УДК 517.929.2

О. М. Мартинюк

ТЕОРЕМА ГОХШТАДТА–ЛІБЕРМАНА ДЛЯ СТІЛЬТЬЄСІВСЬКОЇ СТРУНИ

O. M. Martynyuk. *The Hochstadt–Lieberman theorem for Stieltjes string*, Mat. Stud. **34** (2010), 80–89.

The following problem is considered. The values of point masses located on the left part of a Stieltjes string are known together with the lengths of the intervals between them. The number of the masses on the left part is the half of the total number of masses. The spectrum of the Dirichlet problem is also known as well as the the total length of the string. The values of the masses on the right part and the lengths of the intervals between them should be found. A necessary and sufficient condition for existence of a solution of such problem is given in an implicit form. It is proved that the solution is unique. A method of recovering values of the masses and lengths of the intervals on the right part is proposed.

О. М. Мартынюк. *Теорема Гохштадта–Либермана для струны Стильтьеса* // Мат. Студії. – 2010. – Т.34, №1. – C.80–89.

Рассмотрена следующая задача. Известны величины точечных масс, расположенных на левой части струны и длины интервалов между ними, а также спектр задачи Дирихле, порожденной этой струной, и длина струны. Необходимо найти величины масс на правой части струны и длины интервалов между ними. В неявном виде найдено необходимое и достаточное условие существования решения этой задачи. Доказано, что это решение является единственным. Предложен метод нахождения масс и длин интервалов на правой части струны.

1. Вступ. Відомо [1] (див. також [2],[3]), що два спектри крайових задач однозначно визначають потенціал рівняння Штурма–Ліувілля. Відомо також, що два спектри крайових задач разом з загальною довжиною струни однозначно визначають розподіл маси струни [4]. Так звана напівобернена задача або задача Гохштадта–Лібермана, була вперше розглянута в [5]. Вона полягає в тому, що відомий спектр крайової задачі, породженої рівнянням Штурма–Ліувілля на інтервалі $[0,\ a]$ та потенціал цього рівняння на інтервалі $[0, a/2]$, треба знайти потенціал на інтервалі $(a/2,]$. В [5] доведено, що ці дані однозначно визначають потенціал на інтервалі $(a/2,]$. Узагальнення цього результату можна знайти в [6]. Слід відмітити, що в [5] не був запропонований метод відновлення потенціалу. Методи відновлення потенціалу можна знайти в [7], [8]. Напівобернена задача в деякому сенсі виглядає порідненою з, так званою, оберненою задачею за трьома спектрами [6], [9], [10].

Стільтьєсівською струною М. Г. Крейн назвав пружну невагому нитку, яка несе на собі зосереджені маси, що можуть накопичуватися до одного з кінців. Ми розглядаємо випадок скінченої кількості зосереджених мас. Прямі задачі, породжені рівняннями

2000 *Mathematics Subject Classification:* 39A70, 34K10, 34K29.

стільтьєсівської струни зі скінченою кількістю зосереджених мас, були розв'язані у [11] (випадок демпфування на правому кінці розглянуті у [10], [12], [13]). Задача за трьома спектрами, породжена рівнянням стільтьєсівської струни, розглянута у [14]. Узагальнення на випадок крайових задач на зірковому графі можна знайти в [15].

В даній роботі розглядається задача Гохштадта–Лібермана для стільтьєсівської струни зі скінченою парною кількістю зосереджених мас та з умовами Діріхле на кінцях. Вона полягає в наступному: припускається, що величини мас, кількість яких становить половину загальної і які розташовані на лівій частині струни, відомі, так само як і інтервали між ними. Відомий також спектр коливань струни та її загальна довжина. Треба знайти маси на правій частині струни та інтервали між ними.

Для розв'язання цієї оберненої задачі в розділі 2 отримані деякі допоміжні факти в рамках прямої задачі. В розділі 3 розглянута саме вищезгадана обернена задача.

Доведено, що дані задачі однозначно визначають маси на правій частині та інтервали між ними. Запропонований метод знаходження цих величин. У неявному вигляді подана характеризація спектру, тобто умови існування розв'язку такої оберненої задачі.

2. Пряма задача. Розглянемо струну Стільтьєса довжини l зі скінченною кількістю зосереджених мас та із закріпленими кінцями. Виберемо на ній деяку точку А, в якій нема зосередженої маси та зліва від якої знаходиться n_1 зосереджені маси, величини яких позначимо через m_k, $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$. Ці маси розбивають ліву частину струни на часткові відрізки довжин l_k, $k \in \{0, 1, \dots, n_1\}$. Часткові маси та відрізки зліва від точки А занумеровані у порядку зростання індексів від лівого кінця струни.

Справа від точки А знаходиться n_2 зосереджені маси $\widetilde{m}_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n_2\}$, що розбивають праву частину струни на часткові відрізки довжин $\widetilde{l}_k$, $k \in \{0, 1, \dots, n_2\}$. Часткові відрізки та зосереджені маси справа від точки А занумеровані у порядку зростання індексів, починаючи від правого кінця струни (див. рис.1). Тоді довжина відрізка, що містить обрану точку А буде: $l_{n_1} + \widetilde{l}_{n_2}$.

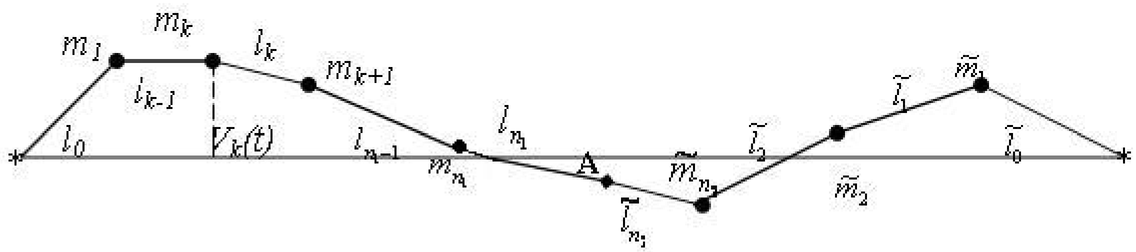

Рис. 1: Скінчена струна Стільтьєса довжини l з закріпленими кінцями.

Малі коливання такої струни можна охарактеризувати за допомогою поперечних зміщень зосереджених мас $V_k(t)$.

Якщо обрати деяку масу m_k і розглянути її зміщення $V_k(t)$, то коливання цієї маси описує наступне рівняння

$$\frac{V_k(t) - V_{k-1}(t)}{l_{k-1}} + \frac{V_k(t) - V_{k+1}(t)}{l_k} - m_k V_k''(t) = 0 \quad (k \in \{1, 2, \dots, n_1\}). \tag{1}$$

Аналогічне рівняння описує коливання маси $\widetilde{m}_k$

$$\frac{\widetilde{V}_k(t) - \widetilde{V}_{k-1}(t)}{\widetilde{l}_{k-1}} + \frac{\widetilde{V}_k(t) - \widetilde{V}_{k+1}(t)}{\widetilde{l}_k} - \widetilde{m}_k \widetilde{V}_k{}''(t) = 0 \quad (k \in \{1, 2, \dots, n_2\}). \tag{2}$$

Умови закріплення кінців струни — умови Діріхле, мають вигляд

$$V(0)=0, \quad \widetilde{V}(0)=0. \tag{3}$$

В точці A виконуються наступні умови зшивання

$$\frac{V_{n_1+1}(t)-V_{n_1}(t)}{l_{n_1}}+\frac{\widetilde{V}_{n_2+1}(t)-\widetilde{V}_{n_2}(t)}{\widetilde{l}_{n_2}}=0, \tag{4}$$

$$V_{n_1+1}(t)=\widetilde{V}_{n_2+1}(t). \tag{5}$$

Виконуючи в (1)–(5) заміни $V_k(t)=U_k e^{i\rho t}$ та $\widetilde{V}_k(t)=\widetilde{U}_k e^{i\rho t}$, приходимо до системи лінійних рівнянь

$$\frac{U_k-U_{k-1}}{l_{k-1}}+\frac{U_k-U_{k+1}}{l_k}+m_k\lambda U_k=0, \tag{6}$$

$$\frac{\widetilde{U}_k-\widetilde{U}_{k-1}}{\widetilde{l}_{k-1}}+\frac{\widetilde{U}_k-\widetilde{U}_{k+1}}{\widetilde{l}_k}+\widetilde{m}_k\lambda \widetilde{U}_k=0, \tag{7}$$

$$\widetilde{U}_0=0, \tag{8}$$

$$U_0=0, \tag{9}$$

$$U_{n_1+1}=\widetilde{U}_{n_2+1}, \tag{10}$$

$$\frac{U_{n_1}-U_{n_1+1}}{l_{n1}}+\frac{\widetilde{U}_{n_2}-\widetilde{U}_{n_2+1}}{\widetilde{l}_{n_2}}=0, \tag{11}$$

де $U_k, \widetilde{U}_k$ — амплітуди коливань мас m_k та $\widetilde{m}_k$ відповідно, а число $\lambda=\rho^2$ відіграє роль спектрального параметра.

Множину $\{\lambda_k\}$ значень λ, для яких існує нетривіальний розв'язок

$$\{U_0, U_1, .., U_{n_1}, U_{n_1+1}, \widetilde{U}_0, \widetilde{U}_1, .., \widetilde{U}_{n_2}, \widetilde{U}_{n_2+1}\}$$

задачі (6)–(11) назвемо спектром цієї задачі.

Згідно [11] U_k та $\widetilde{U}_k$ будемо шукати у вигляді

$$U_k=R_{2k-2}(\lambda)U_1, \quad \widetilde{U}_k=\widetilde{R}_{2k-2}(\lambda)\widetilde{U}_1, \tag{12}$$

де $R_{2k-2}(\lambda)$ — многочлен степеня $k-1$.

Запровадимо многочлени з непарними індексами

$$R_{2k-1}(\lambda)=\frac{R_{2k}(\lambda)-R_{2k-2}(\lambda)}{l_k}, \ \widetilde{R}_{2k-1}(\lambda)=\frac{\widetilde{R}_{2k}(\lambda)-\widetilde{R}_{2k-2}(\lambda)}{\widetilde{l}_k}.$$

Згідно з [11] многочлени R_j пов'язані між собою рекурентними співвідношеннями

$$R_{2k}(\lambda)=l_kR_{2k-1}(\lambda)+R_{2k-2}(\lambda), \quad R_{2k-1}(\lambda)=R_{2k-3}(\lambda)-m_k\lambda R_{2k-2}(\lambda), \tag{13}$$

з початковими умовами

$$R_0(\lambda)=1, \quad R_{-1}(\lambda)=\frac{1}{l_0}. \tag{14}$$

Для правої частини струни виконуються аналогічні рекурентні співвідношення

$$\widetilde{R}_{2k}(\lambda) = \widetilde{l}_k \widetilde{R}_{2k-1}(\lambda) + \widetilde{R}_{2k-2}(\lambda), \quad \widetilde{R}_{2k-1}(\lambda) = \widetilde{R}_{2k-3}(\lambda) - \widetilde{m}_k \lambda \widetilde{R}_{2k-2}(\lambda), \tag{15}$$

з початковими умовами

$$\widetilde{R}_0(\lambda) = 1, \quad \widetilde{R}_{-1}(\lambda) = \frac{1}{\widetilde{l}_0}. \tag{16}$$

Отже, (11) набуває вигляду

$$\frac{R_{2n_1-2}(\lambda) - R_{2n_1}(\lambda)}{l_{n_1}} U_1 + \frac{\widetilde{R}_{2n_2-2}(\lambda) - \widetilde{R}_{2n_2}(\lambda)}{\widetilde{l}_{n_2}} \widetilde{U}_1 = 0,$$

звідки отримаємо

$$R_{2n_1-1}(\lambda) U_1 + \widetilde{R}_{2n_2-1}(\lambda) \widetilde{U}_1 = 0. \tag{17}$$

Враховуючи (12), з рівняння (10) слідує наступне

$$R_{2n_1}(\lambda) U_1 - \widetilde{R}_{2n_2}(\lambda) \widetilde{U}_1 = 0. \tag{18}$$

Рівняння (17), (18) становлять систему лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь з двома невідомими. Нетривіальний її розв'язок існує тоді і тільки тоді, коли визначник системи

$$\varphi(\lambda) \stackrel{def}{=} R_{2n_1-1}(\lambda) \widetilde{R}_{2n_2}(\lambda) + \widetilde{R}_{2n_2-1}(\lambda) R_{2n_1}(\lambda) \tag{19}$$

дорівнює нулю.

Права частина (19) — характеристичний многочлен задачі (6)–(11), тобто корені цього многочлена становлять її спектр.

Оскільки $\varphi(\lambda)$ многочлен степені $n_1 + n_2$, то приходимо до висновку, що кількість коренів многочлена дорівнює $n_1 + n_2$. Його можна подати наступним чином

$$\varphi(\lambda) = c \prod_{j=1}^{n_1+n_2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right). \tag{20}$$

Корені $\{\lambda_k\}_{k=1}^{(n_1+n_2)}$ є додатними та однократними [11], [17].

Якщо розглянути $\varphi(\lambda)$ при $\lambda = 0$, то з (19), враховуючи (13)–(16), отримаємо

$$\varphi(0) = \frac{l}{l_0 \widetilde{l}_0}. \tag{21}$$

Врахувавши (21) і (20) маємо

$$\varphi(\lambda) = \frac{l}{l_0 \widetilde{l}_0} \prod_{j=1}^{n_1+n_2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right). \tag{22}$$

Функцію $f(z)$ називаємо *неванлінновою функцією*, якщо: 1) f аналітична у півплощинах $\mathrm{Im}z > 0$ та $\mathrm{Im}z < 0$; 2) $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ $(\mathrm{Im}z \neq 0)$; 3) $\mathrm{Im}z\ \mathrm{Im}f(z) \geq 0$ для $\mathrm{Im}z \neq 0$.

Неванліннову функцію $f(z)$ називаємо *S–функцією*, якщо $f(z) \geq 0$ для $z < 0$.

S–функцію $f(z)$ будемо називати S_0*–функцією*, якщо вона не має полюса в нулі, тобто $|f(0)| < \infty$.

Відомо [11], що корені многочленів $R_{2n}(\lambda), R_{2n-1}(\lambda)$ строго чергуються, аналогічне твердження справедливе і для $\widetilde{R}_{2n}(\lambda), \widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$. Дані пари многочленів не мають спільних нулів. Звідки за теор.II.2.1 [17, с.499], маємо, що $\dfrac{R_{2n}(\lambda)}{R_{2n-1}(\lambda)}$ та $\dfrac{\widetilde{R}_{2n}(\lambda)}{\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)}$ є неванлінівськими функціями. З (13)–(16), слідує те, що дані функції є додатними при $z < 0$. Таким чином, $\dfrac{R_{2n}(\lambda)}{R_{2n-1}(\lambda)}$ та $\dfrac{\widetilde{R}_{2n}(\lambda)}{\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)}$ є S_0 — функціями. Отже, їх можна розкласти єдиним способом у ланцюговий дріб відповідно ([17])

$$\frac{R_{2n}(\lambda)}{R_{2n-1}(\lambda)} = \widetilde{a}_{n_1} + \cfrac{1}{-\widetilde{b}_{n_1}\lambda + \cfrac{1}{\widetilde{a}_{n_1-1} + \cfrac{1}{-\widetilde{b}_{n_1-1}\lambda + ... + \cfrac{1}{-\widetilde{b}_1\lambda + \cfrac{1}{\widetilde{a}_0}}}}},$$

$$\frac{\widetilde{R}_{2n}(\lambda)}{\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)} = a_{n_2} + \cfrac{1}{-b_{n_2}\lambda + \cfrac{1}{a_{n_2-1} + \cfrac{1}{-b_{n_2-1}\lambda + ... + \cfrac{1}{-b_1\lambda + \cfrac{1}{a_0}}}}},$$

де $\{a_k\}_{k=0}^{n_2}, \{b_k\}_{k=1}^{n_2}, \{\widetilde{a}_k\}_{k=0}^{n_1}, \{\widetilde{b}_k\}_{k=1}^{n_1}$ — додатні числа ([11, с.339]) та $b_k = \widetilde{m}_k$, $a_k = \widetilde{l}_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n_2\}$; $\widetilde{b}_k = m_k, \widetilde{a}_k = l_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ ([17]).

Очевидно, що правильне і обернене твердження: величини точкових мас m_k, $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ ($\widetilde{m}_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n_2\}$) та довжини часткових відрізків l_k, $k \in \{0, 1, \dots, n_1\}$ ($\widetilde{l}_k$, $k \in \{0, 1, \dots, n_2\}$) як коефіцієнти розкладу ланцюгового дробу однозначно визначають раціональну функцію $\dfrac{R_{2n}(\lambda)}{R_{2n-1}(\lambda)}$ $\Big(\dfrac{\widetilde{R}_{2n}(\lambda)}{\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)}\Big)$.

Розглянемо випадок, коли $n_1 = n_2 \stackrel{def}{=} n$.

Нехай нам відомі всі власні значення $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$ задачі (6)–(11). Це означає, що відомі всі корені λ_k, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ многочлена $\varphi(\lambda)$. Корені визначають цей многочлен з точністю до довільного ненульового сталого множника.

Якщо всі маси і довжини інтервалів в лівій частині струни нам відомі, ми можемо за допомогою (13), (14) знайти многочлени $R_{2n}(\lambda)$ та $R_{2n-1}(\lambda)$, котрі входять в (19). Тоді відомі і корені цих многочленів.

Нехай $\{\nu_k\}_{k=1}^{n}$ — корені многочлена $R_{2n}(\lambda)$. Тоді з (19) при $n_1 = n_2 = n$ отримуємо

$$\widetilde{R}_{2n}(\nu_k) = \frac{\varphi(\nu_k)}{R_{2n-1}(\nu_k)},\ k \in \{1, 2, \dots, n\}, \tag{23}$$

де $R_{2n-1}(\nu_k) \neq 0$, оскільки згідно з [11] неможливе одночасне виконання рівнянь $R_{2n-1}(\lambda) = 0$ та $R_{2n}(\lambda) = 0$.

Використовуючи (15), (16) при $\lambda = \nu_0 \overset{def}{=} 0$, отримаємо

$$\widetilde{R}_{2n}(0) = \frac{L_2}{\widetilde{l}_0}, \tag{24}$$

де L_2 — довжина частини струни від точки A до правого кінця. Це і буде значенням многочлена $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$ в точці ν_0, якщо ν_0 розглядати як вузол інтерполяції.

Отже, можемо побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$ степені n за вузлами інтерполяції ν_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ та $\nu_0 = 0$ та значеннями в вузлах інтерполяції $\varphi(\nu_k)/R_{2n-1}(\nu_k)$ та $L_2/\widetilde{l}_0$ відповідно.

Цей інтерполяційний многочлен матиме вигляд

$$\widetilde{R}_{2n}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda\varphi(\nu_k)}{\nu_k R_{2n-1}(\nu_k)} \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\lambda - \nu_j}{\nu_k - \nu_j} + \frac{(-1)^n L_2}{\widetilde{l}_0} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda - \nu_k}{\nu_k}. \tag{25}$$

Аналогічно, нехай $\{\mu_k\}_{k=1}^{n}$ — корені многочлена $R_{2n-1}(\lambda)$, тоді (див. (19))

$$\widetilde{R}_{2n-1}(\mu_k) = \frac{\varphi(\mu_k)}{R_{2n}(\mu_k)}, \quad k = \overline{1, n} \tag{26}$$

де $R_{2n}(\mu_k)$ визначаємо з рекурентних співвідношень (13), (14).

Якщо розглянути задачу інтерполяції $\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$, то в якості ще одного вузла інтерполяції візьмемо $\mu_0 \overset{def}{=} 0$. Значення функції $\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$ в μ_0 отримаємо, підставивши $\lambda = \mu_0 \overset{def}{=} 0$ в (15) та (16)

$$\widetilde{R}_{2n-1}(0) = \frac{1}{\widetilde{l}_0}. \tag{27}$$

Якщо для знаходження $\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$ взяти за вузли інтерполяції μ_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ та μ_0, а в якості значень многочлена $\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$ в вузлах інтерполяції $\varphi(\mu_k)/R_{2n-1}(\mu_k)$ та $1/\widetilde{l}_0$ відповідно, то тоді інтерполяційний многочлен Лагранжа матиме вигляд

$$\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda\varphi(\mu_k)}{\mu_k R_{2n}(\mu_k)} \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\lambda - \mu_j}{\mu_k - \mu_j} + \frac{(-1)^n}{\widetilde{l}_0} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda - \mu_k}{\mu_k}. \tag{28}$$

Розглянемо відношення виразів (25) та (28), враховуючи (22).

$$\frac{\widetilde{R}_{2n}(\lambda)}{\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda\varphi(\nu_k)}{\nu_k R_{2n-1}(\nu_k)} \prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\lambda-\nu_j}{\nu_k-\nu_j} + \frac{(-1)^n}{\widetilde{l}_0} L_2 \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda-\nu_k}{\nu_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda\varphi(\mu_k)}{\mu_k R_{2n}(\mu_k)} \prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\lambda-\mu_j}{\mu_k-\mu_j} + \frac{(-1)^n}{\widetilde{l}_0} \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda-\mu_k}{\mu_k}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda}{\nu_k R_{2n-1}(\nu_k)} \prod\limits_{i=1}^{2n} \left(1 - \frac{\nu_k}{\lambda_j}\right) \prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\lambda-\nu_j}{\nu_k-\nu_j} + (-1)^n L_2 \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda-\nu_k}{\nu_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda}{\mu_k R_{2n-1}(\mu_k)} \prod\limits_{i=1}^{2n} \left(1 - \frac{\mu_k}{\lambda_j}\right) \prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\lambda-\mu_j}{\mu_k-\mu_j} + (-1)^n \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda-\mu_k}{\mu_k}}.$$

Отже, невизначені множники, які залежать від $\widetilde{l}_0$, скоротилися.

Як бачимо, весь спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$, загальна довжина струни l, величини точкових мас $\{m_k\}_{k=1}^n$ та часткових відрізків $\{l_k\}_{k=0}^n$ на лівій частині струни однозначно визначають функцію $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)/\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$.

3. Обернена задача. Ідея розв'язання оберненої задачі полягає в тому, що ми будемо розглядати задачу інтерполяції для знаходження $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$ та $\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$ відповідно, де в якості вузлів інтерполяції обираємо $\{\nu_k\}_{k=0}^n$ та $\{\mu_k\}_{k=0}^n$ відповідно, а значення функцій $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$ та $\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$ в них отримуємо за формулами $(23), (24)$ та $(26), (27)$.

Розглянемо наступну задачу зліва від точки A нам відомі всі зосереджені маси $\{m_k\}_{k=1}^n$ та довжини інтервалів $\{l_k\}_{k=0}^n$. Відома також загальна довжина струни l та спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$ задачі (6)–(11). Треба знайти всі маси $\{\widetilde{m}_k\}_{k=1}^n$ та довжини інтервалів $\{\widetilde{l}_k\}_{k=0}^n$ на правій частині струни.

Дана задача є дискретним аналогом задачі Гохштадта–Лібермана [5].

Лема. *Нехай задано набір параметрів $(\{m_k\}_{k=1}^n, \{l_k\}_{k=0}^n, l)$ задачі (6)–(11) і многочлени R_{2n} та R_{2n-1} побудовані по цьому набору згідно з рекурентними співвідношеннями (13), (14). Тоді для довільного набору $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$ попарно різних додатних чисел існує єдина пара многочленів P_{2n} та P_{2n-1} степеня n таких, що $P_{2n-1}(0) = 1$ та*

$$R_{2n}(\lambda)P_{2n-1}(\lambda) + R_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) = \frac{l}{l_0}\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)$$

Доведення. Доведення існування повторює дослівно міркування, викладені в кінці розділу 2. Тому досить довести лише єдиність. Якщо припустити, що єдиності немає, то для деяких ненульових многочленів G_{2n}, G_{2n-1} степеня не вище n

$$R_{2n}G_{2n-1} + R_{2n-1}G_{2n} = 0 \tag{29}$$

та $G_{2n-1}(0) = 0$. Оскільки многочлени R_{2n}, R_{2n-1} не мають спільних нулів, то з (29) випливає, що $G_{2n-1} = CR_{2n-1}$, де C ненульова константа. Отже, $R_{2n-1}(0) = 0$. Але це суперечить тому, що $R_{2n-1}(0) = 1/l_0$. □

Теорема. *Нехай задача (6)–(11) має фіксований набір параметрів $(\{m_k\}_{k=1}^n, \{l_k\}_{k=0}^n, l)$, многочлени R_{2n}, R_{2n-1} побудовані по цьому набору згідно з рекурентними співвідношеннями (13), (14) і P_{2n}, P_{2n-1} — многочлени з леми. Для того, щоб набір $\{\lambda\}_j^{2n}$ попарно різних додатних чисел був спектром деякої задачі (6)–(11) (з зазначеною вище половиною параметрів) необхідно і досить, щоб функція*

$$P = \frac{P_{2n}}{P_{2n-1}}$$

була S_0–функцією. Якщо функція P є S_0–функцію, то невідомі параметри $(\{\widetilde{m}_k\}_{k=1}^n, \{\widetilde{l}_k\}_{k=0}^n)$ однозначно знаходяться як коефіцієнти розкладу в ланцюговий дріб

$$\frac{P_{2n}(\lambda)}{P_{2n-1}(\lambda)} = a_n + \cfrac{1}{-b_n\lambda + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{-b_{n-1}\lambda + ... + \cfrac{1}{-b_1 z + \cfrac{1}{a_0}}}}}, \tag{30}$$

де $a_n \geq 0$; $\{a_k\}_{k=0}^n$, $\{b_k\}_{k=1}^n$, *— додатні числа і*

$$b_k = \widetilde{m}_k,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\};\quad a_k = \widetilde{l}_k,\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{31}$$

Доведення. Як будь–яка S_0–функція, що має n полюсів та n або $n-1$ коренів, функція $P_{2n}(\lambda)/P_{2n-1}(\lambda)$ може бути розкладена у ланцюговий дріб вигляду (30).

Ми ототожнюємо b_k з масами $\widetilde{m}_k$ на правій частині струни, котрі розташовані у порядку зростання індексів від правого кінця струни до точки A, a_k — з частковим відрізками довжини $\widetilde{l}_k$, на які розбивають n зосереджені маси $\widetilde{m}_k$ праву частину струни.

Доведемо, що отримана струна має своїм спектром $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$.

Розв'язуючи пряму задачу за $(\{m_k\}_{k=1}^n, \{l_k\}_{k=0}^n)$ та знайденими наборами $(\{\widetilde{m}_k\}_{k=1}^n, \{\widetilde{l}_k\}_{k=0}^n)$ ми можемо побудувати многочлени $G_{2n}(\lambda),\ G_{2n-1}(\lambda)$ за формулами (15), (16) відповідно.

Якщо розглянути відношення цих многочленів, то буде виконуватись наступна рівність

$$\frac{G_{2n}(\lambda)}{G_{2n-1}(\lambda)} = \widetilde{l}_n + \cfrac{1}{-\widetilde{m}_n\lambda + \cfrac{1}{\widetilde{l}_{n-1} + \cfrac{1}{-\widetilde{m}_{n-1}\lambda + \ldots + \cfrac{1}{-\widetilde{m}_1\lambda + \cfrac{1}{\widetilde{l}_0}}}}}. \tag{32}$$

Порівнюючи (32) з (30) та (31), отримаємо

$$\frac{P_{2n}(\lambda)}{P_{2n-1}(\lambda)} = \frac{G_{2n}(\lambda)}{G_{2n-1}(\lambda)},$$

де $P_{2n}(\lambda),\ \ P_{2n-1}(\lambda)$ — інтерполяційні многочлени Лагранжа (28) і (25) відповідно, побудовані при розв'язанні оберненої задачі.

Многочлени $G_{2n}(\lambda)$, $G_{2n-1}(\lambda)$ можуть відрізнятися від $P_{2n}(\lambda)$, $P_{2n-1}(\lambda)$ лише сталим ненульовим множником, тобто

$$G_{2n}(\lambda) = CP_{2n}(\lambda),\quad G_{2n-1}(\lambda) = CP_{2n-1}(\lambda). \tag{33}$$

Розглянемо характеристичний многочлен $\varphi(\lambda)$, який виникає при розв'язанні прямої задачі.

Враховуючи (33), приходимо до висновку, що характеристичний многочлен прямої задачі, породженої наборами $(\{m_k\}_{k=1}^n, \{l_k\}_{k=0}^n),\ \ (\{\widetilde{m}_k\}_{k=1}^n, \{\widetilde{l}_k\}_{k=0}^n)$, має вигляд

$$\varphi(\lambda) = R_{2n}(z)G_{2n-1}(\lambda) + R_{2n-1}(\lambda)G_{2n}(\lambda) = C\left(R_{2n}(\lambda)P_{2n-1}(\lambda) + R_{2n-1}P_{2n}(\lambda)\right).$$

Доведемо, що коренями даного многочлена є множина $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$.

Розглянемо частку

$$\varphi(\lambda)\Big/\prod_{j=1}^{2n}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) = C\big(R_{2n}(\lambda)P_{2n-1}(\lambda) + R_{2n-1}P_{2n}(\lambda)\big)\Big/\prod_{j=1}^{2n}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)$$

та знайдемо її значення в точках $\nu_k,\ \ \mu_k$, де $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, відповідно

$$\varphi(\lambda)\Big/\prod_{j=1}^{2n}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\Big|_{\lambda=\nu_k} = C\big(R_{2n}(\nu_k)P_{2n-1}(\nu_k)+R_{2n-1}(\nu_k)P_{2n}(\nu_k)\big)\Big/\prod_{j=1}^{2n}\left(1-\frac{\nu_k}{\lambda_j}\right) =$$

$$= C\big(R_{2n-1}(\nu_k)\frac{\varphi(\nu_k)}{R_{2n-1}(\nu_k)}\big)\Big/\prod_{j=1}^{2n}\left(1-\frac{\nu_k}{\lambda_j}\right) = C\frac{l}{l_0\widetilde{l}_0},$$

$$\varphi(\lambda)\Big/\prod_{j=1}^{2n}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\Big|_{\lambda=\mu_k} = C\big(R_{2n}(\mu_k)P_{2n-1}(\mu_k)+R_{2n-1}(\mu_k)P_{2n}(\mu_k)\big)\Big/\prod_{j=1}^{2n}\left(1-\frac{\mu_k}{\lambda_j}\right) =$$

$$= C\big(R_{2n-1}(\mu_k)\frac{\varphi(\mu_k)}{R_{2n-1}(\mu_k)}\big)\Big/\prod_{j=1}^{2n}\left(1-\frac{\mu_k}{\lambda_j}\right) = C\frac{l}{l_0\widetilde{l}_0}.$$

Розглянемо значення многочлена $\varphi(z)$ в нулі. Згідно з лемою

$$\varphi(0) = C(R_{2n}(0)P_{2n-1}(0)+R_{2n-1}(0)P_{2n}(0)) = C\left(\frac{1}{l_0}\frac{L_1}{\widetilde{l}_0}+\frac{1}{\widetilde{l}_0}\frac{L_2}{l_0}\right) = C\frac{l}{l_0\widetilde{l}_0},$$

де $L_1,\ L_2$ — загальна довжина лівої та правої частини струни до точки зшивання A відповідно.

Тоді $\varphi(\lambda)\Big/\prod_{j=1}^{2n}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\Big|_{\lambda=0} = C\frac{l}{l_0\widetilde{l}_0}$. Отже, многочлен $\varphi(\lambda)$ має степінь $2n$, а множина його коренів збігається з λ_j. Тому, пара наборів $(\{\widetilde{m}_k\}_{k=1}^n, \{\widetilde{l}_k\}_{k=0}^n)$ є шуканою.

Єдиність розв'язку оберненої задачі випливає з леми. Теорему доведено. □

Зауваження 1. Точку A на відрізку довжини $l_n+\widetilde{l}_n$ можемо вибрати довільним чином. Якщо вона обрана так, що накладається на $\widetilde{m}_n$, то $\widetilde{l}_n = 0$. В цьому випадку кількість коренів $\widetilde{R}_{2n}(\lambda)$ на одиницю менше від кількості коренів $\widetilde{R}_{2n-1}(\lambda)$.

Зауваження 2. В даній теоремі припускалася однакова кількість зосереджених мас зліва і справа, тобто $n_1 = n_2$. Така їх кількість є достатньою для єдиності розв‘язку даної задачі. Якщо $n_1 > n_2$, то задача містить надлишкові дані для розв'язання; якщо $n_2 > n_1$, то розв‘язок задачі не є єдиним.

Автор висловлює подяку В. М. Пивоварчику за постановку задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Borg G. *Eine Umkehrung der Sturm–Liouvillschen Eigenwertaufgabe*// Acta Math. – 1946. – V.78, №1. – P. 1–96.
2. Левитан Б.М. Обратная задача Штурма–Лиувилля. – М.: Наука, 1984. – 240 с.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – К.: Наукова думка, 1977. – 330 с.
4. Кац И.С., Крейн М.Г. О спектральной функции струны. – Дополнение 2 в кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Москва: Мир, 1968. – 749 с.

5. Hochstadt H., Lieberman B. *An inverse Sturm–Lioville problem with mixed given data*// SIAM J. Appl. Math. – 1978. – V.34. – P. 676–680.
6. Gesztesy F., Simon B. *On the determination of a potential from three spectra*// In Advances in Mathematical Sciences, V.Buslaev and M.Solomyak, eds., Amer. Math. Soc. Transl. (2). – 1999. – V.189. – P. 85–92.
7. Sakhnovich L. *Half–inverse problem on the finite interval*// Inverse Problems. – 2001. – V.17. – P. 527–532.
8. Martinyuk O., Pivovarchik V. *On the Hochstadt–Lieberman theorem*// Inverse Problems. – 2010. – V.26. – 035011, 6 pp.
9. Pivovarchik V.N., *An inverse problem by three spectra*// Integral Equations and Operator Theory – 1999. – V.34, №2. – P. 234–243.
10. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. *Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials. Part III: Reconstruction by three spectra*// J.Math. Anal. Appl. – 2003. – V.284, №2. – P. 626–646.
11. Гантмахер Ф.Р, Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1950. – 360 с.
12. Аров Д.З. *Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффиуиенту динамической податливости*// Сиб. мат. ж. – 1975. – Т.16, №3. – С. 440–465.
13. Veselic K. *On linear vibrational systems one dimensional damping*// Applicable Analysis – 1988. – V.29. – P. 1–18.
14. Boyko O., Pivovarchik V. *The inverse three–spectral problem for a Stieltjes string and the inverse problem with one–dimensional damping* // Inverse Problems. – 2008. – V.24, №1. – 13 pp.
15. Boyko O., Pivovarchik V. *Inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings*// Methods of Functional Analisys and Topology. – 2008. – V.14, №2. – P. 159–167.
16. Boyko O., Pivovarchik V. *Inverse problem for Stieltjes string damped at one end*// Methods of Functional Analisys and Topology. – 2008. – V.14, №1. – P. 10–19.
17. Аткинсон Ф. Функции отрицательного мнимого типа. Приложение II в кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. – Москва: Мир, 1968. – 749 с.

Південноукраїнський державний педагогічний
університет ім. К. Д. Ушинського
Кафедра прикладної математики та інформатики,
martynyuk_olga@mail.ru

Надійшло 02.09.09

Після переробки 06.05.10