УДК 512.552.12

О. В. Домша, Б. В. Забавський

КІЛЬЦЯ КАЗІМІРСЬКОГО

O. V. Domsha, B. V. Zabavsky. *Kazimirsky's rings*, Mat. Stud. **34** (2010), 75–79.

In this paper the notion of the Kazimirsky ring as generalization of 2-simple Ore domain with stable range 1 is introduced. Matrices which are not zero divisors are considered. Block-diagonal reduction of these matrices over Kazimirsky domain that is Ore domain is shown.

О. В. Домша, Б. В. Забавский. *Кольца Казимирского* // Мат. Студії. – 2010. – Т.34, №1. – С.75–79.

В работе вводится определение кольца Казимирского как обобщение 2-простой области Орэ стабильного ранга 1. Рассматриваются матрицы, которые не являются делителями нуля. Показана блочно-диагональная редукция таких матриц над областью Казимирского, которая является областью Орэ.

В останні роки спостерігається тенденція проникнення методів і понять алгебраїчної K-теорії в теорію кілець. Наріжним каменем в таких дослідженнях є такий важливий інваріант K-теорії як поняття стабільного рангу кільця, яке було введено Х. Басом [1]. Особливе місце займають кільця стабільного рангу 1. В роботі [2] показано, що проста область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є 2-простою. В даній роботі вводиться поняття кільця Казімірського, яке узагальнює 2-прості області Оре стабільного рангу 1, а також показана блочно-діагональна редукція матриць, які не є дільником нуля, над кільцями Казімірського, які є областями Оре.

Під кільцем R будемо розуміти асоціативне кільце з 1 $(1 \neq 0)$, через $U(R)$ позначимо групу одиниць кільця R.

Нехай R — просте кільце. Тоді для довільного ненульового елемента $a \in R$ отримаємо $RaR = R$, тобто існують елементи $u_1, u_2, ..., u_n; v_1, v_2, ..., v_n \in R$ такі, що $u_1av_1 + u_2av_2 + ... + u_nav_n = 1$. Якщо для всіх ненульових елементів $a \in R$ існує натуральне число n таке, що $u_1av_1 + u_2av_2 + ... + u_nav_n = 1$, причому число n є найменше зі всіх можливих, тоді кільце R називається n-простим. Зокрема, кільце R є 2-простим тоді і тільки тоді, коли для довільного ненульового елемента $a \in R$ існують елементи $u_1, u_2; v_1, v_2 \in R$ такі, що $u_1av_1 + u_2av_2 = 1$ [3].

Означення 1. Кільце R назвемо *кільцем Казімірського*, якщо для довільних ненульових елементів $a, b \in R$ існують елементи $s, t \in R$ і елемент $u \in U(R)$ такі, що $as+ubt = 1$.

Вивчення такого сорту кілець започаткував П. С. Казімірський [4]. Прикладом кільця Казімірського є кільце від n-диференціювань [3]. Очевидно, що кільце Казімірського є 2-простим (достатньо в означенні кільця Казімірського покласти $a = b$.)

2000 *Mathematics Subject Classification:* 31B05.

Означення 2. Кільце R називається *кільцем стабільного рангу 1*, якщо з того, що $aR + bR = R$ для довільних елементів $a, b \in R$ випливає існування елемента $t \in R$ і елемента $u \in U(R)$ таких, що $a + bt = u$ [1].

Теорема 1. *2-проста область стабільного рангу 1 є кільцем Казімірського.*

Доведення. Нехай R — 2-проста область стабільного рангу 1. Тоді згідно з означенням 2-простої області для довільних ненульових елементів $a, b \in R$ існують елементи $x_1, x_2; y_1, y_2 \in R$ такі, що $x_1aby_1 + x_2aby_2 = 1$. Поклавши $x_1 = u_1$, $by_1 = v_1$, $x_2a = u_2$, $y_2 = v_2$, отримаємо $u_1av_1 + u_2bv_2 = 1$. Звідси $u_1aR + u_2bR = R$.

Оскільки R — область стабільного рангу 1, то існує елемент $x \in R$, для якого $u_1a + u_2bx \in U(R)$. Звідси $Ra + Rbx = R$.

З того, що R — область стабільного рангу 1 отримаємо:

$$a + ybx = u \in U(R) \tag{1}$$

для деякого елемента $y \in R$. Звідси $aR + yR = R$.

Знову ж таки, оскільки R — кільце стабільного рангу 1, то $as + y = w \in U(R)$ для деякого елемента $s \in R$, а тому

$$y = w - as. \tag{2}$$

Тоді рівність (1) з врахуванням (2) набуде вигляду $a + wbx - asbx = a(1 - sbx) + wbx = u$. Тобто $a(1 - sbx)u^{-1} + wbxu^{-1} = 1$. Отже, R є кільцем Казімірського. □

Як наслідок теореми 1, враховуючи [2], отримано наступний результат.

Теорема 2. *Проста область Безу стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є областю Казімірського.*

Розгянемо випадок теореми 2, коли умова області Безу замінена умовою області Оре.

Означення 3. Область R, в якій для довільних ненульових елементів $a, b \in R$ $aR \cap bR \neq \{0\}$ і $Ra \bigcap Rb \neq \{0\}$ називається *областю Оре*[5].

Спочатку зробимо таке очевидне зауваження у формі твердження.

Твердження 1. *Нехай R — область. Тоді для довільних елементів $a, b \in R$ стовпчик $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ можна доповнити до зворотної матриці.*

Доведення. Шуканою матрицею буде матриця

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

Дійсно,

$$U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \end{pmatrix} = E.$$

□

Означення 4. Матриці A і B назвемо *еквівалентними над областю* R, якщо існують зворотні матриці P і Q над R відповідних розмірів такі, що $B = PAQ$.

Твердження 2. *Нехай R — область Оре, яка є областю Казімірського. Тоді для кожної матриці A другого порядку, яка не є дільником нуля, існує стовпчик $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ і рядок $\begin{pmatrix} 1 & u \end{pmatrix}$ такі, що*

$$\begin{pmatrix} 1 & u \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = 1,$$

де $e, f \in R$, $u \in U(R)$.

Доведення. Оскільки R — область Оре і матриця A не є дільником нуля, то існує така матриця $D \in M_2(R)$ така, що

$$AD = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \ d_1 \neq 0, d_2 \neq 0.$$

В області R для довільних елементів d_1, d_2 існують елементи c, d і $u \in U(R)$, для яких виконується рівність $d_1 c + u d_2 d = 1$. Звідси,

$$\begin{pmatrix} 1 & u \end{pmatrix} AD \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 1.$$

Покладемо

$$D \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

що доводить наше твердження. □

Теорема 3. *Нехай R — область Оре, яка є областю Казімірського. Тоді для довільної матриці $A \in M_n(R)$, яка не є дільником нуля, існують такі зворотні матриці $P, Q \in M_n(R)$, що виконується рівність*

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Доведення. Доведення проводимо методом математичної індукції. При $n = 2$ доведення очевидне. Нехай $n = 3$, тобто матриця A не є дільником нуля і має вигляд

$$A = (a_{ij})_1^3.$$

Без обмеження загальності з точністю до еквівалентності матриць [5] можна вважати, що підматриця $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матриці A також не є дільником нуля. Враховуючи твердження 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & u & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} e - e(a_{13} + u a_{23}) \\ f - f(a_{13} + u a_{23}) \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Очевидно, що рядок $\begin{pmatrix} 1 & u & 0 \end{pmatrix}$ можна доповнити до зворотньої матриці P. Відповідно до твердження 1 стовпчик $\begin{pmatrix} e - e(a_{13} + ua_{23}) \\ f - f(a_{13} + ua_{23} \\ 1 \end{pmatrix}$ також можна доповнити до зворотньої матриці Q. Тоді

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матриця PAQ елементарними перетвореннями рядків і стовпчиків зводиться до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Тобто при $n = 3$ теорема доведена. Розглянемо випадок $n > 3$. Припустимо, що при $n - 1 \geq 3$ теорема вірна. Без обмеження загальності з точністю до еквівалентності матриць [5] можна вважати, що підматриця третього порядку, яка міститься в верхньому лівому куті матриці A, не є дільником нуля. На підставі доведеного вище, отримаємо існування таких зворотніх матриць P_1, Q_1 над R, що

$$P_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$P_2 = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$P_2AQ_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a'_{14} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & \dots & a'_{3n} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & \dots & a'_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & a'_{n3} & a'_{n4} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Звідси, шляхом елементарних перетворень матриця зводиться до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матриця A_1 не є дільником нуля. Тоді, за припущенням індукції, для матриці A_1 існують такі зворотні матриці P_3 і Q_3, що

$$P_3A_1Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Поклавши

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}, Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{pmatrix},$$

отримаємо, що матриця

$$P_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Тобто ми довели, що для матриці A існують такі зворотні матриці P і Q , що

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

□

ЛІТЕРАТУРА

1. Bass X. *K-theory and stable algebra*// J. Hauntes Etudes Scien. Publ. Math. – 1964. – V.22. – P. 485–544.
2. Забавський Б.В. *Простые кольца элементарных делителей*// Мат. Студ. – 2004. – Т.22, №2. – С. 129–133.
3. Olszewski J. *On ideals of product of rings*// Demons. Math., Poland. – 1994. – V.27, №1. – P. 1–7.
4. Казімірський П. С. *Нормальна форма матриці над кільцем L*// Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1970. – Т.44. – С. 3–13.
5. Кон П. Свободные кольца и их связи. – М.: Мир., 1974.

Львівський національний університет ім. І. Франка,
механіко-математичний факультет

Надійшло 01.06.2010

Після переробки 09.11.10