \cup K) = \varnothing$. Ясно, що $F(x_0, y_1) \cap W \neq \varnothing$ і $F(x_0, y_0) \cup K \subseteq Z \setminus \overline{W}$. Використовуючи неперервність знизу відображення F_{y_1} в точці x_0 і неперервність зверху відображення F_{y_0} в точці x_0, знайдемо окіл U точки x_0 в X, такий, що $F(x, y_1) \cap W \neq \varnothing$ і $F(x, y_0) \subseteq Z \setminus \overline{W}$ для кожного $x \in U$. Тоді, зокрема, $F(x, y_1) \setminus (F(x, y_0) \cup K) \neq \varnothing$, а тому і $x \in G$ для кожного $x \in U$. Таким чином, $U \subseteq G$, отже, G є околом точки x_0. Оскільки точка x_0 була вибрана довільним чином, то це означає, що множина G відкрита в X. □

Зауважимо, що в умові теореми достатньо вимагати неперервність знизу відносно змінної y відображення F і неперервність зверху відображення F_{y_0}.

Нагадаємо [6, с.292], що топологічний простір X називається *σ-компактним*, якщо він подається у вигляді зліченного об'єднання послідовності своїх компактних підпросторів X_n.

Твердження 5. *Нехай X — локально компактний σ-компактний простір. Тоді існує послідовність $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ компактних підмножин $X_n \subseteq X$, така, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ і $X_n \subseteq \operatorname{int}(X_{n+1})$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Оскільки X — σ-компактний простір, то існує така послідовність компактних множин $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, що $Y_n \subseteq X$ і $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Для кожного $x \in X$ позначимо через $U(x)$ відкритий окіл точки x в X такий, що $\overline{U(x)}$ — компактна множина. Покладемо $X_1 = Y_1$. З відкритого покриття $(U(x)\colon x \in X_1 \cup Y_2)$ компактної множини $X_1 \cup Y_2$ в X можна вибрати скінченне підпокриття $(U(x)\colon x \in A_1)$. Покладемо $X_2 = \bigcup_{x \in A_1} \overline{U(x)}$. Далі для скінченного покриття $(U(x)\colon x \in A_2)$ компактної множини $X_2 \cup Y_3$ позначимо $X_3 = \bigcup_{x \in A_2} \overline{U(x)}$. Продовжуючи цей процес далі, ми отримаємо шукану послідовність. □

Твердження 6. *Нехай Y — топологічний T_1-простір, $y_0 \in Y$ і $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ — база околів точки y_0 в просторі Y, Z — локально компактний σ-компактний простір, причому $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність компактних підмножин $Z_n \subseteq Z$ така, що $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ і $Z_n \subseteq \operatorname{int}(Z_{n+1})$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, відображення $F\colon Y \to Z$ замкненозначне і неперервне зверху в точці y_0. Тоді існує номер n_0, такий, що $F(y) \setminus Z_{n_0} \subseteq F(y_0) \setminus Z_{n_0}$ для кожного $y \in V_{n_0}$.*

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді існує послідовність (y_n) точок $y_n \in V_n$, така, що $F(y_n) \setminus Z_n \nsubseteq F(y_0) \setminus Z_n$ для кожного номера n. В такому разі для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина $F(y_n) \setminus (F(y_0) \cup Z_n)$ не порожня, отже, існує послідовність точок (z_n), така, що $z_n \in F(y_n) \setminus (F(y_0) \cup Z_n)$ для кожного n. Покажемо, що множина $E = \{z_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ замкнена в Z. Нехай $z \in Z \setminus E$. За умовою, накладеною на простір Z, існує номер n, такий, що $z \in Z_n \subseteq \operatorname{int}(Z_{n+1})$. Оскільки $z_k \notin Z_{n+1}$ при $k > n$, то $E \cap Z_{n+1} \subseteq \{z_k\colon 1 \leq k \leq n\}$. Тому множина $\operatorname{int}(Z_{n+1}) \cap E$ скінченна, а значить, замкнена в T_1-просторі Y. В такому разі множина $G = \operatorname{int}(Z_{n+1}) \setminus E = \operatorname{int}(Z_{n+1}) \setminus (E \cap \operatorname{int}(Z_{n+1}))$ є відкритою в Z, причому $z \in G$. Отже, G — це відкритий окіл точки z в Z, який не перетинається з множиною E. Розглянемо відкриту в Z множину $W = Z \setminus E$. Оскільки $z_n \notin F(y_0)$ для кожного n, то $F(y_0) \subseteq W$. Але $F(V_n) \nsubseteq W$ для кожного n, бо $z_n \in F(V_n) \setminus W$. Це показує, що F не є неперервним зверху в точці y_0, що суперечить умові. □

4. Тепер перейдемо до викладу основних результатів.

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, Y — T_1-простір в якому існує зліченна база $\{V_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ околів точки $y_0 \in Y$, Z — метризовний локально компактний σ-компактний простір і $F\colon X \times Y \to Z$ — замкненозначне нарізно неперервне відображення. Тоді множина $C_{y_0}(F)$ є залишковою в X.*

Доведення. Якщо Z — компактний простір, то топологія Віторіса і топологія, породжена метрикою Гаусдорфа, збігаються і відображення F можна розглядати, як однозначне відображення зі значеннями у метризовному просторі. Тоді висновок теореми випливає з теореми Калбрі-Труалліка [4]. □

Нехай Z — некомпактний простір. Розглянемо відображення $\alpha F\colon X \times Y \to \alpha Z$, яке згідно з твердженням 3 є нарізно неперервним. Зауважимо, що простір αZ — метризовний компакт [7, с.46], тому до відображення αF застосовні аналогічні міркування, як до відображення F у випадку компактного простору Z. Отже, множина $A_0 = C_{y_0}(\alpha F)$ є залишковою в X.

Згідно з твердженням 5 виберемо зростаючу послідовність $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ компактних множин $Z_n \subseteq Z$, таку, що $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ і $Z_n \subseteq \mathrm{int}(Z_{n+1})$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Для кожного номера n позначимо через B_n множину всіх $x \in X$, таких, що $F(x, y) \setminus Z_n \subseteq F(x, y_0) \setminus Z_n$ для кожного $y \in V_n$. Згідно з твердженням 4 всі множини B_n замкнені, крім того, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, що негайно випливає з твердження 6. Тому множина $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} B_n$ залишкова в X.

Покладемо $A = A_0 \cap G$. Ясно, що і множина A є залишковою в X. Покажемо, що $A \subseteq C_{y_0}(F)$. Нехай $x_0 \in A$. Тоді $x_0 \in G$, тобто існує номер m, такий, що $x_0 \in U_m = \mathrm{int}(B_m)$. Позначимо $K = Z_m$ і $E = U_m \times \{y_0\}$. Зауважимо, що звуження $F|_{U_m \times V_m}\colon U_m \times V_m \to Z$, множини E і K і точка $p_0 = (x_0, y_0) \in E$ задовольняють умови теореми 2, де за X взято $U_m \times V_m$, а за Y — простір Z. Справді, $E \subseteq U_m \times V_m$ і $F|_E$ — неперервне зверху в точці p_0, бо F_{y_0} неперервне в точці x_0. Далі, нехай W — довільний окіл точки p_0 в $U_m \times V_m$. Виберемо відкриті околи U_0 і V_0 точок x_0 і y_0 в X і Y відповідно так, що $W_0 = U_0 \times V_0 \subseteq W$. Оскільки, за побудовою $U_0 \subseteq B_m$ і $V_0 \subseteq V_m$, то $F(x, y) \setminus K \subseteq F(x, y_0) \setminus K$ для довільних $x \in U_0$ і $y \in V_0$. Врахувавши, що $W_0 \cap E = U_0 \times \{y_0\}$, одержимо

$$F(W_0) \setminus K = F(W_0 \cap E) \setminus K.$$

Отже, згідно з теоремою 2 відображення F неперервне зверху в точці p_0. Крім того, $x_0 \in A_0$. Отже, αF неперервне знизу в точці p_0. Тому за твердженням 3 і F є неперервним знизу в точці p_0.

З доведеного твердження випливає

Теорема 4. *Нехай X — топологічний простір, Y — топологічний T_1-простір з першою аксіомою зліченності, Z — метризовний локально компактний σ-компактний простір і $F\colon X \times Y \to Z$ — замкненозначне нарізно неперервне відображення. Тоді множина $C_y(F)$ є залишковою в X для кожного $y \in Y$.*

Нехай X, Y — топологічні простори і $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність відображень, таких, що $F_n(x) \to F_\infty(x)$ у топології Віторіса на просторі $\mathcal{Y}$ для кожного $x \in X$ і $x_0 \in X$. Ця послідовність називається *неперервно збіжною до F_∞ в точці x_0*, якщо для кожного околу V множини $F_\infty(x_0)$ існують окіл U точки x_0 в X і номер N, такі, що $F_n(x) \subseteq V$ для довільних $x \in U$ і $n \geq N$.

Наслідок 2. *Нехай X — топологічний простір і $F_n\colon X \to \mathbb{R}$ при $n \in \alpha\mathbb{N}$ — неперервні замкненозначні відображення, такі, що $F_n(x) \to F_\infty(x)$ на X в топології Віторіса. Тоді множина всіх точок x з X в яких F_n неперервно збігається до F_∞ є залишковою в X.*

Достатньо покласти $F_n(x) = F(x,n)$, $Y = \mathbb{N} \cup \{\infty\} = \alpha\mathbb{N}$, $Z = \mathbb{R}$ і скористатися теоремою 3 з $y_0 = \infty$.

Результати цієї замітки були анонсовані в тезах [8].

ЛІТЕРАТУРА

1. Shouchuan Hu., Papageorgiou N. Handbook of multivalued analysis. Theory. – Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 964 p.
2. Debs G. *Points de continuité d'une function séparément continue*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – V.97, №1. – P. 167–176.
3. Кожукар О.Г., Маслюченко В.К. *Навколо теореми Дебса про многозначні відображення*// Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 2004. – Т.191–192. – С. 61–66.
4. Colbrix J., Troallic J.P. *Aplications separement continues*// C.R. Acad. Sc. Paris. Sec. A. – 1979. – V.288. – P. 647–648.
5. Фотій О.Г. *Зв'язки між неперервністю зверху і знизу, H^+-неперервністю і H^--неперервністю*// Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика. – 2007. – Т.336–337. – С. 189–196.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
7. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. – М.: Наука, 1975. – 408 с.
8. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Фотій О.Г. *Зв'язки між нарізними та сукупними властивостями многозначних відображень*// IV Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу", Тези доповідей. Івано-Франківськ: Плай. – 2008. – С. 61.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Надійшло 17.12.2009