УДК 517.956

І. Д. Пукальський

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З КОСОЮ ПОХІДНОЮ ТА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

I. D. Pukalsky. *Nonlocal problem with angled derivative and optimal control problem for a linear parabolic equations with degeneration*, Mat. Stud. **34** (2010), 90–100.

The problem of optimal control, the problem with inclined derivative for a parabolic equations with power degenerations and nonlocal condition for time variable are investigated in spaces of classic functions with power weight. The results of investigation are applied to case of final control with integral criterion of quality.

И. Д. Пукальский. *Нелокальная задача с косой производной и задача оптимального управления для линейных параболических уравнений с вырождением* // Мат. Студії. – 2010. – Т.34, №1. – С.90–100.

В пространствах классических функций со степенным весом изучается задача оптимального управления системой, описываемой задачей с косой производной для параболических уравнений со степенными вырождениями и нелокальным условием по временной переменной. Рассмотрен случай финального управления с интегральными критериями качества.

Необхідність оптимального керування процесами, що описуються рівняннями параболічного типу, виникає при розв'язуванні багатьох прикладних задач, зокрема, при дослідженні процесів нагрівання і охолодження масивних елементів конструкцій, поширення полів температури. Вивчення таких задач проводилося у [1, 2].

Крайові задачі з нелокальними умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь другого порядку зі степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння досліджувалися у [3].

В статті розглядається задача вибору оптимального керування системою, що описується задачею з косою похідною і нелокальною умовою за часовою змінною для параболічних рівнянь другого порядку зі степеневими особливостями у коефіцієнтах рівняння за часовою змінною у фіксований момент часу та просторовими змінними на деякій множині усередині області. Розглянуто випадок обмеженого керування з критерієм якості у вигляді суми об'ємного та поверхневого інтегралів.

Одержаний результат є продовженням досліджень, проведених у праці [4].

Постановка задачі і основний результат. Нехай t_0, T — фіксовані додатні числа, $t_0 < T$, Ω — деяка область у $\mathbb{R}^n$, $\dim\Omega \le n-1$, D — обмежена область у $\mathbb{R}^n$ з межею

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K35.

∂D, $\overline{\Omega} \subset D$. В області $Q = (0,T] \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій (u,p), на яких функціонал

$$I(p) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \mathcal{F}_1(t,x;u)dx + \int\limits_D \mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega})dx + \int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial D} \mathcal{F}_3(t,x;u)d_xS \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $p \in V = \{p | p \in C^{2+\alpha}(D), \psi_1(x) \le p \le \psi_2(x)\}$, із яких $u(t,x;p)$ задовольняє при $(t,x) \in Q^{(0)} = Q \setminus \{\{(t,x) \in Q | t = t_0, x \in D\} \cup \{(t,x) \in Q | t \in (0,T], x \in \overline{\Omega}\}\}$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^n A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^n A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\right] u = f(t,x) \tag{2}$$

нелокальну умову

$$u(0,x;p) + \sum_{j=1}^N q_j(x)u(t_j,x;p) = \varphi(x;p) \tag{3}$$

і на бічній межі $\Gamma = (0,T] \times \partial D$ — крайову умову

$$(Bu)(t,x)|_\Gamma \equiv \left[\sum_{k=1}^n b_k(t,x)\partial_{x_k}u + b_0(t,x)\right] u\Bigg|_\Gamma = g(t,x), \tag{4}$$

де $\overrightarrow{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_{N+1}) \equiv (u(t_1,x;p), u(t_2,x;p), \ldots u(t_N,x;p), p)$.

Особливості коефіцієнтів диференціального виразу L будуть характеризувати такі функції: $s_1(l_1,t) = |t-t_0|^{l_1}$ при $|t-t_0| \le 1$, $s_1(l_1,t) = 1$ при $|t-t_0| \ge 1$; $s_2(l_2,x) = \rho^{l_2}(x,\partial D)$ при $\rho(x,\partial D) \le 1$, $s_2(l_2,x) = 1$ при $\rho(x,\partial\Omega) \ge 1$, $\rho(x,\partial\Omega)$ — відстань від точки $x \in D \setminus \overline{\Omega}$ до $\partial\Omega$, $s(l;P) \equiv s_1(l_1,t)s_2(l_2,x)$, $P(t,x)$ — довільна точка області Q.

Позначимо через $\beta_k^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_i^{(\nu)}$, δ_ν, α, r — дійсні числа, $\nu \in \{1,2\}$, $\beta_k^{(\nu)} \in (-\infty,\infty)$, $\gamma^{(\nu)} \ge 0$, $\mu_i^{(\nu)} \ge 0$, $i \in \{0,\ldots,n\}$, $\delta_\nu \ge 0$, $\alpha \in (0,1)$, $r \ge 0$, $[r]$ — ціла частина числа r. Означення просторів, у яких буде досліджуватися задача (1)–(4), наведено у праці [4]. Зокрема:

$C^r(\gamma,\beta,\delta;Q)$ — простір функцій u, $(t,x) \in \overline{Q}$, які мають частинні похідні у $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2j + |k| \le [r]$ і є скінченною норма $\|u;\gamma,\beta;\delta;Q\|_r$, де, наприклад,

$$\|u;\gamma,\beta;\delta;Q\|_2 = \sup_{P\in\overline{Q}}[s(\delta;P)|u(P)|] + \sum_{i=1}^n \sup_{P\in\overline{Q}}[s(\delta+\gamma-\beta_i;P)|\partial_{x_i}u(P)|] +$$

$$+ \sum_{ij=1}^n \sup_{P\in\overline{Q}}[s(\delta+2\gamma-\beta_i-\beta_j;P)|\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(P)|] + \sup_{P\in\overline{Q}}[s(\delta+2\gamma;P)|\partial_t u(P)|];$$

$C^r(\mu_j;Q)$ — множина функцій u_j, $(t,x) \in \overline{Q}$, які мають частинні похідні у $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_x^k u$, $|k| \le [r]$, для яких є скінченною норма $\|u_j;\mu_j;Q\|_r$, де, наприклад,

$$\|u_j;\mu_j;Q\|_{[r]} \equiv \sum_{|k|\le[r]} \sup_{P\in\overline{Q}}[s(\mu_j+|k|;P)|\partial_x^k u_j(P)|].$$

Нехай для задачі (1)–(4) виконуються умови:

а) коефіцієнти $A_i \in C^\alpha(\mu_i, Q)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $A_0 < 0$, $A_{ij} \in C^\alpha(\beta_i + \beta_j; Q)$ і виконується умова
$$\pi_1 |\xi|^2 \le \sum_{ij=1}^n s(\beta_i + \beta_j; P) A_{ij}(P) \xi_i \xi_j \le \pi_2 |\xi|^2,$$
π_1, π_2 — додатні сталі;

б) функції
$f(t, x) \in C^\alpha(\gamma, \beta; \mu_0; Q)$, $g(t, x) \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\varphi(x; p(x)) \equiv F(x) \in C^{2+\alpha}(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\beta}; 0; D)$,
$\widetilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\widetilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$, $\beta \in (\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)}, \beta_2^{(\nu)}, \dots, \beta_n^{(\nu)})$;
$\psi_\nu(x) \in C^{2+\alpha}(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\beta}; 0; D)$, $\gamma^{(\nu)} = \max\Big(\max\big(1 + \beta_i^{(\nu)}\big); \max(\mu_i^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}); \dfrac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\Big)$, $\nu \in \{1, 2\}$,
поверхня $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $b_k \in C^{1+\alpha}(\beta_k; Q)$, $b_0 \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $b_0|_\Gamma > 0$, вектор $\vec{b}^{(s)} = \{s(\beta_1; P) b_1, \dots, s(\beta_n, P) b_n\}$ утворює з напрямком внутрішньої нормалі $\vec{n}$ до Γ в точці $P \in \Gamma$ гострий кут, $q(x) \in C^{2+\alpha}(D)$, $\sum_{j=1}^N |q_j(x)| \le \lambda_0 < 1$;

в) функції $\mathcal{F}_1(t, x; u)$, $\mathcal{F}_2(x; \overrightarrow{\omega})$ і $\mathcal{F}_3(t, x; u)$ визначені відповідно у областях $Q \times \mathbb{R}^1$, $D \times \mathbb{R}^N \times [\psi_1, \psi_2]$, $\Gamma \times \mathbb{R}^1$, мають гельдерові похідні другого порядку за змінними u, ω_1, …, ω_N, p, які належать як функції (t, x) простору $C^\alpha(Q)$.

г) $(BF)(x)|_{\partial D} = \Big(g(0, x) + \sum_{j=1}^N q_j(x) g(t_j, x)\Big)\Big|_{\partial D}$, $\sum_{j=1}^N b_k(t_j, x) \partial_{x_k} q_j(x)\Big|_{\partial D} = 0$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі (2)–(4) виконані умови а), б), г). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2)–(4) у просторі $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і для нього правильна оцінка*
$$\|u; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \le c(\|f; \gamma, \beta; \mu_0; Q\|_\alpha + \|F; \widetilde{\gamma}, \widetilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} + \|g\|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)}). \tag{5}$$

Для доведення теореми 1 побудуємо послідовність розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничне значення якої буде розв'язком задачі (2)–(4).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m = Q \cap \{(t, x) \in Q | s_1(1, t) \ge m_1^{-1}, s_2(1, x) \ge m_2^{-1}\}$ — послідовність областей, яка при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігається до Q. Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язків рівняння
$$(L_1 u_m)(t, x) = \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} - \sum_{i=1}^n a_i(t, x) \partial_{x_i} - a_0(t, x)\Big] u_m = f_m(t, x), \tag{6}$$
які задовольняють нелокальну умову
$$u_m(0, x) + \sum_{j=1}^N q_j(x) u_m(t_j, x) = F_m(x) \tag{7}$$
і на бічній межі Γ крайову умову
$$(B u_m)(t, x)|_\Gamma \equiv \Big[\sum_{k=1}^n b_k(t, x) \partial_{x_k} + b_0(t, x)\Big] u_m|_\Gamma = g(t, x). \tag{8}$$

Коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, функції f_m, F_m є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, функцій f, F із області Q_m у область $Q \setminus Q_m$ [5]. Наприклад, коефіцієнти $a_i(t,x) = \min(A_i(t,x), A_i(m_1^{-1}, x))$ при $t_0 \le m_1^{-1}$ і

$$a_i(t,x) = \min\Big(A_i(t,x), \frac{m_1(t_0-t)+1}{2} A_i(t_0 - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t-t_0)+1}{2} A_i(t_0 + m_1^{-1}, x)\Big)$$

при $t_0 \ge m_1^{-1}$, $(t,x) \in (0,T) \times \{x \in D | s_2(1,x) \ge m_2^{-1}\}$, $i \in \{0,1,\dots,n\}$.

Для $(t,x) \in Q \setminus \{(0,T) \times \{x \in D | s_2(1,x) \ge m_2^{-1}\}\}$ коефіцієнти $a_i(t,x)$ є розв'язками внутрішньої задачі $\partial_t \omega_i = \Delta \omega_i$, $\omega_i(0,x) = 0$, $\omega_i|_{\Gamma_m} = a_i|_{\Gamma_m}$, $\Gamma_m = (0,T] \times \{x \in D | s_2(1,x) = m_2^{-1}\}$, $m = (m_1, m_2)$.

Теорема 2. *Якщо u_m — класичний розв'язок задачі (6)–(8) у області Q і виконані умови а), б), то для u_m справедлива оцінка*

$$|u_m| \le \max\Big\{ \max_{\overline{Q}} |f_m a_0^{-1}|, \max_D \Big| F_m\Big(1 - \sum_{j=1}^N |q_j(x)|\Big)^{-1}\Big|, \max_\Gamma |g b_0^{-1}| \Big\}. \tag{9}$$

Доведення теореми 2 проводиться за методикою доведення теореми 2.2 із [6, с. 25]. Відмінність лише у випадку, коли $0 < \max_{\overline{Q}} u_m = \max_D u_m = u_m(0, x^{(1)})$. Тоді, використовуючи нелокальну умову (7), знаходимо $u_m(0,x^{(1)}) \le \max_D (F_m(x)(1 - \sum_{j=1}^N |q_j(x)|)^{-1})$.

Аналогічно одержуємо оцінку у випадку $\min_{\overline{Q}} u_m \equiv \min_D u_m(0,x)$.

Теорема 3. *Нехай виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (6)–(8) у просторі $C^{2+\alpha}$ і для нього справедлива оцінка (9).*

Розв'язок задачі (6)–(8) шукаємо у вигляді

$$u_m(t,x) = \int_D E_m(t,x,0,\xi) u_m(0,\xi) d\xi + v_m^{(1)}(t,x), \tag{10}$$

де $v_m^{(1)}(t,x)$ — розв'язок задачі з косою похідною

$$(L_1 v_m^{(1)})(t,x) = f_m(t,x), \quad v_m^{(1)}(0,x) = F_m(x), \quad (B v_m^{(1)})(t,x)|_\Gamma = g(t,x), \tag{11}$$

$E_m(t,x,\tau,\xi)$ — функція Гріна однорідної задачі (11) ($g(t,x) = 0$).

При виконанні умов а), б) розв'язок задачі (11) при кожному фіксованому m існує і для нього справедлива оцінка

$$|v_m^{(1)}| \le \max(\max_D |F_m|; \max_{\overline{Q}} |f_m a_0^{-1}|, \max_\Gamma |g b_0^{-1}|). \tag{12}$$

Задовольнивши нелокальну умову (7), одержимо

$$u_m(0,x) + \sum_{j=1}^N q_j(x) \int_D E_m(t_j,x,0,\xi) u_m(0,\xi) d\xi = -\sum_{j=1}^n q_j(x) v_m^{(1)}(t_j,x). \tag{13}$$

Доведення. Розв'язок інтегрального рівняння (13) шукаємо методом послідовних наближень. Оскільки $E_m(t,x,0,\xi) \geq 0$,

$$0 \leq \int\limits_D E_m(t,x,0,\xi)d\xi \leq 1, \Big|\sum_{j=1}^N q_j(x)\int\limits_D E_m(t_j,x,0,\xi)\Big| \leq \sum_{j=1}^N |q_j(x)| \leq \lambda_0 < 1,$$

то для розв'язку рівняння (13) справедлива оцінка

$$|u_m(0,x)| \leq \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\max_{\overline{Q}}|v_m^{(1)}|. \tag{14}$$

Запишемо рівність (13) у вигляді

$$u_m(0,x) = -\sum_{j=1}^N q_j(x)\Big[\int\limits_D E_m(t_j,x,0,\xi)u_m(0,\xi)d\xi + v_m^{(1)}(t_j,x)\Big].$$

Враховуючи оцінку (14), обмеження на функції $q_j(x)$, F_m, f_m, g, одержимо, що $u_m(0,x) \in C^{2+\alpha}(D)$. Тому, використовуючи зображення (10), маємо, що $u_m(t,x) \in C^{2+\alpha}(Q)$.

Встановимо формулу зображення розв'язку задачі (6)–(8).

Враховуючи обмеження $\lambda_0 < 1$, визначимо розв'язок інтегрального рівняння (13) у вигляді

$$u_m(0,x) = F^{(1)}(x) + \int\limits_D \Phi(x,y)F^{(1)}(y)dy, \tag{15}$$

де $F^{(1)}(x) = -\sum_{j=1}^N q_j(x)v_m^{(1)}(t_j,x)$, $\Phi(x,y)$ — резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння $\Phi(x,y) + \sum_{j=1}^N q_j(x)E_m(t_j,x,0,y) = -\int_D \sum_{j=1}^N q_j(x)E_m(t_j,x,0,\xi)\Phi(\xi,y)d\xi$, розв'язуючи яке, знаходимо $\Big|\int_D \Phi(x,y)dy\Big| \leq \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}$.

Поклавши у рівність (15) замість $F^{(1)}(y)$ значення

$$F^{(1)}(x) = -\sum_{j=1}^N q_j(x)\Big[\int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_D E_m(t_j,x,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi)d\xi +$$
$$+\int\limits_D E_m(t_j,x,0,\xi)F_m(\xi)d\xi + \int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_{\partial D} E_m^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S\Big],$$

де $E_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)$ — функція Гріна крайової задачі $(L_1 u_m)(t,x) = 0, u_m(0,x) = 0,$

$(Bu_m)(t,x)|_\Gamma = g(t,x)$, і змінивши порядок інтегрування, одержимо

$$u_m(0,x) = \sum_{j=1}^{N}\Big[\int_0^{t_j} d\tau \int_D \Gamma_m^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi)d\xi + \int_D \Gamma_m^{(1)}(t_j,x,0,\xi)F_m(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^{t_j} d\tau \int_{\partial D} \Gamma_m^{(2)}(t_j,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S\Big],$$

$$\Gamma_m^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi) = -q_j(x)E_m(t_j,x,\tau,\xi) - \int_D \Phi(x,y)q_j(y)E_m(t_j,y,\tau,\xi)dy,$$

$$\Gamma_m^{(2)}(t_j,x,\tau,\xi) = -q_j(x)E_m^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi) - \int_D \Phi(x,y)q_j(y)E_m^{(1)}(t_j,y,\tau,\xi)dy.$$

Підставляючи значення $u_m(0,x)$ у поверхневий інтеграл рівності (10) і змінюючи порядок інтегрування, одержимо зображення

$$u_m(t,x) = \int_0^t d\tau \int_D E_m(t,x,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi)d\xi + \int_D E_m(t,x,0,\xi)F_m(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\partial D} E_m^{(1)}(t,x,0,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S + \sum_{j=1}^{N}\Big[\int_0^{t_j} d\tau \int_D Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int_D Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi)F_m(\xi) + \int_0^{t_j} d\tau \int_{\partial D} Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S\Big], \quad (16)$$

де $Z_j^{(\nu)}(t,x,\tau,\xi) = \int_D E_m(t,x,0,y)\Gamma_m^{(\nu)}(t_j,y,\tau,\xi)dy, j \in \{1,\dots,n\}$.

Введемо у просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|u_m;\gamma,\beta;\delta;Q\|_{2+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma,\beta;\delta;Q\|_{2+\alpha}$, тільки замість функцій $s_1(l_1,t)$, $s_2(l_2,x)$ беремо відповідно $d_1(l_1,t)$, $d_2(l_2,x)$: $d_1(l_1,t) = \max(s_1(l_1,t), m_1^{-l_1})$ при $l_1 \geq 0$ і $d_1(l_1,t) = \min(s_1(l_1,t), m_1^{-l_1})$ при $l_1 \leq 0$; $d_2(l_2,x) = \max(s_2(l_2,x), m_2^{-l_2})$ при $l_2 \geq 0$ і $d_2(l_2,x) = \min(s_2(l_2,x), m_2^{-l_2})$ при $l_2 \leq 0$; $d(l;P) = d_1(l_1,t)d_2(l_2,x)$.

При накладених обмеженнях на гладкість коефіцієнтів диференціальних виразів L_1 і B існує єдиний розв'язок задачі (6)–(8), який належить $C^{2+\alpha}(Q)$ і має при кожному m_1, m_2 скінченну норму $\|u_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}$. □

Правильна така теорема.

Теорема 4. *Якщо виконані умови теореми 1, то для роз'язку задачі (6)–(8) справедлива оцінка*

$$\|u_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \leq c(\|f;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \|F;\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} + \|g\|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)}). \quad (17)$$

Нерівність (17) одержується за методикою доведення теорем 11 і 12 із [7].
Доведення нерівності (5). Права частина нерівності (17) не залежить від m_1, m_2 і послідовності $\{V_m^{(0)}\} = \{|u_m(P)|\}$, $\{V_m^{(1)}\} = \{d(\gamma - \beta_i; P)|\partial_{x_i} u_m(P)|\}$, $\{V_m^{(2)}\} = \{d(2\gamma - \beta_i - \beta_j; P)|\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(P)|\}$, $\{V_m^{(3)}\} = \{d(2\gamma; P)|\partial_t u_m(P)|\}$, $P \in Q$ рівномірно обмежені та одностайно неперервні. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{V_{m(j)}^{(k)}\}$, $k \in \{0,1,2,3\}$, рівномірно збіжні в Q. Переходячи до границі при $m(j) \to \infty$ у задачі (6)–(8) одержимо єдиний розв'язок задачі (2)–(4) $u \in C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і правильна оцінка (5).

Задача оптимального керування. Для розв'язання задачі (1)–(4) побудуємо послідовність розв'язків задач, граничне значення якої буде розв'язком задачи (1)–(4).

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій (u_m, p), на яких функціонал

$$I(p) = \int_0^T dt \int_D \mathcal{F}_1(t, x; u_m) dx + \int_D \mathcal{F}_2(x; \overrightarrow{\omega}) dx + \int_0^T dt \int_{\partial D} \mathcal{F}_3(t, x; u) d_x S \tag{18}$$

досягає мінімуму у класі функцій $p \in V$, із яких u_m є розв'язком задачі

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x), u_m(0,x,p) + \sum_{j=1}^N q_j(x) u_m(t_j, x, p) = \varphi_m(x,p), (B u_m)(t,x)\Big|_\Gamma = g(t,x). \tag{19}$$

Позначимо

$$G_m(t,x,0,\xi) = E_m(t,x,0,\xi) + \sum_{j=1}^N Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi),$$

$$\lambda(x) = \int_0^T dt \int_D G_m(t,\xi,0,x)\partial_{u_m}\mathcal{F}_1(t,x;u_m)dx + \sum_{j=1}^N \int_D G_m(t_j,\xi,0,x)\partial_{\omega_j}\mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega})dx +$$

$$+ \int_0^T d\tau \int_{\partial D} G_m(\tau,\xi,0,x)\partial_{u_m}\mathcal{F}_3(\tau,\xi;u)d_\xi S, \quad H(\overrightarrow{\omega}_m, \lambda, p) = \mathcal{F}_2(t, \overrightarrow{\omega}_m) + \lambda(x)\varphi_m(x,p).$$

Правильна така теорема.

Теорема 5. *Якщо функція $H(\overrightarrow{\omega}_m, \lambda, p)$ за аргументом p є монотонно зростачою для $p \in V$, то оптимальним керуванням є $p^{(0)}(x) = \psi_1(x)$, а оптимальним розв'язком задачі (19) є $u_m^{(0)}(t,x;p) = u_m(t,x;\psi_1(x))$.*

Якщо функція $H(\overrightarrow{\omega}_m, \lambda, p)$ за аргументом p є монотонно спадною для $p \in V$, то оптимальним керуванням є $p^{(0)}(x) = \psi_2(x)$, а оптимальним розв'язком задачі (19) є $u_m^{(0)}(t,x;p) = u_m(t,x;\psi_2(x))$.

Доведення. Нехай Δp — допустимий приріст керування $p(x)$, $p + \Delta p \in V$. Тоді відповідний приріст Δu_m розв'язку $u_m(t,x;p)$ у області Q буде розв'язком крайової задачі

$$(L_1 \Delta u_m)(t,x) = 0, \quad (B\Delta u_m)(t,x)|_\Gamma = 0, \quad \Delta u_m(t,x;p) +$$

$$+ \sum_{j=1}^N q_j(x)\Delta u_m(t_j, x; p) = \varphi_m(x; p + \Delta p) - \varphi_m(x;p) = \Delta\varphi_m(x;p). \tag{20}$$

За допомогою формули Тейлора запишемо приріст функціоналу $I_m(p)$:

$$\Delta I_m(p) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D [\partial_{u_m} \mathcal{F}_1(t,x;u_m)\Delta u_m + O(|\Delta u_m|^2)]dx+$$

$$+\int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial D} [\partial_{u_m} \mathcal{F}_3(t,x;u_m)\Delta u_m + O(|\Delta u_m|^2)]d_x S+ \tag{21}$$

$$+\int\limits_D \Big[\sum_{j=1}^N \partial_{\omega_j}\mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega}_m)\Delta u_m(t_j,x;p)\partial_p \mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega}_m)\Delta p + O(|\Delta u_m|^2) + O(|\Delta p|^2)\Big]dx.$$

Оскільки Δu_m — розв'зок задачі (20), то використовуючи формулу (16), маємо

$$\Delta u_m = \int\limits_D G_m(t,x,0,\xi)\Delta\varphi(\xi;p)d\xi. \tag{22}$$

Підставляючи (22) у (21) і змінюючи порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I_m(p) = \int\limits_D \Big[\int\limits_0^T d\tau \int\limits_D G_m(\tau,\xi,0,x)\partial_{u_m}\mathcal{F}_1(\tau,\xi;u_m)d\xi+$$

$$\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\partial D} G_m(\tau,\xi,0,x)\partial_{u_m}\mathcal{F}_3(\tau,\xi;u_m)d_\xi S + \sum_{j=1}^N \int\limits_D G_m(t_j,\xi,0,x)\partial_{\omega_j}\mathcal{F}_2(\xi;\overrightarrow{\omega}_m)d\xi\Big]\times$$

$$\times\Delta\varphi(x;p)dx + \int\limits_D [\partial_p \mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega}_m)\Delta p + O(|\Delta u_m|^2) + O(|\Delta p|^2)]dx.$$

Якщо $p = p^{(0)}(x)$ і $H(\overrightarrow{\omega}_m,\lambda,p)$ задовольняє умови теореми 5, то при досить малих Δp маємо $\Delta I_m(p) > 0$. $\square$

Теорема 6. *Нехай $H(\overrightarrow{\omega}_m,\lambda,p)$ — немонотонна функція за аргументом p Для того, щоб керування $p^{(0)}(t,x)$ і відповідний розв'язок $u_m^{(0)}(t,x;p^{(0)})$ крайової задачі (18) були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:*

1) функція $H(\overrightarrow{\omega}_m,\lambda,p)$ за аргументом p має при $p = p^{(0)}$ мінімальне значення;

2) для довільного вектора $(e_1,\dots,e_{N+1}) \neq 0$ і $x \in \overline{D}$ виконується нерівність

$$\mathcal{K}_1(x;e) = \sum_{ij=1}^{N+1} \partial^2_{\omega_i\omega_j}\mathcal{F}_2(x,\overrightarrow{\omega}_m)e_ie_j - \lambda(x)\partial_{\omega^2_{N+1}}\varphi(x,\omega_{N+1})e_{N+1} > 0;$$

3) для $(t,x) \in \overline{Q}$ $\partial^2_{u_m}\mathcal{F}_1(t,x;u_m^{(0)}) > 0$ і для $(t,x) \in \Gamma$ $\partial^2_{u_m}\mathcal{F}_3(t,x;u_m^{(0)}) > 0$.

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 2 із [8].

Пояснимо, як знаходиться $u_m^{(0)}$ і $p^{(0)}$. Якщо $p^{(0)}$ — оптимальне, то $\partial_p H(\overrightarrow{\omega}_m^{(0)},\lambda,p^{(0)}) = 0$ і $\partial_p^2 H(\overrightarrow{\omega}_m^{(0)},\lambda,p^{(0)}) > 0$. Застосовуючи теорему про неявні функції до рівняння $\partial_p H(\overrightarrow{\omega}_m^1,\lambda,p^{(0)}) = 0$, одержимо, що $p^{(0)} = W(\overrightarrow{\omega}_m^{(0)},\lambda)$ і $W(\overrightarrow{\omega}_m^{(0)},\lambda)$ — диференційовна функція за змінними λ і $\overrightarrow{\omega}_m^{(0)}$.

Введемо у задачу (18), (19) параметр A, поклавши $u_m^{(0)}(t,x;p^{(0)}) = v_m(t,x;p^{(0)})$ $\exp(-At)$, де A — довільна додатна стала, яку визначимо пізніше. Використовуючи теорему 3, поставимо у відповідність задачі (19) систему інтегральних рівнянь

$$p^{(0)}(x) = W(e^{-At_1}v_m(t_1,x;p^{(0)}),\dots e^{-At_N}v_m(t_N,x;p^{(0)}),\lambda(x)),$$

$$\lambda(x) = \int\limits_0^T e^{-At}dt\int\limits_D G_m(t,\xi,0,x)[\partial_{u_m}\mathcal{F}_1(\tau,\xi;v_m e^{-A\tau}) - \partial_{u_m}\mathcal{F}_1(\tau,\xi;0)]d\xi+$$

$$\sum_{j=1}^N e^{-At_j}\int\limits_D G_m(t_j,\xi,0,x)[\partial_{\omega_j}\mathcal{F}_2(\xi,e^{-At_1}v_m(t_1,x;p^{(0)}),e^{-At_N}v_m(t_N,x;p^{(0)}),p^{(0)})-$$

$$-\partial_{\omega_j}\mathcal{F}_2(\xi,0,\dots,0)]d\xi + \int\limits_0^T e^{-At}dt\int\limits_D G_m(t,\xi,0,x)[\partial_{u_m}\mathcal{F}_3(t,\xi;v_m e^{-At}) - \partial_{u_m}\mathcal{F}_3(t,\xi;0)]d_\xi S+$$

$$+\mu(x), v_m = w_m^{(1)}(t,x) + \int\limits_D G_m(t,\xi,0,x)[\varphi_m(\xi;p^{(0)}) - \varphi_m(\xi;0)]d\xi; \tag{23}$$

$$\mu(x) = \int\limits_0^T e^{-At}dt\int\limits_D G_m(t,\xi,0,x)\partial_{u_m}\mathcal{F}_1(t,\xi,0)d\xi + \sum_{j=1}^N e^{-At_j}\int\limits_D G_m(t_j,x,0,\xi)+$$

$$+\partial_{\omega_j}\mathcal{F}_1(\xi,0,\dots,0)d\xi + \int\limits_0^T e^{-At}dt\int\limits_{\partial D} G_m(t,\xi,0,x)\partial_{u_m}\mathcal{F}_3(t,\xi;0)d_\xi S,$$

$w_m^{(1)}$ — розв'язок нелокальної задачі з косою похідною

$$(L_1 w_m^{(1)} - A w_m^{(1)})(t,x) = e^{At}f_m(t,x), \quad (Bw_m^{(1)})(t,x)|_\Gamma = g(t,x)e^{At},$$

$$w_m^{(1)}(0,x) + \sum_{j=1}^N q_j(x)w_m^{(1)}(t_j,x)e^{-At_j} = \varphi_m(x,0).$$

В силу обмежень на функції $\mathcal{F}_1(t,x;u_m)$, $\mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega}_m)$, $\varphi_m(x,p)$, $\mathcal{F}_3(t,x;u_m)$ маємо

$$|\varphi_m(\xi;p^{(0)}) - \varphi_m(\xi;0)| \le \left(\sum_{j=1}^N e^{-At_j}|v_m(t_j,x)| + |\lambda(x)|\right)\max_{\overline{D}}|\partial_p\varphi_m|,$$

$$|\partial_{u_m}\mathcal{F}_1(t,\xi;e^{-At}v_m) - \partial_{u_m}\mathcal{F}_1(t,\xi;0)| \le e^{-At}|v_m(t,x)|\max_{\overline{Q}}|\partial^2_{u_m}\mathcal{F}_1|,$$

$$|\partial_{\omega_j}\mathcal{F}_2(\xi;\overrightarrow{\omega}) - \partial_{\omega_j}\mathcal{F}_2(\xi;0)| \le \sum_{j=1}^N e^{-At_j}|v_m(t_j,x)|\max_{\overline{Q}}|\partial_{\omega_i}\partial_{\omega_j}\mathcal{F}_2|,$$

$$|\partial_{u_m}\mathcal{F}_3(t,x;u_m) - \partial_{u_m}\mathcal{F}_3(t,x;0)| \le e^{-At}|v_m(t,x)|\max_\Gamma|\partial^2_{u_m}\mathcal{F}_3|.$$

Використовуючи теорему 2, знаходимо

$$|w_m^{(1)}| \leq c\left(\|e^{At} f_m\|_{C(Q)} + \|\varphi(x,0)\|_{C(D)} + \|g e^{At}\|_{C(\Gamma)} \right) \equiv T_1,$$

$$|\mu| \leq c\left(\|\partial_{u_m} \mathcal{F}_1(t,x;0)\|_{C(Q)} + \sum_{j=1}^{N} \|\partial_{\omega_j} \mathcal{F}_2(x;0,\ldots,0)\|_{C(D)} + \|\partial_{u_m} \mathcal{F}_3(t,x;0)\|_{C(\Gamma)} \right) \equiv T_2.$$

Розв'язок системи (23) шукаємо методом послідовних наближень. Для різниці послідовних наближень маємо

$$|\lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)| \leq (T_1 + T_2)\left[\frac{1}{2A}(1 - e^{-2AT})\|\partial^2_{u_m} \mathcal{F}_1(t,x;0)\|_{C(Q)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{ij=1}^{N} e^{-A(t_i+t_j)} \|\partial^2_{\omega_i\omega_j} \mathcal{F}_2\|_{C(D)} + \frac{1}{2A}(1 - e^{-2AT})\|\partial^2_{u_m} \mathcal{F}_3\|_{C(\Gamma)} \right] \equiv (T_1 + T_2) B_1,$$

$$|v_m^{(1)} - v_m^{(0)}| \leq (T_1 + T_2)\left[\sum_{j=1}^{N} e^{-At_j} \|\partial_p \varphi\|_{C(D)} + c\|\partial_p \varphi\|_{C(D)} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{1}{2A}(1 - e^{-2At})\|\partial^2_{u_m} \mathcal{F}_1\|_{C(Q)} + \sum_{ij=1}^{N} e^{-A(t_i+t_j)} \|\partial^2_{\omega_i\omega_j} \mathcal{F}_2\|_{C(D)} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2A}(1 - e^{-2At})\|\partial^2_{u_m} \mathcal{F}_3\|_{C(\Gamma)} \right]\right] \equiv (T_1 + T_2) B_2.$$

Параметр A вибираємо так, щоб виконувалася нерівність $c(A) = \max(B_1, B_2) < 1$. Методом індукції доводиться, що для $k \in \{2, 3, \ldots\}$

$$|\lambda^{(k)}(x) - \lambda^{(k-1)}(x)| \leq c^k(A)(T_1 + T_2), |v_m^{(k)}(x) - v_m^{(k-1)}(x)| \leq c^k(A)(T_1 + T_2).$$

Отже, послідовності $\{\lambda^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{v_m^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ рівномірно збігаються до $\lambda^{(0)}(x)$ і $v_m^{(0)}$ відповідно. Ці функції задовольняють нерівності

$$|v_m^{(0)}| \leq T_1 + T_2, \quad |\lambda^{(0)}| \leq T_1 + T_2. \tag{24}$$

Оскільки $u_m^{(0)} = v_m^{(0)} \cdot e^{-At}$, то, використовуючи нерівності (24) і повторюючи схему доведення нерівності (5), при переході до границі при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ в задачі (18), (19) одержуємо розв'язок задачі (1)–(4).

ЛІТЕРАТУРА

1. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
2. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наук. думка, 1979. – 360 с.

3. Пукальский И.Д. *Нелокальные краевые задачи для неравномерно параболических уравнений*// Дифф. ур. – 2003. – Т.39, №6. – С. 777–787.
4. Пукальський І.Д. *Задача Діріхле та задача оптимального керування для лінійних параболічних рівнянь з виродженням*// Мат. Студ. – 2005. – Т.23, №2. – С. 179–190.
5. Пукальский И.Д. *Краевая задача для линейных параболических уравнений с вырождениями*// Укр. мат. журн. – 2005. – Т.57, №3. – С. 377–387.
6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
7. Пукальский И.Д. *Краевые задачи для параболических уравнений с вырождениями*// Нелинейные граничные задачи. – 2006. – Т.16. – С. 213–221.
8. Пукальський І.Д. *Функція Гріна параболічної крайової задачі і задача оптимізації*// Укр. мат. журн. – 2000. – Т.52, №4. – С. 567–571.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Надійшло 02.07.2007