УДК 517.5

В. В. Савчук, М. В. Савчук, С. О. Чайченко

# НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

V. V. Savchuk, M. V. Savchuk, S. O. Chaichenko. *Approximation of analytic functions by de la Vallée Poussin sums*, Mat. Stud. **34** (2010), 207–219.

We study the approximation properties of the de la Vellée Poussin sums for the classes of analytic in the disk $\mathbb{D}$ and continuous in $\overline{\mathbb{D}}$ functions in order to compare the effectiveness of approximation by these sums of functions with that of partial sums of Taylor–Maclorin series and of algebraic polynomials of best approximation in the uniform metric.

В. В. Савчук, М. В. Савчук, С. О. Чайченко. *Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена* // Мат. Студії. – 2010. – Т.34, №2. – С.207–219.

Исследуются суммы Валле Пуссена на классах аналитических в круге $\mathbb{D}$ и непрерывных в $\overline{\mathbb{D}}$ функций на предмет того, какими апроксимацонными возможностями они владеют в сравнении с частными суммами рядов Тейлора–Маклорена и многочленами наилучшего приближения в равномерной метрике.

**1.** Нехай $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$, $\mathbb{T} = \{z\colon |z| = 1\}$, $f$ — функція аналітична в крузі $\mathbb{D}$ і

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \tag{1}$$

— її розвинення в ряд Тейлора–Маклорена.

Сумою Валле Пуссена функції $f$ називається алгебраїчний многочлен вигляду

$$V_{n,p}(f)(z) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f)(z),$$

де $p, n \in \mathbb{N}, p \le n$ і $S_k(f)(z) := \sum_{l=0}^{k} (f^{(l)}(0)/l!) z^l$ — частинна сума порядку $k$ ряду (1).

У даній роботі досліджуються наближення аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій $f$ сумами $V_{n,p}(f)$.

Вихідною точкою цих досліджень стало таке твердження.

**Теорема 1.** *Нехай $K_\infty$ — клас аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій $f$, які зображаються інтегралами типу Коші*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(w)}{1 - \overline{w} z} \frac{dw}{w}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2}$$

*зі щільностями $\varphi$, для яких* $\operatorname{ess\,sup}_{w \in \mathbb{T}} |\varphi(w)| \le 1$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 41A10.

*Тоді для будь-яких $p, n \in \mathbb{N}$, $p \le n$, і $z \in \mathbb{D}$ виконується рівність*

$$R_{n,p}(K_\infty; z) := \sup_{f \in K_\infty} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| = \frac{2}{\pi p} |z|^{n-p+1} \frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2} \mathbf{K}(|z|^p), \tag{3}$$

*де*

$$\mathbf{K}(\rho) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-\rho^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1-\rho e^{it}|}$$

*— повний еліптичний інтеграл першого роду.*

Зокрема, якщо $p = 1$, то $V_{n,1}(f) = S_{n-1}(f)$ і

$$\sup_{f \in K_\infty} \max_{|z|=\rho} |f(z) - S_{n-1}(f)(z)| = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\rho) \rho^n \quad \forall z \in \mathbb{D},\ n \in \mathbb{N}.$$

З другого боку, функція $f_*(z) = z^n$ належить класові $K_\infty$ і для неї, як добре відомо,

$$\inf_{a_k \in \mathbb{C}} \max_{\zeta:\ |\zeta|=\rho} \Big| f_*(\zeta) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^k \Big| = \rho^n \quad \forall \rho \in [0, 1). \tag{4}$$

Таким чином, суми Валле Пуссена тільки при кожному фіксованому значенні параметра $p$ здійснюють наближення класу $K_\infty$ в крузі $\mathbb{D}$ зі швидкістю, яка за порядком збігається зі швидкістю найкращого наближення алгебраїчними многочленами, зокрема частинними сумами рядів Тейлора–Маклоренна.

Теорема 1 достатньо повно описує наближення, здійснювані сумами Валле Пуссена всередині круга $\mathbb{D}$. Однак рівність (3) нічого не говорить про наближення в замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}$ функцій, які є аналітичнимим в $\mathbb{D}$ і неперервними в $\overline{\mathbb{D}}$. З огляду на це, нашою подальшою метою є дослідити суми Валле Пуссена на інших класах аналітичних в $\mathbb{D}$ і неперервних в $\overline{\mathbb{D}}$ функцій на предмет того, якими апроксимаційними можливостями вони володіють в замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}$ в порівнянні з частинними сумами рядів Тейлора–Маклорена і многочленами найкращого наближення.

На завершення коментарів до теореми 1 та мотивації наших досліджень наведемо ще один цікавий факт.

З основного результату роботи [1] випливає таке твердження.

Нехай $P_\infty$ — множина дійснозначних гармонічних функцій в крузі $\mathbb{D}$, які зображаються інтегралами Пуассона

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \varphi(w) \frac{1-|z|^2}{|1-\overline{w}z|^2} \frac{dw}{w},$$

де $\varphi$ — дійснозначна функція, для якої $\operatorname{ess\,sup}_{w \in \mathbb{T}} |\varphi(w)| \le 1$ і нехай

$$V_{n,p}(f)(z) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} \left( \sum_{l=-k}^{k} \widehat{\varphi}(l) e_l(z) \right)$$

— сума Валле Пуссена функції $f$, де $e_l(z) := |z|^{|l|} e^{il \arg z}$ і

$$\widehat{\varphi}(l) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) e^{-ilt} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції $\varphi$.

Тоді при $(n-p)\to\infty$ виконується асимптотична рівність

$$R_{n,p}(P_\infty;z):=\sup_{f\in P_\infty}|f(z)-V_{n,p}(f)(z)|=$$
$$=\frac{|z|^{n-p+1}}{p}\left(\frac{8}{\pi^2 p}\frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2}\mathbf{K}(|z|^p)+O(1)\frac{|z|}{(1-|z|)^3(n-p+1)}\right)\quad \forall z\in\mathbb{D},$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно $n,p$ і $z$.

Зіставляючи останнє співвідношення з рівністю (3), отримаємо, що

$$\lim_{(n-p)\to\infty}\frac{R_{n,p}(P_\infty;z)}{R_{n,p}(K_\infty;z)}=\frac{4}{\pi}\quad \forall z\in\mathbb{D}.$$

Порівнюючи результат, наведений нижче (теорема 2), з його відомим аналогами в дійсному випадку (див. [2, гл. 3]), бачимо, що останнє співвідношення є невипадковим.

**2.** Нехай $C(\mathbb{T})$, $L_\infty(\mathbb{T})$ і $L(\mathbb{T})$ — простори функцій $\varphi$, відповідно, неперервних, істотно обмежених та сумовних на $\mathbb{T}$, з нормами

$$\|\varphi\|_{C(\mathbb{T})}=\max_{z\in\mathbb{T}}|\varphi(z)|,\ \|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})}=\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}}|\varphi(z)|,\ \|\varphi\|_{L(\mathbb{T})}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|\varphi(z)|\ |dz|.$$

Якщо $X(\mathbb{T})$ — один з просторів $C(\mathbb{T})$, $L(\mathbb{T})$, або $L_\infty(\mathbb{T})$, то

$$X(\mathbb{T})_+:=\left\{f\in X(\mathbb{T})\colon \widehat{f}(-k)=0,\ k=1,2,\dots\right\}.$$

Принагідно зауважимо, що згідно з теоремою Голубєва–Привалова [3, с. 202] кожен з просторів $X(\mathbb{T})_+$ являє собою простір граничних значень аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій $f$, які зображуються інтегралами Коші. Тому коефіцієнти Тейлора–Маклорена таких функцій $f$ збігаються з коефіцієнтами Фур'є їх граничних значень на $\mathbb{T}$, тобто

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\widehat{f}(k),\quad k\in\mathbb{Z}_+:=\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Нехай $\psi:=\{\psi(k)\}_{k=0}^\infty$ $(\psi(0)=1)$ — задана послідовність комплексних чисел і $H_\infty^\psi$ — клас аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій $f$, які можна зобразити у вигляді інтеграла

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\varphi(w)\left(\sum_{k=0}^\infty\psi(k)(\overline{w}z)^k\right)\frac{dw}{w},\quad z\in\mathbb{D},\tag{5}$$

у якому $\varphi$ — деяка функція з $L_\infty(\mathbb{T})_+$ така, що $\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})}\le 1$.

Зокрема, якщо $\psi(k)=1$, $k\in\mathbb{Z}_+$, то $H_\infty^\psi$ — це клас $H_\infty$, який складається з аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій $f$, для яких $\|f\|_{H_\infty}:=\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|\le 1$.

Справді, внаслідок рівності

$$\int_{\mathbb{T}}\varphi(w)w^k dw=0\quad \forall\ k\in\mathbb{Z}_+\tag{6}$$

маємо, що

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\varphi(w)\left(\frac{1}{1-\overline{w}z}+\frac{w\overline{z}}{1-w\overline{z}}\right)\frac{dw}{w}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\varphi(w)\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\frac{dw}{w},\quad z\in\mathbb{D}.$$

Тому

$$|f(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\varphi(w)|\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{w}z|^2}|dw| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|1-\overline{w}z|^2}|dw| = 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

**Твердження 1.** *Якщо послідовність комплексних чисел $\psi = \{\psi(k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\psi(0) = 1$, є такою, що тригонометричний ряд*

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos kt \tag{7}$$

*є рядом Фур'є деякої сумовної $2\pi$–періодичної функції $\Psi$, то клас $H_{\infty}^{\psi}$ складається з аналітичних в $\mathbb{D}$ і неперервних в $\overline{\mathbb{D}}$ функцій $f$, граничні значення яких на колі $\mathbb{T}$ зображаються у вигляді згортки*

$$f(e^{it}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})\Psi(t-\theta)d\theta, \tag{8}$$

*де $\varphi$ — деяка функція з $L_{\infty}(\mathbb{T})_+$ і $\|\varphi\|_{L_{\infty}(\mathbb{T})} \le 1$.*

Справді, внаслідок умови (6) і теореми Фубіні інтеграл (5) можна записати у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \varphi(w)\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)(\overline{w}z)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)(w\overline{z})^k\Big)\frac{dw}{w} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\rho^k\cos k(t-\theta)\Big)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\tau)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos k(t-\tau)\Big)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\tau)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(t-\tau)+\rho^2}d\tau, \tag{9}$$

де $z = \rho e^{it}$ і

$$F(\tau) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})\Psi(\tau-\theta)d\theta.$$

Згідно з відомим твердженням (див., наприклад, [4, с.138]) функція $F$ є неперервною на дійсній осі $2\pi$–періодичною функцією. Тому інтеграл (9) є інтегралом Пуассона неперервної функцій, а за теоремою Фату (див., наприклад, [5, с. 154]) він має границю $F(t)$, коли точка $z = \rho e^{i\theta}$ прямує до $e^{it}$ в крузі $\mathbb{D}$ будь-яким шляхом. Отже, функція $f$ неперервно продовжується в замкнений круг $\overline{\mathbb{D}}$ і до того ж $f(e^{it}) := \lim_{z\to e^{it}} f(z) = F(t)$, тобто виконується (8).

Нагадаємо тепер означення класів $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$.

Якщо для даної послідовності комплексних чисел $\psi = \{\psi(k)\}_{k=0}^{\infty}$, $(\psi(0) = 1)$ і функції $f \in L(\mathbb{T})_+$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)\widehat{f}(k)e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції $g \in L(\mathbb{T})_+$, то $g$ називають $\psi$-інтегралом функції $f$ і позначають $\mathcal{J}^{\psi}(f)$ [6], [7, с. 261]. Множина $\psi$-інтегралів всіх функцій $f \in L(\mathbb{T})_+$ позначається через $L^{\psi}(\mathbb{T})_+$. Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина $L(\mathbb{T})_+$, то символом $L^{\psi}\mathfrak{N}(\mathbb{T})_+$ позначається множина $\psi$-інтегралів всіх функцій з $\mathfrak{N}$. Покладемо $C^{\psi}(\mathbb{T})_+ = L^{\psi}(\mathbb{T})_+ \cap C(\mathbb{T})$.

Якщо для заданої функції $F \in L^{\psi}(\mathbb{T})_+$ вказано таку функцію $f \in L(\mathbb{T})_+$, що майже скрізь на $\mathbb{T}$ виконується рівність $F(e^{it}) = \mathcal{J}^{\psi} f(e^{it})$, то функцію $f$ називають $\psi$-похідною функції $F$ і позначають $f = F^{\psi}$.

В даній роботі послідовність $\psi$ береться такою, що послідовності $\psi_1{:=}\{\operatorname{Re}\psi(k)\}_{k=0}^{\infty}$ і $\psi_2{:=}\{\operatorname{Im}\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ є слідами на $\mathbb{N}$ неперервних, додатних, опуклих і спадних до нуля функцій (множину всіх таких функцій $\psi_i$ згідно з [4] позначатимемо через $\mathfrak{M}$). За таких обмежень згідно з відомим твердженням (див., наприклад, [5, с. 100]) дійсна і уявна частини ряду (7) будуть рядами Фур'є деяких невід'ємних сумовних функцій, а отже, $\psi$ задовольнятиме умови твердження 1.

Згідно з твердженням 1 клас $C_{\infty}^{\psi}(\mathbb{T})_+$ складається з функцій, які є звуженням на $\mathbb{T}$ функцій з класу $H_{\infty}^{\psi}$, тобто $C_{\infty}^{\psi}(\mathbb{T})_+ = H_{\infty}^{\psi}|_{\mathbb{T}}$. Тому за принципом максимуму справджується рівність

$$\sup_{f \in H_{\infty}^{\psi}} \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| = \sup_{f \in C_{\infty}^{\psi}(\mathbb{T})_+} \|f - V_{n,p}(f)\|_{C(\mathbb{T})} =: R_{n,p}(C_{\infty}^{\psi}(\mathbb{T})_+), \tag{10}$$

де $C_{\infty}^{\psi}(\mathbb{T})_+ := \left\{ f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+ \colon \|f^{\psi}\|_{L_{\infty}(\mathbb{T})} \le 1 \right\}$.

Таким чином, наша задача, яка полягає у знаходженні верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена на класі $H_{\infty}^{\psi}$, зводиться до знаходження величини $R_{n,p}(C_{\infty}^{\psi}(\mathbb{T})_+)$ у правій частині рівності (10).

**3.** Нашим дослідженням передувала низка результатів, для огляду яких доцільно нагадати такі означення і факти.

Нехай $r \ge 0$ і $H_{\infty}^{r}{:=}\{f \colon f - \text{аналітична в } \mathbb{D}, \|f^{(r)}\|_{H_{\infty}} \le 1\}$, де

$$f^{(r)}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+r+1)}{\Gamma(k+1)} \widehat{f}(k) z^k,$$

— дробова похідна в розумінні Рімана–Ліувілля, $[r]$ — ціла частина числа $r$.

Якщо в означенні класу $H_{\infty}^{\psi}$ взяти послідовність $\psi$, яка породжується функцією $\psi(t) = \Gamma(t+1)/\Gamma(t+r+1)$, де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція, то класи $H_{\infty}^{\psi}$ і $H_{\infty}^{r}$ стануть пов'язаними між собою так: $H_{\infty}^{r} = \mathcal{P}_{[r]-1} + z^{[r]} H_{\infty}^{\psi}$, де $\mathcal{P}_{[r]-1}$ — множина алгебраїчних многочленів степеня $\le [r]-1$. Тобто будь-яку функцію $f \in H_{\infty}^{r}$ можна зобразити у вигляді $f(z) = P_{[r]-1}(z) + z^{[r]} g(z)$, де $P_{[r]-1} \in \mathcal{P}_{[r]-1}$, а $g$ — деяка функція з класу $H_{\infty}^{\psi}$.

Для подальшого викладу матеріалу важливо зауважити, що так означена функція $\psi \in \mathfrak{M}_0$ при $r > 0$, де (див. [4, с. 160]) $\mathfrak{M}_0$ — множина неперервних на півосі $\mathbb{R}^+$ додатних, опуклих і спадних до нуля функцій $\psi$, для кожної з яких існує своя стала $K$ така, що

$$0 < \mu(\psi; t) := \frac{t}{\psi^{-1}(\psi(t)/2) - t} \le K, \quad t \ge 1,$$

$\psi^{-1}$ — функція обернена до $\psi$.

Це легко зробити за допомогою таких міркувань. Оскільки (див., наприклад, [8, с. 37])

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln \Gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(t+k)^2} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\},$$

то

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\psi(t) = \frac{d^2}{dt^2}\ln\Gamma(t+1) - \frac{d^2}{dt^2}\ln\Gamma(t+r+1) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(t+k+1)^2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(t+k+r+1)^2} \geq 0 \quad \forall\, t\in\mathbb{R}_+.$$

З другого боку

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\psi(t) = \frac{\psi''(t)\psi(t)-(\psi'(t))^2}{(\psi(t))^2}.$$

Отже, $\psi''(t)\psi(t)-(\psi'(t))^2 \geq 0\ \forall\, t\in\mathbb{R}_+$, звідки і випливає, що $\psi''\geq 0$. Тому функція $\psi(\cdot)$ є опуклою і до того ж $\psi(t)\to 0, t\to\infty$, тобто $\psi\in\mathfrak{M}$.

Далі, використовуючи розвинення (див. [8, с. 30])

$$\frac{d}{dt}\ln\Gamma(t) = -\gamma - \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t}{k(t+k)},$$

де $\gamma$ — стала Ейлера–Маскероні, легко довести рівність

$$\frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} = -\frac{t\psi'(t)}{\psi(t)} = -t\frac{d}{dt}\ln\psi(t) = rt\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(t+1+k)(t+r+1+k)} \quad \forall\, t\geq 1.$$

Звідси отримуємо низку співвідношень

$$\frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} = rt\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(t+1+k)(t+r+1+k)} \leq rt\int_1^{\infty}\frac{dx}{(t+x)(t+r+x)} =$$
$$= t\ln\frac{t+r+1}{t+1} \leq (t+1)\ln\left(1+\frac{r}{t+1}\right) \leq r \quad \forall\, t\geq 1.$$

Згідно з теоремою 12.1 в [4, с. 161] нерівність $\sup_{t\geq 1} t|\psi'(t)|/\psi(t) < \infty$ є рівносильною включенню $\psi\in\mathfrak{M}_0$.

Проведені міркування підтверджують те, що історія задачі про наближення класів $H^{\psi}_{\infty}, \psi\in\mathfrak{M}_0$, тим чи іншим лінійним методом, містить в собі історію аналогічної задачі для класів $H^r_{\infty}$.

Мають місце такі твердження:

*1) для будь-якого $n\in\mathbb{N}$*

$$\frac{1}{n} \leq \sup_{f\in H^1_{\infty}}\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}}|f(z)-V_{n,n}(f)(z)| \leq \frac{2}{n+1}; \tag{11}$$

*2) для будь-якої функції $f\in H^r_{\infty}, r\in\mathbb{N}, r\geq 2$, рівномірно відносно $z\in\overline{\mathbb{D}}$*

$$f(z)-V_{n,n}(f)(z) = \frac{zf'(z)}{n} + O(n^{-r}), \quad n\geq r-1; \tag{12}$$

*3) для будь-якої функції $f\in H^r_{\infty}, r\in\mathbb{N}$, рівномірно відносно $z\in\overline{\mathbb{D}}$*

$$f(z)-V_{n,p}(f)(z) = -\frac{z^r}{n^r}V_{n-r,p}(f^{(r)})(z) + O(n^{-r}), \quad n-p\geq r; \tag{13}$$

*4) для будь-якого $r \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$ і $p/n \to 0$*

$$\sup_{f \in H^r_\infty} \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| = \frac{1}{\pi n^r} \ln \frac{n}{p} + O(n^{-r}); \tag{14}$$

*5) для будь-якої функції $f \in H^\psi_\infty$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$, рівномірно відносно $z \in \overline{\mathbb{D}}$*

$$f(z) - V_{n,1}(f)(z) = -\psi(n) V_{n,1}(f^\psi)(z) + O(1)\psi(n), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{15}$$

*6) якщо клас $H^\psi_\infty$ породжується функцією $\psi$ такою, що $\psi(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$, $\psi$ є локально абсолютно неперервною на $[n_0, \infty)$ для деякого $n_0 \geq 2$ і*

$$\widetilde{V}^\infty_n(\psi) := \int_n^\infty \operatorname{ess\,sup}_{u \geq t} |\psi'(u)| dt < \infty \quad \forall\, n \geq n_0,$$

*то для будь-якого натурального $n \geq n_0$*

$$\sup_{f \in H^\psi_\infty} \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| = \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^{n} \frac{|\psi(k+n-1)|}{k} + O(1)\widetilde{V}^\infty_n(\psi). \tag{16}$$

Співвідношення (13) і (15) становлять певний інтерес і з точки зору побудови лінійного методу, який наближає клас $H^\psi_\infty$ зі швидкістю, яка збігається за порядком зі швидкістю найкращого наближення. Наприклад, у співвідношенні (15)

$$\psi(n) V_{n,1}(f^\psi)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi(n)}{\psi(k)} \widehat{f}(k) z^k.$$

Тому

$$V_{n,1}(f)(z) - \psi(n) V_{n,1}(f^\psi)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\psi(n)}{\psi(k)}\right) \widehat{f}(k) z^k =: U_n(f)(z), \tag{17}$$

а твердження *5)* і співвідношення (15) при цьому рівносильні такому:

*7) для будь-якої функції $f \in H^\psi_\infty$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$, рівномірно відносно $z \in \overline{\mathbb{D}}$*

$$f(z) - U_n(f)(z) = O(1)\psi(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

З другого боку, як добре відомо, для величини

$$E_n(H^\psi_\infty; C(\mathbb{T})) := \sup_{f \in H^\psi_\infty} E_n(f)_{C(\mathbb{T})}$$

найкращого наближення класу $H^\psi_\infty$, де $E_n(f)_{C(\mathbb{T})} := \inf_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - P\|_{C(\mathbb{T})}$, справджується нерівність

$$E_n(H^\psi_\infty; C(\mathbb{T})) \geq \inf_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f_n - P\|_{C(\mathbb{T})} = |\psi(n)|,$$

де $f_n(z) = \psi(n) z^n$ (див. (4)).

Таким чином, лінійний метод наближення, який означається формулою (18) наближає клас $H^\psi_\infty$ зі швидкістю, яка за порядком збігається зі швидкістю найкращого наближення, тобто

$$\sup_{f \in H^\psi_\infty} \|f - U_n(f)\|_{C(\mathbb{T})} \asymp E_n(H^\psi_\infty; C(\mathbb{T})) \asymp |\psi(n)| \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+.$$

В усіх наведених вище співвідношеннях $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно $f$ і $n$.

Співвідношення (11) — це результат низки робіт (див. бібліографію в [9]). З константою 2 в правій частині (найменшою з відомих на даний час) (11) доведене в [9]. Співвідношення (12), а також (13) і (14) при $p = 1$ — це результат [10], а для довільних $p \le n$ (13) і (14) доведені в [11]. Рівність (15) доведена в [12] і [6], а (16) — в [13].

Зазначимо, також що основоположний результат, отриманий С. Б. Стєчкіним [10] (співвідношення (13) і (14) при $p = 1$), став аналогом класичного результату А. М. Колмогорова [14] про асимптотичну поведінку верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах $W^r, r \in \mathbb{N}$, $2\pi$–періодичних функцій.

У випадку, коли $\psi(k) = k^{-r}, r \in \mathbb{N}$, співвідношення (18) вперше доведене в [15]. На класах $C_0^\psi L_\infty$ $2\pi$–періодичних функцій метод $U_n$ досліджувався в [16].

Основний результат даної роботи міститься в наступному твердженні.

**Теорема 2.** *Нехай $\psi = \psi_1 + i\psi_2,\ \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. Тоді:*

1) *для довільної функції $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ і будь-якого многочлена $P \in \mathcal{P}_{n-p}$ в кожній точці $z \in \mathbb{T}$, при $n, p \in \mathbb{N}, p < n$,*

$$f(z) - V_{n,p}(f)(z) = -\psi(n)V_{n,p}(f^\psi - P)(z) + O(1)\psi(n)\|f^\psi - P\|_{C(\mathbb{T})}, \tag{19}$$

*де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно $n, p, z$ і $f$;*

2) *якщо існує границя $\Theta := \lim_{n\to\infty} p/n$, $0 \le \Theta < 1$, то при $n \to \infty$*

$$R_{n,p}(C_\infty^\psi(\mathbb{T})_+) = \frac{1}{\pi}|\psi(n)| \ln \frac{n}{p} + O(1)|\psi(n)|, \tag{20}$$

*де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно $p$ і $n$.*

**Наслідок.** *Нехай $\psi = \psi_1 + i\psi_2,\ \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$ і $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$. Тоді для того щоб*

$$\|f - V_{n,p}(f)\|_{C(\mathbb{T})} = O(1)|\psi(n)|E_{n-p}(f^\psi)_{C(\mathbb{T})} \quad \forall\ p, n \in \mathbb{N},\ n > p,$$

*необхідно і достатньо, щоб*

$$\|V_{n,p}(f^\psi)\|_{C(\mathbb{T})} = O(1) \quad \forall\ p, n \in \mathbb{N},\ n > p. \tag{21}$$

*Зокрема, (21) справджується для будь-якої функції $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$, якщо $\inf_{n\in\mathbb{N}} p/n > 0$.*

## 4. Доведення результатів.

*Доведення теореми 1.* Для будь-якого $z \in \mathbb{D}$ згідно з формулою Коші і (2) маємо рівність

$$f(z) - S_k(f)(z) = \frac{z^{k+1}}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(w)}{w^{k+1}(1 - \bar{w}z)}\frac{dw}{w}. \tag{22}$$

Застосовуючи $p$ разів формулу (22), отримаємо рівності:

$$f(z) - V_{n,p}(f)(z) = f(z) - \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f)(z) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}(f(z) - S_k(f)(z)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i p}\int_{\mathbb{T}} \varphi(w)\sum_{k=n-p}^{n-1} \overline{w}^{k+1} z^{k+1}\frac{1}{1 - \overline{w}z}\frac{dw}{w} = \frac{z^{n-p+1}}{2\pi i p}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(w)}{w^{n-p+1}}\frac{1 - \overline{w}^p z^p}{(1 - \overline{w}z)^2}\frac{dw}{w}. \tag{23}$$

Звідси випливає оцінка

$$|f(z)-V_{n,p}(f)(z)|\le\frac{|z|^{n-p+1}}{2\pi p}\int_{\mathbb{T}}\frac{|1-\overline{w}^p z^p|}{|1-\overline{w}z|^2}|dw|.$$

При даному фіксованому $z\in\mathbb{D}$ для функції $f_z$, яка зображається інтегралом типу Коші (2) зі щільністю

$$\varphi_z(w):=w^{n-p+1}\exp\Big(-i\arg\Big(\frac{1-\overline{w}^p z^p}{(1-\overline{w}z)^2}\Big)\Big),$$

згідно з (23) виконується рівність

$$f_z(z)-V_{n,p}(f_z)(z)=\frac{z^{n-p+1}}{2\pi ip}\int_{\mathbb{T}}\frac{|1-\overline{w}^p z^p|}{|1-\overline{w}z|^2}\frac{dw}{w}=\frac{z^{n-p+1}}{2\pi p}\int_0^{2\pi}\frac{|1-(|z|e^{-it})^p|}{|1-|z|e^{-it}|^2}dt.$$

Отже,

$$R_{n,p}(K_\infty;z)=\frac{|z|^{n-p+1}}{2\pi p}\int_0^{2\pi}\frac{|1-(|z|e^{-it})^p|}{|1-|z|e^{-it}|^2}dt.$$

Для спрощення інтеграла в правій частині останньої рівності застосуємо такі міркування (див. доведення леми в [17]).

Добре відомо, що

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x^k\quad\forall\ x\in\mathbb{D},\tag{24}$$

де

$$\alpha_k:=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},\quad k\in\mathbb{N}.$$

За допомогою тотожності

$$\frac{\sqrt{1-x^p}}{1-x}=\frac{1-x^p}{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x^p}}$$

і рівності (24) отримуємо розвинення

$$\frac{\sqrt{1-x^p}}{1-x}=\frac{1-x^p}{1-x}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x^{pk}\right)=$$

$$=\frac{1-x^p}{1-x}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{1-x^p}{1-x}x^{pk}=\sum_{\nu=0}^{p-1}x^\nu+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sum_{\nu=pk}^{p(k+1)-1}x^\nu\quad\forall\ x\in\mathbb{D}.$$

Тому, використовуючи рівність Парсеваля, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|1-(|z|e^{-it})^p|}{|1-|z|e^{-it}|^2}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-|z|^pe^{ipt}}}{1-|z|e^{it}}\frac{\sqrt{1-|z|^pe^{-ipt}}}{1-|z|e^{-it}}dt=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{p-1}|z|^{2\nu}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\sum_{\nu=pk}^{p(k+1)-1}|z|^{2\nu}=\frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2}\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2|z|^{2pk}\Big)=$$

$$=\frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{|1-|z|^pe^{-it}|}dt=\frac{2}{\pi}\frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2}\mathbf{K}(|z|^p).$$

□

В доведенні теореми 2 будемо використовувати наступні факти.

**Лема 1.** *Якщо $n \to \infty$ і $0 \le \Theta < 1$, то*

$$\sup_{f \in H_\infty} \|V_{n,p}(f)\|_{C(\mathbb{T})} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{n}{p} + O(1), \tag{25}$$

*де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно $p$ і $n$.*

Це твердження при $p = 1$ доведене Е. Ландау, а при $1 \le p < n$ — С. Б. Стєчкіним (див. виноску в [11]).

**Лема 2.** *Нехай $n, p \in \mathbb{N},\ p < n$ і функція $\lambda_{n,p}(v)$ визначається формулою*

$$\lambda_{n,p}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le n-p, \\ (n-v)/p, & n-p \le v \le n, \\ 0, & v \ge n. \end{cases}$$

*Тоді, якщо $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}$, то для довільної функції $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ в кожній точці $z \in \mathbb{T}$*

$$f(z) - V_{n,p}(f)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi(ze^{i\theta}) \widehat{\tau}_{n,p}(\theta)\ d\theta, \tag{26}$$

*де*

$$\widehat{\tau}_{n,p}(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (1 - \lambda_{n,p}(v))\psi(v) \cos\theta v\ dv$$

*— косинус–перетворення Фур'є функції $\tau_{n,p}(v) := (1 - \lambda_{n,p}(v))\psi(v)$.*

Доведення цього твердження зводиться до перевірки сумовності функції $\widehat{\tau}_{n,p}$ на $\mathbb{R}$ і застосування теореми 1 з [6] (див. також [7, с.281]). Але, згідно з лемою 2.4.1 в [2, с.88] включення $\widehat{\tau}_{n,p} \in L(\mathbb{R})$ має місце для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{M}$.

**Лема 3.** *Нехай функцій $f$ є аналітичною і обмеженою в $\mathbb{D}$. Тоді*

$$V_{n,p}(f)(z) = \frac{1}{\pi p} \int_{-\infty}^{\infty} f(ze^{i\theta})(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta) \frac{d\theta}{\theta^2} \quad \forall\ z \in \overline{\mathbb{D}},$$

*де при $z \in \mathbb{T}$ під знаком інтеграла розуміються кутові граничні значення функції $f$.*

*Доведення.* Інтегруючи частинами, легко довести рівності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos k\theta(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta) \frac{d\theta}{\theta^2} = k \int_{-\infty}^{\infty} \sin k\theta \cos(n-p)\theta\ \frac{d\theta}{\theta} +$$

$$+(n-p) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(n-p)\theta \cos k\theta\ \frac{d\theta}{\theta} - k \int_{-\infty}^{\infty} \sin k\theta \cos n\theta\ \frac{d\theta}{\theta} -$$

$$-n \int_{-\infty}^{\infty} \sin n\theta \cos k\theta\ \frac{d\theta}{\theta} = -\begin{cases} \pi p, & 0 \le k \le n-p, \\ \pi(n-k), & n-p \le k \le n, \\ 0, & n \le k. \end{cases}$$

Використовуючи останній факт і очевидну рівність

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin k\theta(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta)\frac{d\theta}{\theta^2} = 0,$$

отримаємо формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik\theta}(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta)\ \frac{d\theta}{\theta^2} = -\begin{cases} \pi p, & 0 \le k \le n-p, \\ \pi(n-k), & n-p < k < n, \\ 0, & n \le k. \end{cases}$$

Звідси для будь-якого $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(ze^{i\theta})(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta)\frac{d\theta}{\theta^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k)z^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik\theta}(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta)\ \frac{d\theta}{\theta^2} = V_{n,p}(f)(z).$$

□

*Доведення теореми 2.* Покладемо

$$\lambda^*_{n,p}(v) := \begin{cases} 1, & 0 \le v < n-p, \\ 1 - \frac{v-n+p}{p} \cdot \frac{\psi(n)}{\psi(v)}, & n-p \le v < n, \\ 0, & n \le v, \end{cases}$$

$\tau^*_{n,p}(v) := (1 - \lambda^*_{n,p}(v))\psi(v)$, і

$$\mu_{n,p}(v) := \tau_{n,p}(v) - \tau^*_{n,p}(v) = \begin{cases} 0, & v \in [0; n-p] \cup [n; \infty), \\ \frac{v-n+p}{p}\ (\psi(v) - \psi(n)), & v \in [n-p; n]. \end{cases}$$

Тоді формулу (26) можна переписати у вигляді

$$f(e^{it}) - V_{n,p}(f)(e^{it}) = r^*_{n,p}(f)(e^{it}) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\widehat{\mu}_{n,p}(\theta)\ d\theta, \tag{27}$$

де

$$r^*_{n,p}(f)(e^{it}) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta)\ d\theta. \tag{28}$$

Покажемо, що

$$r^*_{n,p}(f)(e^{it}) = -\psi(n)V_{n,p}(f^{\psi})(e^{it}) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\int\limits_{n}^{\infty} \psi'(v)\sin\theta v\ dv\ \frac{d\theta}{\theta}. \tag{29}$$

Для цього розглянемо рівність

$$\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau^*_{n,p}(v)\cos\theta v\ dv = \frac{\psi(n)}{\pi p}\int\limits_{n-p}^{n}(v-n+p)\cos\theta v\ dv + \frac{1}{\pi}\int\limits_n^\infty \psi(v)\cos\theta v\ dv.$$

Інтегруючи частинами кожен з інтегралів і виконуючи елементарні перетворення, знаходимо

$$\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta) = \frac{\psi(n)}{\pi p}\frac{\cos n\theta - \cos(n-p)\theta}{\theta^2} - \frac{1}{\pi\theta}\int\limits_n^\infty \psi'(v)\sin\theta v\ dv.$$

Підставляючи знайдене значення $\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta)$ в (28) і використовуючи лему 3, отримуємо (29).

Покладемо

$$I_1{:=}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\mu}_{n,p}(\theta)|\ d\theta,\ \ I_2{:=}\int\limits_0^\infty\left|\int\limits_n^\infty \psi'(v)\sin\theta v\ dv\right|\ \frac{d\theta}{\theta}.$$

Тоді формулу (27) з урахуванням (29) можна записати у вигляді співвідношення

$$f(e^{it}) - V_{n,p}(f)(e^{it}) = -\psi(n)V_{n,p}(f^\psi)(e^{it}) + O(1)(I_1+I_2). \tag{30}$$

Для оцінки $I_1$ зауважимо, що для довільної функції $\psi\in\mathfrak{M}_0$ і $0<\varepsilon\le 1$ виконується нерівність $\psi(\varepsilon\sigma)\le K\psi(\sigma),\quad \sigma\ge 1/\varepsilon$, (див. [4, с. 175]). Тому на підставі співвідношення (3.1.51) з [2, с. 135] одержуємо оцінку $I_1\le M(\psi_1(n)+\psi_2(n))\le 2M|\psi(n)|$, де $M$ — константа, залежна тільки від $\psi$.

Оцінка величини $I_2$ знайдена в [4, с. 223]: $I_2\le K(\psi_1(n)+\psi_2(n))\le 2K|\psi(n)|$, де $K$ — константа, залежна тільки від $\psi$.

З урахуванням цих фактів співвідношення (30) набуває вигляду $f(e^{it})-V_{n,p}(f)(e^{it}) = -\psi(n)V_{n,p}(f^\psi)(e^{it}) + O(1)\psi(n)$, що й доводить (19) для випадку, коли $P=0$.

Загальний випадок випливає з доведеного на підставі таких міркувань.

Нехай $P(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n-p} a_k e^{ikt}\in\mathcal{P}_{n-p}$. Тоді функція

$$F(e^{it}){:=}\frac{f(e^{it}) - \sum_{k=0}^{n-p}\psi(k)a_k e^{ikt}}{\|f^\psi - P\|_{C(\mathbb{T})}}$$

належить класові $C^\psi(\mathbb{T})_+$ і тому для неї виконується (19). До того ж,

$$F(e^{it}) - V_{n,p}(F)(e^{it}) = \frac{f(e^{it}) - V_{n,p}(f)(e^{it})}{\|f^\psi - P\|_{C(\mathbb{T})}},\quad V_{n,p}(F^\psi)(e^{it}) = \frac{V_{n,p}(f^\psi - P)(e^{it})}{\|f^\psi - P\|_{C(\mathbb{T})}}.$$

Тут покладається $0/0=0$.

Друга частина теореми є наслідком співвідношень (19) і (25).

Справді,

$$R_{n,p}(C^\psi_\infty(\mathbb{T})_+) = |\psi(n)|\sup_{f\in C^\psi_\infty(\mathbb{T})_+}\|V_{n,p}(f^\psi)\|_{L_\infty(\mathbb{T})} + O(1)|\psi(n)|, \tag{31}$$

а згідно з лемою 1

$$\sup_{f\in C^\psi_\infty(\mathbb{T})_+}\|V_{n,p}(f^\psi)\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = \sup_{g\in H_\infty}\|V_{n,p}(g)\|_{C(\mathbb{T})} = \frac{1}{\pi}\ln\frac{n}{p} + O(1),\ n\to\infty. \tag{32}$$

Тому об'єднавши співвідношення (31) і (32), отримуємо формулу (20). □

## ЛІТЕРАТУРА


1. Сердюк А.С. *Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена*// Укр. мат. журн. – 2004. – Т.56, №1. – С. 97–107.
2. Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближения суммами Валле Пуссена – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 386 с.
3. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 336 с.
4. Степанец А.И. Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
5. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
6. Степанец А.И., Савчук В.В. *Приближения интегралов типа Коши*// Укр. мат. журн. – 2002. – Т.54, №5. – С. 706–740.
7. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 т. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра – М.: Наука, 1973. – Т.1. – 296 с.
9. Савчук В.В. *Приближения средними Фейера функций класса Дирихле*// Мат. заметки – 2007. – Т.81, №5. – С. 744–750.
10. Стечкин С.Б. *Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций*// Изв. АН СССР, Серия математическая. – 1953. – Т.17. – С. 461–472.
11. Тайков Л.В. *О методах суммирования рядов Тейлора*// Успехи мат. наук. – 1962. – Т.17, №1. – С. 252–254.
12. Савчук В.В. *Асимптотика залишку ряда Тейлора для деяких класів аналітичних функцій*// Ряди Фур'є: теорія і застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України – 1998. – С. 263–279.
13. Швецова А.М. *Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций, аналитических в единичном круге*// Вісник Харків. нац. ун–ту. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2000. – Т.475. – С. 208–217.
14. Kolmogoroff A. *Zur Crössendordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbarer Funktionen*// Ann. Math. – 1935. – V.36. – P. 521–526.
15. Zygmund A. *The approximation of functions by typical means of their Fourier series*// Duke Math. J. – 1945. – V.12, №4. – P. 695–704.
16. Гаврилюк В.Т. *О классах насыщения линейных методов суммирования рядов Фур'е*// Укр. мат. журн. – 1988. – Т.40, №5. – С. 569–576.
17. Савчук В.В., Савчук М.В. *Декілька тверджень про суми Валле Пуссена функцій з простору Гарді*// Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т.2, №2 – С. 238–257.



Інститут математики НАН України,
Ін-т підготовки кадрів державної служби зайнятості України,
Слов'янський державний педагогічний університет,
savchuk@imath.kiev.ua,
savchu$k$_m@ukr.net,
stolch@mail.ru


*Надійшло 22.06.2010*