УДК 517.956

Г. П. Лопушанська

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІВЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВАГОВИХ C-ПРОСТОРАХ

H. P. Lopushanska. *The boundary value problem semi-linear elliptic equation in weighted C–spaces* , Mat. Stud. **34** (2010), 65–74.

The sufficient conditions at which the solution of $2m$ order semi-linear elliptic differential equation in region takes the given values from $[C^\infty(S)]'$ on the boundary S are obtained. The connection between the singularities' orders of the generalized functions given on the boundary of the region and the character of the growth of the solution near the boundary under some structure of nonlinear part in equation is founded.

Г. П. Лопушанская. *Краевые задачи для полулинейных эллиптических дифференциальных уравнений в весовых C-пространствах* // Мат. Студії. – 2010. – Т.34, №1. – С.65–74.

The sufficient conditions at which the solution of $2m$ order semi-linear elliptic differential equation in region takes the given values from $[C^\infty(S)]'$ on the boundary S are obtained. The connection between the singularities' orders of the generalized functions given on the boundary of the region and the character of the growth of the solution near the boundary under some structure of nonlinear part in equation is founded.

У ряді праць (напр., [1], [2], [3]) досліджується природа крайових значень розв'язків рівняння $\Delta u = |u|^{q-1}u$. Встановлена однозначна розв'язність при $q \in (1, q_c)$, $q_c = \frac{n+2}{n-2}$, задачі

$$\Delta u = |u|^{q-1}u, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g, \tag{1}$$

де g — міра на $\partial\Omega$, і показано, що при $q > q_c$ не при кожній мірі g існує розв'язок.

Дана стаття є продовженням досліджень [4], [5]. В [5] отримано достатні умови, при яких розв'язок півлінійного еліптичного рівняння порядку $2m$ з певного вагового L_1–простору набуває на межі S заданих значень із $[C^\infty(S)]'$. При дослідженні рівнянь вигляду $\Delta u = u^q$ $(q > 1)$ встановлено (див. напр. [6]–[8]), що серед додатних розв'язків його є лише такі, які біля S мають певну поведінку. Дослідження загальної еліптичної крайової задачі для півлінійного рівняння у вагових C–просторах (підпросторах цього вагового L_1–простору) дає можливість виявити зв'язок між порядками сингулярностей заданих на межі області узагальнених функцій та характером поведінки розв'язку задачі біля межі при певній структурі нелінійних доданків, як це зроблено у [4] для випадку нелінійного доданку вигляду $|f(x, u)| \le \mu(x)|u|^q$.

1. Основні позначення та формулювання задачі. Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, з межею S класу C^∞. Використовуватимемо позначення: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha', \alpha_n)$ — мультиіндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = D^\alpha_x = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, якщо $x \in \Omega$, $D^\alpha =$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 28A12, 28C15.

$D_x^{\alpha'} = \dfrac{\partial^{|\alpha'|}}{(\partial\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(\partial\xi_{n-1})^{\alpha_{n-1}}}$ у випрямляючих локальних координатах $(\xi_1,\dots,\xi_{n-1},0)$ точки $x\in S$ (див. [9]).

Нехай $A(x,D)=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_\alpha(x)D^\alpha$ — лінійний еліптичний диференціальний вираз порядку $2m<n$, $m\in\mathbb{N}$ з нескінченно диференційовними в $\overline{\Omega}$ коефіцієнтами a_α, $B_j(x,D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m_j}b_{j\alpha}(x)D^\alpha$, $0\leqslant m_j\leqslant 2m-1$, $b_{j\alpha}\in C^\infty(S)$, $j=\overline{1,m}$, $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ — нормальна система крайових диференціальних виразів з нескінченно диференційовними на S коефіцієнтами $b_{j\alpha}$, яка задовольняє умову Лопатинського щодо $A(x,D)$ (див. [9], с.137).

Нехай A^* — формально спряжений до A диференціальний вираз, $\{T_j(x,D)\}_{j=1}^m$ — система крайових диференціальних виразів відповідно порядків μ_j ($\mu_j\leqslant 2m-1$) з коефіцієнтами з $C^\infty(S)$, яка доповнює систему $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ до системи Діріхле порядку $2m$. Тоді існує (див. [9], с.139) $2m$ крайових диференціальних виразів $\hat{B}_j$ і $\hat{T}_j$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$ з нескінченно диференційовними на S коефіцієнтами, які однозначно визначаються виразами B_j і T_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$ і мають такі властивості: порядок виразу $\hat{B}_j$ дорівнює $2m-1-\mu_j$, а порядок $\hat{T}_j$ дорівнює $2m-1-m_j$; система $\{\hat{B}_j,\hat{T}_j\}_{j=1}^m$ утворює на S систему Діріхле порядку $2m$; правильна формула Гріна

$$\int_\Omega (Au\cdot v-u\cdot A^*v)\,dx=\sum\nolimits_{j=1}^m\int_S\Big(T_ju\cdot\hat{B}_jv-B_ju\cdot\hat{T}_jv\Big)\,dS,\quad u,v\in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Через S_ε позначимо паралельну до S поверхню, розміщену в Ω на відстані $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ від S; $x_\varepsilon=x+\varepsilon\nu(x)\in S_\varepsilon$ при $x\in S$, де $\nu(x)$ — одиничний вектор внутрішньої нормалі до S у точці x, $\varepsilon_0>0$ таке, що при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ поверхня S_ε також є класу C^∞. Через Ω_ε позначимо підобласть Ω, обмежену поверхнею S_ε. Будь–якій функції $\varphi\in C^\infty(S)$ поставимо у відповідність функцію $\varphi_\varepsilon\in D(S_\varepsilon)$ за правилом: $\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon)=\varphi(x)$ при $x_\varepsilon=x+\varepsilon\nu(x)\in S_\varepsilon$, де $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Далі через $\rho(x)$ позначатимемо нескінченно диференційовну в $\overline{\Omega}$ функцію, додатну в Ω, що дорівнює нулю в точках поверхні S, а біля S має порядок відстані $d\,(x)$ від точки $x\in\Omega$ до поверхні S і значення якої не перевищують 1.

Використовуватимемо функційні простори: $D(\overline{\Omega})\equiv C^\infty(\overline{\Omega})$, $D(S)\equiv C^\infty(S)$,
$D'(S)$ — простір лінійних неперервних функціоналів на $D(S)$,
$\langle\varphi,F\rangle$ — значення узагальненої функції $F\in D'(S)$ на основній функції $\varphi\in D(S)$ [10],
$W_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ — простір функцій, інтегровних в довільній підобласті Ω' області Ω;
для довільного натурального числа r

$$W_{1,\mathrm{loc}}^r(\Omega)=\{u\in W_{1,\mathrm{loc}}(\Omega):D^\alpha u\in W_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)\ \text{для довільного мультиіндекса}\ \alpha,|\alpha|\leqslant r\}.$$

Для дійсних k та натуральних r введемо функціональні простори як у [11],[12]:

$$X_k(\overline{\Omega})=\Big\{\varphi\in D(\overline{\Omega}):\hat{B}_j\varphi\big|_S=0, j=\overline{1,m};\ A^*\varphi(x)=O\Big(d^k\Big(x\Big)\Big)\ \text{при}\ d\Big(x\Big)\to 0\Big\};$$

$$m_{k,r}(\Omega)=\Big\{u\in W_{1,\mathrm{loc}}^r(\Omega):\|u\|_{k,r}=\int\limits_\Omega\sum_{|\gamma|\leqslant r}\rho^{k+|\gamma|}(x)\Big|D^\gamma u(x)\Big|dx<+\infty\Big\};$$

$$\tilde{m}_{k,r}(\Omega)=m_{k,r}(\Omega)\cap C^r(\Omega);\qquad m_{k,r,C}(\Omega)=\Big\{u\in m_{k,r}(\Omega):\|u\|_{k,r}\leqslant C\Big\}.$$

Оскільки $\|\cdot\|_{k,r}$ — норма, то $m_{k,r,C}(\Omega)$ — куля в $m_{k,r}(\Omega)$.

Позначимо через $\partial_r u=(u,u_{x_1},\dots,D^\alpha u,\dots)$ вектор довжини $M=M(r)$, компонентами якого є функція u та її похідні до порядку $r\leqslant 2m-1$ включно.

Нехай функція $f(x,z)$ визначена і неперервна в $\Omega \times \mathbb{R}_r^M$ ($\mathbb{R}_r^M \equiv \mathbb{R}^{M(r)}$), $z = (z_{(0,\dots,0)}, z_{(1,\dots,0)}, \dots, z_\alpha, \dots) \in \mathbb{R}_r^M$, а $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \le p_j$, $j = \overline{1,m}$. Використовуватимемо позначення $p' = \max\limits_{1 \le j \le m} (p_j - m_j)$.

Розглянемо узагальнену крайову задачу

$$A(x,D)u(x) = f(x, \partial_r u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$B_j(x,D)u(x) = F_j(x), \quad x \in S, \quad j = \overline{1,m}, \tag{3}$$

у припущенні, що ядро відповідної лінійної однорідної крайової задачі $N = \{0\}$.

Далі вважатимемо (якщо не уточнено окремо), що r — ціле число, $0 \leqslant r \leqslant 2m-1$, $k \geqslant n - 2m$.

Формулювання 1 узагальненої крайової задачі [11], [12]. *Знайти функцію* $u \in m_{k,r}(\Omega) \cap C^{2m}(\Omega)$, *яка є розв'язком рівняння (2) в* Ω *і задовольняє крайові умови (3) в узагальненому сенсі*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) B_j\Big(x_\varepsilon, D\Big) u(x_\varepsilon)\, dS = <\varphi, F_j> \quad \forall \varphi \in D\Big(S\Big), \qquad j = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Формулювання 2 узагальненої крайової задачі [11],[12]. *Знайти таку функцію* $u \in m_{k,r}(\Omega)$, *що*

$$\Big| \int_\Omega \psi(x) f(x, \partial_r u(x)) dx \Big| < \infty \qquad \forall \psi \in X_k(\overline{\Omega}) \tag{5}$$

і виконується рівність

$$\int\limits_\Omega u(x) A^* \psi(x) dx = \int\limits_\Omega f(x, \partial_r u(x)) \psi(x) dx + \sum_{j=1}^m \langle \hat{T}_j \psi, F_j \rangle \qquad \forall \psi \in X_k(\overline{\Omega}). \tag{6}$$

У [12] доведено, що розв'язок u задачі (2), (3) у формулюванні 1 є розв'язком цієї ж задачі у формулюванні 2 і, навпаки, розв'язок задачі (2), (3) у формулюванні 2, який належить класу $C^{2m}(\Omega)$, є розв'язком цієї задачі у формулюванні 1. Там також встановлено, що умова $\int_\Omega |f(x, \partial_r u(x))| dx < \infty$ є необхідною й достатньою для того, шоб при $u \in m_{k,r}(\Omega) \cap C^{2m}(\Omega)$ функції $\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$ набували узагальнених крайових значень із $D'(S)$ порядків сингулярностей відповідно $\le j + k + 1$, $j = \overline{0, 2m-1}$.

Позначимо через $G(x,y) = (G_0(x,y), G_1(x,y), \dots, G_m(x,y))$ вектор–функцію Гріна відповідної до (2), (3) лінійної задачі (див. [13, 14]). Вона визначена в $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, $x \ne y$ при $j = 0$ і $\overline{\Omega} \times S$ $(x \ne y)$ при $j = \overline{1,m}$; функція $G_0(x,y)$ однозначно визначена у припущенні $N = \{0\}$; для довільних мультиіндексів α, γ правильні оцінки

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma G_j(x,y)| \leqslant C_{\alpha,\gamma,j} \Big(1 + |x-y|^{m_j + (j) - n - |\alpha| - |\gamma|}\Big), \qquad j = \overline{0,m}, \tag{7}$$

де $m_0 = 2m$, $(j) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & j = 0 \\ 1, & j = \overline{1,m} \end{array} \right.$, $C_{\alpha,\gamma,j}$ — додатні сталі.

Як у [11], можна показати, що розв'язок $u \in m_{k,r}(\Omega)$ інтегро–диференціального рівняння

$$u(x) - \int\limits_\Omega G_0(x,y) f(y, \partial_r u(y))\, dy = \sum_{j=1}^m \langle G_j(x,y), F_j(y) \rangle, \quad x \in \Omega \tag{8}$$

є розв'язком задачі (2), (3) у формулюванні 2. Тому з розв'язності рівняння (8) у просторі $m_{k,r}(\Omega)$ одержуємо розв'язність задачі (2), (3) у другому формулюванні. У [5] знайдено достатні умови розв'язності цієї задачі в просторі $m_{k,r}(\Omega)$.

2. Існування розв'язку крайової задачі у ваговому C–просторі.

Розглянемо задачу (2), (3) за таких припущень щодо функції f:

$$|f(y,z)| \leqslant \sum\nolimits_{s=0}^{r} A_s \sum\nolimits_{|\gamma|=s} |z_\gamma|^{q_s} + B, \quad y\in\Omega, \quad z_\gamma\in\mathbb{R}, \quad q_s\in(0,1), \tag{9}$$

$$\Big|f(y,z)-f(y,\xi)\Big| \leqslant \sum\nolimits_{s=0}^{r} \tilde{A}_s \sum\nolimits_{|\gamma|=s} \Big|z_\gamma-\xi_\gamma\Big|^{q_s}, \quad y\in\Omega, \quad z_\gamma,\xi_\gamma\in\mathbb{R}, \quad q_s\in(0,1), \tag{10}$$

де A_s, $\tilde{A}_s$, $s=\overline{0,r}$, B — додатні сталі, і встановимо залежність порядків сингулярностей заданих на межі області узагальнених функцій від $q_s\in(0;1)$, $s=\overline{0,r}$. З результатів [5] при

$$k_0 = n-2+\max\{p_j-m_j\colon 1\leqslant j\leqslant m\} < k < k_1 = \min\Big\{\frac{1}{q_s}-s-1\colon A_s\neq 0, 0\leqslant s\leqslant r\Big\}$$

задача (2), (3) має розв'язок $u\in m_{k,r}(\Omega)$ у формулюванні 2.

Розглянемо тепер цю задачу у підпросторах простору $m_{k,r}(\Omega)$ тих функцій, які мають задану степеневу поведінку біля S, а саме у просторах

$$C_{l,r}(\Omega) = \{v\in C^r(\Omega): \rho^{l+|\alpha|}D^\alpha v\in C(\overline{\Omega}) \quad \forall|\alpha|\leq r\},$$

$$||v||_{C_{l,r}(\Omega)} = ||v||'_{l,r} = \max_{|\alpha|\leq r}\sup_{x\in\Omega}\rho^{l+|\alpha|}(x)|D^\alpha v(x)| < +\infty, \quad l\geq 0.$$

Зауважимо, що за умови $\sup\limits_{x\in\Omega}\rho^{l+|\alpha|}(x)|D^\alpha v(x)|\leqslant \hat{C}_\alpha$, $|\alpha|\leqslant r$, $k>l-1$ матимемо $\|v\|_{k,r} = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant r}\|D^\alpha v\|_k = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant r}\int\limits_\Omega \rho^{k+|\alpha|}(x)|D^\alpha v(x)|dx \leqslant \sum\limits_{|\alpha|\leqslant r}\hat{C}_\alpha\int\limits_\Omega \rho^{k+|\alpha|-l-|\alpha|}(x)dx < +\infty$. Отже, $C_{l,r}(\Omega)\subset\tilde{m}_{k,r}(\Omega)$, якщо $k>l-1$.

Нехай $k=l-1+\varepsilon$, $l\geq 0$, $\varepsilon>0$. З умови $k>k_0=n-2+p'$ матимемо $l\geq p'+n-1$, а отже, $l\geq\max\{0,p'+n-1\}$. Зауважимо, що $p'+n-1>0$ при $p_j\geq 0$, $j=\overline{1,m}$ та $2m<n$. Також при $p_j\geq 0$ для всіх $j=\overline{1,m}$ маємо $k_0>n-2m-1$, тому $l-1+\varepsilon>n-2m-1$, звідки $l\geq n-2m\geq 1$.

Далі вважатимемо $p'\geq 1-n$, тоді $l\geq p'+n-1$ ($l\geq n-2m$ при $p_j\geq 0$ для всіх $j=\overline{1,m}$).

Для довільних $\psi\in X_{l-1+\varepsilon}(\overline{\Omega})$, $u\in C_{l,r}(\Omega)$, $|\gamma|=s$ розглянемо інтеграли $\int\limits_\Omega|\psi||D^\gamma u|^{q_s}dx = \int\limits_\Omega|\psi(x)|\varrho^{-(l+|\gamma|)q_s}(x)[\varrho^{l+|\gamma|}(x)|D^\gamma u(x)|]^{q_s}dx \leq [||u||'_l]^{q_s}\int\limits_\Omega|\psi(x)|\varrho^{-(l+s)q_s}(x)dx$. За умов $(l+s)q_s<1$ та $l\geq n-2m$ ці інтеграли є скінченими для всіх $s\leq r$. Як бачимо, за припущення

$$p' < 1-n+\min_{0\leq s\leq r}\Big\{\frac{1}{q_s}-s\Big\}, \max\Big\{n-2m, p'+n-1\Big\} = n-1+\max\{p',1-2m\} \leq l < \min_{0\leq s\leq r}\Big\{\frac{1}{q_s}-s\Big\} \tag{11}$$

для всіх $\psi\in X_{l-1+\varepsilon}(\overline{\Omega})$, $u\in C_{l,r}(\Omega)$ виконується умова (5) та визначено $\sum\limits_{j=1}^{m}\langle\hat{T}_j\psi,F_j\rangle$. Тому за припущення (11) розв'язком задачі (2)–(3) буде така функція $u\in C_{l,r}(\Omega)$, яка задовольняє умову (6) для довільної $\psi\in X_{l-1+\varepsilon}(\overline{\Omega})$.

Лема 1. *Якщо* $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \le p_j$, $p_j \ge 0$, $j = \overline{1, m}$, $l \ge p' + n - 1$, *то*

$$g = \sum_{j=1}^{m} \langle G_j(\cdot, y), F_j(y)\rangle \in C_{l,r}(\Omega).$$

Доведення. За теоремою про структуру фінітної узагальненої функції із $D'(S)$ [10] маємо

$$D^\gamma g(x) = \sum_{j=1}^{m} \langle D_x^\gamma G_j(x, y), F_j(y)\rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \le p_j} \int_S D_x^\gamma D_y^\alpha G_j(x, y) f_j(y) dS, \text{ де } f_j \in L_1(S).$$

Використовуючи оцінки (7) похідних вектор–функції Гріна і те, що $|x - y| \ge d(x)$ для всіх $x \in \Omega$, $y \in S$ знаходимо

$$||g||'_{l,r} = \max_{|\gamma| \le r} \sup_{x \in \Omega} \varrho^{l+|\gamma|}(x) |D^\gamma g(x)| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \le p_j} \tilde{C}_j [d^{l+|\gamma|+m_j+1-n-|\gamma|-|\alpha|}(x) + 1] \int_\Omega |f_j(y)| dS < +\infty$$

при $l \ge n-1-m_j+|\alpha|$ для всіх $|\alpha| \le p_j$ та $j = \overline{1, m}$, а отже, при $l \ge p'+n-1 = k_0-1$. $\square$

Використовуватимемо позначення $\tilde{G}_{l\alpha s}(x, y) = \varrho^{l+|\alpha|}(x) D_x^\alpha G_0(x, y) \varrho^{-(l+s)q_s}(y)$ при $|\alpha| \le r$, $s = \overline{0, r}$.

Лема 2. *За умови* $n-2m \le l < \min_{0 \le s \le r} \{\frac{1}{q_s} - s\}$ *для всіх* α, $|\alpha| \le r$, *всіх* $s = \overline{0, r}$ *виконується*

1) $J_{l\alpha s} = \sup_{x \in \Omega} \int_\Omega |\tilde{G}_{l\alpha s}(x, y)| dy < +\infty$;

2) *для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha, s, l) > 0$, *що для довільної області* $\omega \subset \overline{\Omega}$, *міра якої* $m(\omega) \le \delta$,

$$I_{l\alpha s} = \sup_{x \in \Omega} \int_\omega |\tilde{G}_{l\alpha s}(x, y)| dy \le \varepsilon, \quad I_{l\alpha} = \sup_{x \in \Omega} \varrho^{l+|\alpha|}(x) \int_\omega |D^\alpha G_0(x, y)| dy \le \varepsilon.$$

Доведення. Нехай $d_0 \in (0, \min\{\frac{\varepsilon_0}{2}, 1\})$, $\Omega_1(d_0) = \{x \in \Omega : d(x) < d_0\}$, $\Omega_2(d_0) = \Omega \setminus \overline{\Omega_1(d_0)}$. При кожному значенні $x \in \Omega_1(d_0)$ розділяємо особливості функції $\tilde{G}_{l\alpha s}(x, y)$, розбиваючи Ω на частини

$$\Omega_1^1 = \Omega_1^1(x) = \{y \in \Omega : d(y) < \frac{1}{2} d(x)\} (|y - x| > \frac{1}{2} d(x) \text{ при } y \in \Omega_1^1(x)),$$

$$\Omega_1^2 = \Omega_1^2(x) = \{y \in \Omega : |y - x| < \frac{1}{2} d(x)\} (d(y) > \frac{1}{2} d(x) \text{ при } y \in \Omega_1^2(x)),$$

$$\Omega_1^3 = \Omega_1^3(x) = \Omega_1(d_0) \setminus \overline{(}\Omega_1^1 \cup \Omega_1^2)(\text{ при } y \in \Omega_1^3(x) \text{ маємо } d(y) > \frac{1}{2} d(x) \text{ та } |y - x| > \frac{1}{2} d(x)).$$

Відповідно $J_{1l\alpha s} = \sup_{x \in \Omega_1(d_0)} \int_\Omega |\tilde{G}_{l\alpha s}(x, y)| dy = \sum_{j=1}^{3} \sup_{x \in \Omega_1(d_0)} \int_{\Omega_1^j(x)} |\tilde{G}_{l\alpha s}(x, y)| dy = \sum_{j=1}^{3} J_{1l\alpha s}^j$.

Враховуючи припущення $l > 0$, $(l + s) q_s \in (0, 1)$ та $l \ge n - 2m$, для всіх $|\alpha| \le r$, $s = \overline{0, r}$ матимемо

$$J_{1l\alpha s}^1 \le \tilde{a}'_1 \sup_{x \in \Omega_1(d_0)} d^{l+|\alpha|+2m-n-|\alpha|}(x) \int_0^{\frac{1}{2} d(x)} t^{-(l+s)q_s} dt =$$

$$= a_1' \sup_{x\in\Omega_1(d_0)} d^{l+2m-n-(l+s)q_s+1}(x) \le a_1' d_0^{1-(l+s)q_s},$$

$$J^2_{1l\alpha s} \le \tilde a_2' \sup_{x\in\Omega_1(d_0)} d^{l+|\alpha|-(l+s)q_s}(x) \int_{\{y\in\Omega:|y-x|<\frac12 d(x)\}} |y-x|^{2m-n-|\alpha|}dy \le a_2' d_0^{l-(l+s)q_s+2m},$$

$$J^3_{1l\alpha s} \le \tilde a_3' \sup_{x\in\Omega_1(d_0)} d^{l+|\alpha|-(l+s)q_s}(x) \int_{\Omega_1^3} |D_x^\alpha G_0(x,y)|dy \le a_3' \sup_{x\in\Omega_1(d_0)} d^{l-(l+s)q_s}(x) \le a_3' d_0^{1-(l+s)q_s},$$

звідки $J_{1l\alpha s} \le (a_1'+a_2'+a_3')d_0^{1-(l+s)q_s} = a' d_0^{1-(l_1+s)q_s} \le a'$.

При кожному значенні $x\in\Omega_2(d_0)$ розбиваємо Ω на частини Ω_2^1, Ω_2^2, Ω_2^3, як у випадку $x\in\Omega_1(d_0)$, відповідно одержуючи

$$J_{2l\alpha s} = \sum_{j=1}^3 \sup_{x\in\Omega_2(d_0)} \int_{\Omega_2^j} |\tilde G_{l\alpha s}(x,y)|dy \le \sum_{j=1}^3 \sup_{x\in\Omega_2(d_0)} \int_{\Omega_2^j} |D_x^\alpha G_0(x,y)| \varrho^{-(l+s)q_s}(y,\hat x)dy \le$$

$$\le \sup_{x\in\Omega_2(d_0)} [\tilde a_1'' d_0^{2m-n}\cdot d^{1-(l+s)q_s}(x) + \tilde a_2'' d^{-(l+s)q_s+2m}(x) + \tilde a_3'' d_0^{2m-n-(l+s)q_s}] \le a'',$$

$$J_{3l\alpha s} = \sup_{x\in\Omega_3(d_0)} \int_\Omega |\tilde G_{l\alpha s}(x,y)|dy \le a'''.$$

Отже, $J_{l\alpha s} = \max\{J_{1l\alpha s}, J_{2l\alpha s}, J_{3l\alpha s}\} \le \max\{a', a'', a'''\} = a$.

Доведемо другу частину твердження леми. Використовуючи проведені оцінки, маємо

$$I^{(1)}_{l\alpha s}(d_0) = \sup_{x\in\Omega_1(d_0)} \int_\omega |\tilde G_{l\alpha s}(x,y)|dy \le a' d_0^{1-(l+s)q_s}.$$

За заданим $\varepsilon>0$ вибираючи $d_0 \le \min\{1, (\frac{\varepsilon}{a'})^{\frac{1}{1-(l+s)q_s}}\}$, одержуємо $I^{(1)}_{l\alpha s}(d_0)\le\varepsilon$.

Розглянемо тепер

$$I^{(2)}_{l\alpha s}(d_0) = \sup_{x\in\overline\Omega: d(x)\ge d_0} [\int_{\omega\cap\{y\in\Omega:d(y)<\frac{d_0}{2}\}} |\tilde G_{l\alpha s}(x,y)|dy + \int_{\omega\cap\{y\in\Omega:d(y)>\frac{d_0}{2}\}} |\tilde G_{l\alpha s}(x,y)|dy] =$$

$$I^{(2)}_{l\alpha s1}(d_0) + I^{(2)}_{l\alpha s2}(d_0).$$

Зауважимо, що при $d(x)\ge d_0$ та $d(y) = |y-y_0| < \frac{d_0}{2} \le \frac{d(x)}{2}$, $(y_0\in S)$ (а отже $-d(y) > -\frac{d(x)}{2}$) маємо

$$|x-y| = |x-y_0+y_0-y| \ge |x-y_0| - |y-y_0| > d(x) - \frac{d(x)}{2} = \frac{d(x)}{2} \ge \frac{d_0}{2},$$

і тоді $I^{(2)}_{l\alpha s1}(d_0) \le \tilde C_\alpha d_0^{2m-n-|\alpha|} \int_{\omega\cap\{y\in\Omega:d(y)\le\frac{d_0}{2}\}} \varrho^{-(l+s)q_s}(y)dy$, а за теоремою про середнє для інтеграла $I^{(2)}_{l\alpha s1}(d_0) \le \tilde C_\alpha d_0^{2m-n-|\alpha|}\cdot(\tau d_0)^{-(l+s)q_s} m(\omega)$ $(\tau\in(0,\frac12)$ — деяке число, $c_1' = c_1'(\tau) = \mathrm{const}>0)$, звідки при $m(\omega)\le(\tau d_0)^n$ одержуємо $I^{(2)}_{l\alpha s1}(d_0) \le \frac{c_1'}{3} d_0^{2m-|\alpha|-(l+s)q_s} \le \frac{c_1'}{3} d_0^{1-(l+s)q_s}$,

$$I^{(2)}_{l\alpha s2}(d_0) = \sup_{x\in\overline\Omega:d(x)\ge d_0} [\int_{\omega\cap\{y\in\Omega:d(y)>\frac{d_0}{2},|x-y|<\frac{d_0}{2}\}} |\tilde G_{l\alpha s}(x,y)|dS +$$

$$\int_{\omega\cap\{y\in\Omega:d(y)>\frac{d_0}{2},|x-y|>\frac{d_0}{2}\}} |\tilde G_{l\alpha s}(x,y)|dy] \le \sup_{x\in\overline\Omega:d(x)\ge d_0} [\frac{\tilde c_2}{3} d_0^{-(l+s)q_s} \cdot \int_{\omega\cap\{y\in\Omega:|x-y|<\frac{d_0}{2}\}} |D_x^\alpha G_0(x,y)|dy +$$

$$\frac{c_3'}{3} d_0^{2m-n-|\alpha|-(l+s)q_s} m(\omega)] \le \frac{c_2'}{3} d_0^{-(l+s)q_s+2m-|\alpha|} + \frac{c_3'}{3} d_0^{2m-n-|\alpha|-(l+s)q_s} m(\omega) \le \frac{2c'}{3} d_0^{1-(l+s)q_s}.$$

Тут $\tilde C_\alpha, \tilde c_2, c_1', c_2', c_3'$ — додатні сталі, $c' = \max\{c_1', c_2', c_3'\}$. Отож, $I^{(2)}_{l\alpha s2}(d_0) \le c' d_0^{1-(l+s)q_s}$ і подібно до попереднього випадку $(d(x)\le d_0)$, вибираючи $d_0 < \min\{1, (\frac{\varepsilon}{c'})^{\frac{1}{1-(l+s)q_s}}\}$, при $m(\omega)\le d_0^n$ матимемо $I^{(2)}_{l\alpha s2}(d_0)\le\varepsilon$, а при $d_0 < \min\{1, (\frac{1}{a'})^{\frac{1}{1-(l+s)q_s}}, (\frac{\varepsilon}{c'})^{\frac{1}{1-(l+s)q_s}}\}$ та $m(\omega)\le\delta=(\tau d_0)^n$ одержуємо $I_{l\alpha s} = \max\{I^{(1)}_{l\alpha s}(d_0), I^{(2)}_{l\alpha s}(d_0)\}\le\varepsilon$.

Подібно знаходимо оцінку

$$I^{(1)}_{l\alpha}(d_0) = \sup_{x\in\overline\Omega:d(x)\le d_0} \varrho^{l+|\alpha|}(x) \int_{\omega_1} |D_x^\alpha G_0(x,y)|dy \le \hat a d_0^{l+|\alpha|} \int_\omega |D^\alpha G_0(x,y)|dy \le \hat a d_0 \hat R_\alpha,$$

$$I^{(2)}_{l\alpha}(d_0) = \sup_{x\in\overline\Omega:d(x)\ge d_0} \varrho^{l+|\alpha|}(x) \int_{\omega_1} |D^\alpha G_0(x,y)|dy \le \sup_{x\in\overline\Omega:d(x)\ge d_0} \int_\omega |D_x^\alpha G_0(x,y)|dy =$$

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}:d(x)\geq d_0}[\int_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-y|<d_0\}}|D_x^\alpha G_0(x,y)|dy+\int_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-y|>d_0\}}|D_x^\alpha G_0(x,y)|dy]\leq$$
$$\tfrac{\hat{c}}{2}d_0^{2m-|\alpha|}+\tfrac{\hat{c}}{2}d_0^{2m-n-|\alpha|}m(\omega)\leq\hat{c}d_0^{2m-|\alpha|}\leq\hat{c}d_0 \text{ при } m(\omega)\leq d_0^n,$$

звідки при $d_0\leq\min\{1,\frac{\varepsilon}{\hat{a}\hat{R}_\alpha},\frac{\varepsilon}{\hat{c}}\}$ та $m(\omega)\leq\delta$ матимемо

$$I_{l\alpha}\leq\max\{I_{l\alpha}^{(1)}(d_0),I_{l\alpha}^{(2)}(d_0)\}\leq\varepsilon.$$

□

Теорема 1. *Нехай* $F_j\in D'(S)$, $s(F_j)\leq p_j$, $p_j\geqslant 0$ $(j=\overline{1,m})$, *функція* f *задовольняє умови (9) і (10) при* $q_s<\frac{1}{n-2m+s}(s=\overline{1,r})$,

$$1-2m\leq p'<1-n+\min_{0\leq s\leq r}\Big\{\frac{1}{q_s}-s\Big\},p'+n-1\leq l<\min_{0\leq s\leq r}\Big\{\frac{1}{q_s}-s\Big\}. \tag{12}$$

Тоді існує розв'язок $u\in C_{l,r}(\Omega)$ *задачі (2)–(3).*

Доведення. Введемо на $C_{l,r}(\Omega)$ оператор

$$(Pu)(x)=\int_\Omega G_0(x,y)f(y,\partial_r v(y))dy+g(x),v\in C_{l,r}(\Omega),$$

де $g(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\langle G_j(x,y),F_j(y)\rangle,\ x\in\Omega$. Тоді рівняння (3) записується у вигляді $u=Pu$ і для доведення його розв'язності використаємо принцип Шаудера [15]. При $v\in C_{l,r}(\Omega)$ розглянемо

$$||Pv||'_{l,r}\leq\max_{|\alpha|\leq r}\sup_{x\in\Omega}\varrho^{l+|\alpha|}(x)\int_\Omega|D_x^\alpha G_0(x,y)|[\sum_{s=0}^{r}A_s\sum_{|\gamma|=s}|D_x^\gamma v(y)|^{q_s}+B]dy+||g||'_{l,r}\leq$$
$$\leq\max_{|\alpha|\leq r}\sup_{x\in\Omega}\varrho^{l+|\alpha|}(x)\int_\Omega\sum_{s=0}^{r}A_s\varrho^{-(l+s)q_s}(y)|D_x^\alpha G_0(x,y)|\sum_{|\gamma|=s}||\varrho^{l+s}(y)D_x^\gamma v(y)]^{q_s}dy+$$
$$+B\max_{|\alpha|\leq r}\sup_{x\in\Omega}\varrho^{l+|\alpha|}(x)\int_\Omega|D_x^\alpha G_0(x,y)|dy+||g||'_{l,r}\leq$$
$$\leq\sum_{s=0}^{r}c(s)A_s(||v||'_{l,r})^{q_s}\max_{|\alpha|\leq r}\sup_{x\in\Omega}\varrho^{l+|\alpha|}(x)\int_\Omega|D_x^\alpha G_0(x,y)|\varrho^{-(l+s)q_s}(y)dy+B\hat{R}+||g||'_{l,r},$$

де $c(s)$ — певна стала (кількість індексів γ таких, що $|\gamma|=s$). За лемою 4 матимемо

$$||Pv||'_{l,r}\leq\sum_{s=0}^{r}h_s(||v||'_{l,r})^{q_s}+C_{1l}<+\infty\ \ \forall v\in C_{l,r}(\overline{\Omega}). \tag{13}$$

де $h_s=2c(s)A_s\hat{C}_{ls}$, $\hat{C}_{ls}=\max\limits_{|\alpha|\leq r}\sup\limits_{x\in\Omega}\int_\Omega|\tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)|dy$, $s=\overline{0,r}$, $C_{1l}=B\hat{R}+||g||'_{l,r}$.

Нехай $\tilde{M}_{l,r,C}(\Omega)=\{v\in C_{l,r}(\Omega):||v||'_{l,r}\leq C\}$ — куля в $C_{l,r}(\Omega)$. Покажемо існування такої сталої $C>0$, що $P:\tilde{M}_{l,r,C}(\Omega)\to\tilde{M}_{l,r,C}(\Omega)$.

Із (13) одержуємо

$$||Pv||'_{l,r}\leq\sum_{s=0}^{r}h_sC^{q_s}+C_{1l}\ \forall v\in\tilde{M}_{l,r,C}(\Omega). \tag{14}$$

Оскільки всі $q_s\in(0,1)$, то для довільних додатних h_s,C_{1l} існує така стала $C_0>0$, що при $C>C_0$ виконується: $\sum_{s=0}^{r}\hat{A}_sC^{q_s}+C_{1l}<C$. Тоді з (14) при $C>C_0$ матимемо: $P:\tilde{M}_{l,r,C}(\overline{\Omega})\to\tilde{M}_{l,r,C}(\overline{\Omega})$.

Для довільних $v_1, v_2 \in C_{l,r}(\Omega)$ розглянемо

$$||Pv_1 - Pv_2||'_{l,r} = \max_{|\alpha|\le r}\sup_{x\in\Omega} \varrho^{l+|\alpha|}(x)|\int_\Omega D_x^\alpha G_0(x,y)[f(y,\partial_r v_1(y)) - f(y,\partial_r v_2(y))]dy| \le$$

$$\sum_{s=0}^r c(s)\tilde{A}_s(||v_1-v_2||'_{l,r})^{q_s}\max_{|\alpha|\le r}\sup_{x\in\Omega}\int_\Omega |\tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)|dy \le \sum_{s=0}^r \tilde{h}_s(||v_1-v_2||'_{l,r})^{q_s},$$

де $\tilde{h}_s = 2c(s)\tilde{A}_s\hat{C}_{ls}$, а отже, оператор P неперервний на $C_{l,r}(\Omega)$.

Доведемо компактність оператора P на $\tilde{M}_{l,r,C}(\Omega)$, тобто відносну компактність множини $\{Pv : v \in \tilde{M}_{l,r,C}(\Omega)\}$ в $C_{l,r}(\Omega)$.

Із (14) випливає рівномірна обмеженість $||Pv||'_{l,r}$ на $\tilde{M}_{l,r,C}(\Omega)$. Покажемо одностайну неперервність множини $\{Pv : v \in \tilde{M}_{l,r,C}(\Omega)\}$ в $\tilde{M}_{l,r}(\Omega)$. Вважаємо $\varrho(x+z) = 0$, якщо $x+z \notin \Omega$.

При $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}^n$, $v \in C_{l,r}(\Omega)$

$$\max_{|\alpha|\le r}\sup_{x\in\Omega}|\varrho^{l+|\alpha|}(x+z)D^\alpha(Pv)(x+z) - \varrho^{l+|\alpha|}(x)D^\alpha(Pv)(x)|\} \le$$

$$\le \max_{|\alpha|\le r}\sup_{x\in\Omega}|\varrho^{l+|\alpha|}(x+z)D^\alpha g(x+z) - \varrho^{l+|\alpha|}(x)D^\alpha g(x)| +$$

$$+\max_{|\alpha|\le r}\int_\Omega |\varrho^{l+|\alpha|}(x+z)D_x^\alpha G_0(x+z,y) - \varrho^{l+|\alpha|}(x)D_x^\alpha G_0(x,y)|[\sum_{s=0}^r A_s\sum_{|\gamma|=s}|D^\gamma v(y)|^{q_s} + B]dy \le$$

$$\le J_1(z) + J_2(z) + J_3(z),$$

де $J_1(z) = \max_{|\alpha|\le r}\sup_{x\in\Omega}|\varrho^{l+|\alpha|}(x+z)D^\alpha g(x+z) - \varrho^{l+|\alpha|}(x)D^\alpha g(x)|$,

$$J_2(z) = \sum_{s=0}^r c(s)A_sC^{q_s}\max_{|\alpha|\le r}\sup_{x\in\Omega}\int_\Omega|\tilde{G}_{l\alpha s}(x+z,y) - \tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)|dy,$$

$$J_3(z) = B\max_{|\alpha|\le r}\sup_{x\in\Omega}\int_\Omega|\varrho^{l+|\alpha|}(x+z)D^\alpha G_0(x+z,y) - \varrho^{l+|\alpha|}(x)D^\alpha G_0(x,y)|dy.$$

Із рівномірної неперервності функцій $\varrho^{l+|\alpha|}(x)D^\alpha g(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ випливає існування для довільного $\varepsilon > 0$ такого $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$, що для довільних $x \in \overline{\Omega}, z \in \mathbb{R}^n, |z| \le \delta'$ виконується $J_1(z) \le \frac{\varepsilon}{2}$.

Нехай $\eta \in (0,\varepsilon_0)$, Ω_η — підобласть Ω, обмежена поверхнею S_η, через ω^z позначаємо зсув множини ω на вектор z. За лемою 4 для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, існує відповідне $\eta_0 \in (0,\varepsilon_0)$, такі що $m(\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}) \le \delta_0$ та для всіх $z \in \mathbb{R}^n$

$$I_{21}(z) = \sum_{s=0}^r c(s)A_sC^{q_s}\max_{|\alpha|\le r}\sup_{x\in\Omega}[\int_{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}}|\tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)|dy + \int_{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}}|\tilde{G}_{l\alpha s}(x+z,y)|dy] =$$

$$\sum_{s=0}^r c(s)A_sC^{q_s}\max_{|\alpha|\le r}\sup_{x\in\Omega}[\int_{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}}|\tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)|dy + \int_{(\Omega\setminus\Omega_{\eta_0})^{-z}}|\tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)|dy] \le \tfrac{\varepsilon}{12}.$$

Вибираємо також $\eta_0 < \varepsilon/6(b\hat{R}\sum_{s=0}^r c(s)A_sC^{q_s})^{\frac{1}{1-(l+s)q_s}}$ (додатна стала b така, що $\varrho^l(x) \le b\eta_0^l$ при $x \in \overline{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}}$). Виберемо $\eta_1 < \min\{\frac14\eta_0, (\frac{\delta_0}{\sigma_n})^{\frac1n}\}$, де σ_n — площа поверхні одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$.

Для $x \in \overline{\Omega}_{\frac14\eta_0}$ визначимо множини $\omega_{\eta_1}(x) = \{\xi \in \Omega_{\eta_0} : |\xi - x| < \eta_1\}$. Маємо $m(\omega_{\eta_1}(x)) = \sigma_n\eta_1^n \le \delta_0$. Виберемо $\delta_1 = \min\{\sigma_n\eta_1^n, \frac12\eta_1\}$. Якщо $x \in \overline{\Omega}_{\frac12\eta_0}$, $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| \le \delta_1(<\frac18\eta_0)$, то $x+z \in \Omega$, $\omega_{\eta_1}^{-z}(x) \subset \Omega$. Отож, за лемою 4 при $|z| \le \delta_1$

$$I_{22}(z) = \sum_{s=0}^r c(s)A_sC^{q_s}\max_{|\alpha|\le r}\sup_{x\in\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}[\int_{\omega_{\eta_1}(x)}|\tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)|dy + \int_{\omega_{\eta_1}(x)}|\tilde{G}_{l\alpha s}(x+z,y)|dy] =$$

$$\sum_{s=0}^r c(s)A_sC^{q_s}\max_{|\alpha|\le r}\sup_{x\in\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}[\int_{\omega_{\eta_1}(x)}|\tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)|dy + \int_{\omega_{\eta_1}^{-z}(x)}|\tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)|dy] \le \tfrac{\varepsilon}{12}.$$

При $x \in \overline{\Omega}_{\frac{1}{4}\eta_0}$, $y \in \overline{\Omega_{\eta_0} \setminus \omega_{\eta_1}(x)}$, $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| \leq \delta_1$ маємо $x+z \in \Omega$, $|y-x| \geq \eta_1$, $|y-(x+z)| \geq |y-x|-|z| \geq \eta_1-\delta_1 > \frac{\eta_1}{2}$. За рівномірною неперервністю функції $\tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)$ на замкненій множині $V = \{x \in \overline{\Omega_{\frac{1}{4}\eta_0}}, y \in \overline{(\Omega_{\eta_0} \setminus \omega_{\eta_1}(x))}\}$ одержуємо: для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_1]$, що для довільних $(x,y) \in V_1 = \overline{\Omega}_{\frac{1}{2}\eta_0} \times \overline{(\Omega_{\eta_0} \setminus \omega_{\eta_1}(x))} \subset V$, $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| \leq \delta_2$ виконується

$$\max_{|\alpha|\leq r} |\tilde{G}_{l\alpha s}(x+z,y) - \tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)| \leq \varepsilon \Big/ 12 \sum_{s=0}^{r} c(s) A_s C^{q_s} m(\Omega),$$

а тоді

$$I_{23}(z) = \sum_{s=0}^{r} c(s) A_s C^{q_s} \max_{|\alpha|\leq r} \sup_{x\in\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}} \int_{\Omega_{\eta_0}\setminus\omega_{\eta_1}(x)} |\tilde{G}_{l\alpha s}(x+z,y) - \tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)| dy < \tfrac{\varepsilon}{12}.$$

Отож, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке δ_2, що при $z \in \mathbb{R}^n, |z| \leq \delta_2$

$$\sum_{s=0}^{r} c(s) A_s C^{q_s} \max_{|\alpha|\leq r} \sup_{x\in\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}} \int_{\Omega_{\eta_0}} |\tilde{G}_{l\alpha s}(x+z,y) - \tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)| dy \leq I_{22}(z) + I_{23}(z) \leq \tfrac{\varepsilon}{6}.$$

При $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_{\frac{3\eta_0}{4}}}$, $y \in \overline{\Omega}_{\eta_0}$, $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| \leq \delta_1$ та $x+z \in \Omega$ маємо $y \neq x$, $y \neq x+z$, також $d(y) \geq \frac{3}{4}\eta_0 > \eta_1$. Тому $\varrho^{-(l+s)q_s}(y) \leq b_s \eta_0^{-(l+s)q_s}$, $b_s = \text{const} > 0$, а за рівномірною неперервністю функції $\tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)$ на замкненій множині $V' = (\overline{\Omega \setminus \Omega_{\frac{1}{2}\eta_0}}) \times \overline{\Omega_{\eta_0}}$, враховуючи, що $l+|\alpha| \geq 0$, $\varrho^{l+|\alpha|}(x) \leq 1$, $x \in \overline{\Omega}$, одержуємо: для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta_3 \in (0, \delta_1]$, що для довільних $(x,y) \in V_1' = (\overline{\Omega \setminus \Omega_{\frac{1}{2}\eta_0}}) \times \overline{\Omega_{\eta_0}} \subset V'$, $z \in \overline{\Omega}, |z| \leq \delta_3$ виконується

$$\max_{|\alpha|\leq r} |\tilde{G}_{l\alpha s}(x+z,y) - \tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)| dy \leq \varepsilon \Big/ 6 \sum_{s=0}^{r} c(s) A_s C^{q_s} m(\Omega),$$

звідки

$$I_{24}(z) = \sum_{s=0}^{r} c(s) A_s C^{q_s} \sup_{x\in\Omega\setminus\overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{2}}} \int_{\Omega_{\eta_0}} |\tilde{G}_{l\alpha s}(x+z,y) - \tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)| dy \leq \varepsilon/6.$$

Для тих $x \in \Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{2}}$, $y \in \overline{\Omega}_{\eta_0}$, $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| \leq \delta_3'$, для яких $x+z \notin \Omega$, матимемо

$$I_{24}'(z) = \sum_{s=0}^{r} c(s) A_s C^{q_s} \max_{|\alpha|\leq r} \sup_{x\in\Omega\setminus\overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{2}}} \int_{\Omega_{\eta_0}} |\tilde{G}_{l0}(x+z,y,\hat{x}) - \tilde{G}_{l0}(x,y,\hat{x})| dy =$$

$$= \sum_{s=0}^{r} c(s) A_s C^{q_s} \max_{|\alpha|\leq r} \sup_{x\in\Omega\setminus\overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{2}}} \int_{\Omega_{\eta_0}} |\tilde{G}_{l\alpha s}(x,y)| dy \leq \sum_{s=0}^{r} c(s) A_s C^{q_s} \hat{R} b \eta_0^{1-(l+s)q_s} \leq \tfrac{\varepsilon}{6}$$

(враховано, що $\varrho^l(x) \leq b\eta_0^l$, $d(y) \geq \eta_0$ при $y \in \overline{\Omega}_{\eta_0}$ та вибір числа η_0). Отже,

$$J_2(z) \leq I_{21}(z) + \max\{I_{22} + I_{23}(z), I_{24}(z), I_{24}'(z)\} \leq \tfrac{\varepsilon}{12} + \tfrac{\varepsilon}{6} = \tfrac{\varepsilon}{4}$$

при $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| \leq \delta'' = \min\{\delta_2, \delta_3, \delta_3'\}$.

Аналогічно для довільного $\varepsilon > 0$ знаходимо таке $\delta''' > 0$, що для всіх $z \in \mathbb{R}^n, |z| \leq \delta'''$ матимемо $J_3(z) \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

В результаті одержуємо: для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \min\{\delta', \delta'', \delta'''\} > 0$, що для всіх $z \in \mathbb{R}^n, |z| \leq \delta$

$$\max_{|\alpha|\leq r} \sup_{x\in\Omega} |\varrho^{l+|\alpha|}(x+z) D^\alpha (Pv)(x+z) - \varrho^{l+|\alpha|}(x) D^\alpha (Pv)(x)| \leq$$
$$\leq J_1(z) + J_2(z) + J_3(z) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Ми показали виконання умов принципу Шаудера для P. Теорема доведена. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Le Gall J.-F. *The Brounian snake and the solutions of* $\Delta u = u^2$ *in a domain*// Probab. Theory Related Fields. – 1995. – V.102. – P. 393–432.
2. Dynkin E.B., Kuznetsov S.E. *Trece of the boundary for solutions of nonlinear equations*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – V.350. – P. 4499–4519.
3. Marcus M., Veron L. *Removable singularities and boundary traces*// J. Math. Pures Appl. – 2001. – V.80, №1. – P. 879–900.
4. Лопушанська Г.П. *Крайові значення із* $(C^\infty)'$ *розв'язків напівлінійних еліптичних рівнянь*// Нелин. гран. задачи. – 2006. – Т.16. – С. 173–185.
5. Лопушанська Г.П. *Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійного еліптичного диференціальниго рівняння порядку* $2m$// Мат. студ. – 2010. – Т.33, №1. – С. 39–48.
6. Похожаев С. *О задаче Дирихле для уравнения* $\Delta u = u^2$// ДАН СССР. – 1960. – Т.134, № 4. – P. 769–772.
7. Kondrat'ev V.A., Nikishkin V.A. *Asymptotic, near the boundary, of a solution of a singular boudary-value problem for a semilinear ellyptic equation*// Diff. uravn. – 1990. – V.26, № 3. – P. 465–468.
8. Serrin J. *Cauchy–Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities.*// Acta Math. – 2002. – V.189. – P. 79–142.
9. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
10. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. – М.:Наука, 1965. – 327 с.
11. Лопушанська Г.П. *Задача Діріхле для квазілінійного еліптичного рівняння у просторах розподілів*// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип. 34. – С. 26–31.
12. Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю. *Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь*// Нелин. гран. задачи. – 2007. – Т.17. – С. 50–73.
13. Березанский Ю.М., Ройтберг Я.А. *Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических краевых задач*// Укр. мат. ж. – 1967. – Т.19, № 5. – С. 3–32.
14. Красовский Ю.П. *Свойства функций Грина и обобщенное решение эллиптических граничных задач*// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – Т.33, №1. – С. 109–137.
15. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
16. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 24.12.2007
Після переробки 17.12.2009