УДК 519.4

Л. П. Бедратюк

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ ІНВАРІАНТІВ БІНАРНОЇ ФОРМИ

L. P. Bedratyuk. *On differential equation for invariants of binary form*, Mat. Stud. **34** (2010), 48–56.

An explicit form of single first order PDE for invariants of binary form is found.

Л. П. Бедратюк *Дифференциальное уравнение для инвариантов бинарной формы* // Мат. Студії. – 2010. – Т.34, №1. – С.48–56.

В явном виде найдено дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка которому удовлетворяют инварианты бинарной формы.

1. Розглянемо векторний $\mathbb{C}$-простір V_n породжений бінарними формами степеня n

$$u(Y_1,Y_2)=\sum_{i=0}^{n} x_i\binom{n}{i}Y_1^{n-i}Y_2^{i},\quad x_i\in\mathbb{C}.$$

Алгебру поліноміальних функцій $\mathbb{C}[V_n]$ простору V_n ототожнимо з ізоморфною до неї алгеброю многочленів $\mathbb{C}[x_0,x_1,\ldots,x_n]$. Група SL_2 діє на V_n за правилом

$$(g\,u)(Y_1,Y_2)=u(d\,Y_1-b\,Y_2,-c\,Y_1+a\,Y_2),\quad g=\begin{pmatrix} a\,b\\ c\,d\end{pmatrix}\in SL_2.$$

Поліноміальні функції з $\mathbb{C}[V_n]$, які залишаються інваріантними відносно дії групи SL_2 утворюють скінченно вимірну алгебру $\mathcal{I}_n:=\mathbb{C}[V_n]^{SL_2}$, яка називається алгеброю інваріантів бінарної форми порядку n. Породжуючі елементи $\begin{pmatrix} 0\,1\\ 0\,0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\,0\\ 1\,0\end{pmatrix}$ дотичної алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ діють на просторі V_n як диференціювання $-Y_2\frac{\partial}{\partial Y_1}$, та $-Y_1\frac{\partial}{\partial Y_2}$, а на $\mathbb{C}[V_n]$ як диференціювання

$$d_1:=x_0\tfrac{\partial}{\partial x_1}+2\,x_1\tfrac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+n\,x_{n-1}\tfrac{\partial}{\partial \alpha_n},\quad d_2:=n\,x_1\tfrac{\partial}{\partial x_0}+(n-1)\,x_2\tfrac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+x_n\tfrac{\partial}{\partial x_{n-1}}.$$

Відомо (див. [1], [2]), що алгебра інваріантів $\mathcal{I}_n$ збігається з алгеброю всіх поліноміальних розв'язків такої системи диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку

$$\begin{cases} x_0\frac{\partial u}{\partial x_1}+2\,x_1\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+n\,x_{n-1}\frac{\partial u}{\partial x_n}=0,\\ n\,x_1\frac{\partial u}{\partial x_0}+(n-1)\,x_2\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}=0.\end{cases}\qquad (*)$$

Отже,

2000 *Mathematics Subject Classification:* 17B50;17B20.

$$\mathcal{I}_n = \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]^{d_1} \cap \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]^{d_2},$$

де $\mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]^{d_i}:=\{f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \mid d_i(f) = 0\}$ $(i \in \{1, 2\})$.

Знаходження мінімальної системи породжуючих елементів алгебри $\mathcal{I}_n$ та їхніх сигизій є відомою задачею класичної теорії інваріантів, яка розв'язана лише при малих значеннях n. Для $n \leq 6$ мінімальні системи породжуючих інваріантів знайдено зусиллями Буля, Келлі, Ерміта, Ейзенштейна, Гордана, Фаа ді Бруно (див. [3]-[5]). Для $\mathcal{I}_7$ повна система інваріантів знайдена автором в [6], випадок алгебри $\mathcal{I}_8$ досліджений Галлем в [7] та пізніше заново перевірений Шіодою в [8]. Випадки $n \in \{9, 10\}$ розглянуті в роботах [9], [10]. Задача явного опису мінімальної системи породжуючих елементів алгебри $\mathcal{I}_n$, $n > 10$ є далекою від розв'язання. Також відкритою є проблема знаходження раціонального базису алгебри інваріантів, існування якого було доведено Гільбертом (див. [11]).

Для кожного із диференціальних рівнянь системи $(*)$ можна досить просто вказати фундаментальну систему розв'язків в полі раціональних дробів відповідного кільця многочленів, а потім вивчити дію диференціювання, яке відповідає другому рівнянню, на цій фундаментальній системі. Виявилося, що цим самим систему двох диференціальних рівнянь можна звести до одного диференціального рівняння. В даній роботі виведено явний вигляд цього диференціального рівняння.

2. Перепозначимо змінну x_0 на t, через $\mathbb{C}[X]$ позначимо кільце $\mathbb{C}[t, x_1, \ldots, x_n]$, а через $\mathbb{C}(X)$ – поле часток кільця $\mathbb{C}[X]$. Диференціювання d_1, d_2 можна природнім чином продовжити з $\mathbb{C}[X]$ на $\mathbb{C}(X)$, зберігши за ними те саме позначення, причому, очевидно, $\mathbb{C}[X]^{d_i} = \mathbb{C}(X)^{d_i} \cap \mathbb{C}[X]$, $i = 1, 2$. Оператор d_1 є локально нільпотентним на $\mathbb{C}[X]$, крім того $d_1(\lambda) = -1$, де $\lambda = -x_1/t$. Тому (див. [12], [13]), для диференціювання d_1 можна отримати явний опис кільця $\mathbb{C}[X]^{d_1}$, а саме

$$\mathbb{C}[X]^{d_1} = \mathbb{C}[\sigma(t), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n)][\tfrac{1}{t}] \cap \mathbb{C}[X],$$

де σ – проектор з $\mathbb{C}[X]$ в $\mathbb{C}(X)^{d_1}$, який визначається таким чином

$$\sigma(a) = \sum_{i=0}^{\operatorname{ord}_{d_1}(a)} d_1^i(a) \tfrac{\lambda^i}{i!}.$$

Тут $\operatorname{ord}_{d_1}(a)$ є порядком елемента $a \in \mathbb{C}[X]$ відносно локально нільпотентного диференціювання d_1, тобто $\operatorname{ord}_{d_1}(a):= \max\{s, d_1^s(a) \neq 0\}$. З означення порядку елемента зразу отримується, що

- (i) якщо $d_1(f) \neq 0$, то $\operatorname{ord}_{d_1}(d_1(f)) = \operatorname{ord}_{d_1}(f) - 1$,
- (ii) $\operatorname{ord}_{d_1}(fg) = \operatorname{ord}_{d_1}(f) + \operatorname{ord}_{d_1}(g)$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

З того, що

$$\mathbb{C}[X]^{d_1} = \mathbb{C}[\sigma(t), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n)]\left[\frac{1}{t}\right] \cap \mathbb{C}[X],$$

зразу випливає

$$\mathbb{C}(X)^{d_1} = \mathbb{C}(\sigma(t), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n)).$$

Справді, розглянемо нескоротний дріб $\dfrac{f}{g} \in \mathbb{C}(X)^{d_1}$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$. Покажемо, що тоді $f, g \in \mathbb{C}[X]^{d_1}$. Припустимо, що $d_1(f) \neq 0$ і $d_1(g) \neq 0$. Маємо

$$d_1\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d_1(f)g - f d_1(g)}{g^2} = 0,$$

звідки $d_1(f)g = fd_1(g)$. Оскільки f, g є взаємно простими, то рівність $d_1(f)g = fd_1(g)$ можлива лише у випадку коли $d_1(f) = pf$ і $d_1(g) = pf$, для ненульового $p \in \mathbb{C}[X]$. Отже, зокрема, $\operatorname{ord}_{d_1}(f) - 1 = \operatorname{ord}_{d_1}(p) + \operatorname{ord}_{d_1}(f) \geq \operatorname{ord}_{d_1}(f)$. Отримана суперечність і доводить, що $d_1(f) = 0$. Аналогічно знаходиться, що і $d_1(g) = 0$, тобто многочлени f, g належать $\mathbb{C}[\sigma(t), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n)]\left[\dfrac{1}{t}\right]$. Звідси і отримаємо, що $\dfrac{f}{g} \in \mathbb{C}(\sigma(t), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n))$, тобто

$$\mathbb{C}(X)^{d_1} = \mathbb{C}(\sigma(t), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n)).$$

Знання розв'язків одного із рівнянь системи $(*)$ дає можливість зменшити кількість самих рівнянь. Справді, припустимо, що ми знайшли деяке скінчено породжене підкільце $A{:=}\mathbb{C}(a_1, \ldots, a_s)$ в $\mathbb{C}(X)$, яке містить $\mathbb{C}(X)^{d_1}$ і для якого $d_2(A) \subset A$. Нехай d – обмеження диференціювання d_2 на A, яке повністю визначається своїми значеннями $d_2(a_i) \in A$ на породжуючих елементах, тобто

$$d{:=}d_2(a_1)\,\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + d_2(a_s)\,\frac{\partial}{\partial a_s}.$$

Зрозуміло, що кільце A^d співпадає з поліноміальними розв'язками диференціального рівняння на A

$$d_2(a_1)\,\frac{\partial u}{\partial a_1} + \ldots + d_2(a_s)\,\frac{\partial u}{\partial a_s} = 0, \tag{$**$}$$

і ми отримаємо, що $\mathcal{I}_n = A^d \cap \mathbb{C}(\sigma(t), \sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) \cap \mathbb{C}[X]$.

Для прикладу розглянемо випадок $n = 2$. Диференціювання d_1 і d_2 набирають вигляду

$$d_1 = t\,\frac{\partial}{\partial x_1} + 2\,x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad d_2 = 2\,x_1\,\frac{\partial}{\partial t} + x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$$

Оскільки

$$\sigma(t) = t, \quad \sigma(x_1) = x_1 + t\,\lambda = x_1 + t\,\left(-\frac{x_1}{t}\right) = 0,$$
$$u_2{:=}\sigma(x_2) = x_2 + 2\,x_1\,\lambda + 2\,t\,\frac{\lambda^2}{2!} = x_2 - t\,\lambda^2,$$

то $\mathbb{C}(X)^{d_1} = \mathbb{C}(t, u_2)$. За кільце A можна взяти кільце $\mathbb{C}(t, \lambda, u_2)$. Справді, врахувавши $x_2 = u_2 + t\,\lambda^2$, отримаємо

$$d_2(t) = 2\,x_1 = -2t\,\lambda, \quad d_2(\lambda) = d_2\left(-\frac{x_1}{t}\right) = \lambda^2 - \frac{u_2}{t},$$
$$d_2(u_2){:=}d_2\Big(x_2 - t\,\lambda^2\Big) = 2\,\lambda u_2,$$

звідки $d_2(A) \subset A$, що і вимагалося. Тому диференціювання d має вигляд

$$d = -2t\,\lambda\frac{\partial}{\partial t} + \left(\lambda^2 - \frac{u_2}{t}\right)\frac{\partial}{\partial \lambda} + 2\,tu_2\frac{\partial}{\partial u_2},$$

а відповідне диференціальне рівняння $(**)$, після домноження на t, буде таким

$$-2t^2\,\lambda\frac{\partial u}{\partial t} + (t\lambda^2 - u_2)\frac{\partial u}{\partial \lambda} + 2\,t^2 u_2\frac{\partial u}{\partial u_2} = 0.$$

Добре відомо [14], що диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку від трьох змінних не може мати більше ніж два функціонально незалежних розв'язки в кільці A. Проте саме два таких розв'язки неважко знайти – $t\,u_2$ і $u_2 + t\lambda^2$. Отже $A^d = \mathbb{C}(t\,u_2, u_2{+}t\lambda^2)$. Далі, перетином кілець A^d і $\mathbb{C}(t, u_2)$, очевидно, є кільце $\mathbb{C}(t\,u_2)$. Оскільки $t\,u_2 = t\,x_2 - x_1^2$ уже належить до $\mathbb{C}[X]$, то звідси випливає, що алгебра інваріантів $R_2^{SL_2}$ породжена єдиним інваріантом $t\,x_2 - x_1^2$.

Розглянемо тепер випадок довільного n. Маємо, що $\mathbb{C}(X)^{d_1} = \mathbb{C}(t, u_2, u_3, \ldots, u_n)$, де

$$u_i{:=}\sigma(x_i) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} x_{i-k}\,\lambda^k.$$

Покажемо, що за кільце A можна взяти кільце $\mathbb{C}(t, x_1, u_2, \ldots, u_n)$. Для цього достатньо довести, що $d_2(A) \subset A$, оскільки включення $\mathbb{C}(X)^{d_1} \subset A$ є очевидним. Спочатку виразимо змінні $x_2, \ldots, x_n$ через $u_2, \ldots, u_n$. У виразах для u_i суму двох останніх доданків $ix_1\lambda^{i-1} + t\lambda^i = -(i-1)t\lambda^i$ позначимо через B_i. Зокрема, отримаємо

$$u_2 = x_2 + B_2, \quad u_3 = x_3 + 3\,x_2\lambda + B_3, \quad u_4 = x_4 + 4\,x_3\lambda + 6\,x_2\lambda^2 + B_4.$$

Звідси

$$x_2 = u_2 - B_2, \;\; x_3 = u_3 - 3\,u_2\lambda - (B_3 - 3\,B_2\lambda), \;\; x_4 = u_4 - 4u_3\lambda + 6u_2\lambda^2 - (B_4 - 4B_3\lambda + 6B_2\lambda^2),$$

і для довільного i

$$x_i = \sum_{k=0}^{i-2}(-1)^k\binom{i}{k}u_{i-k}\lambda^k - \sum_{k=0}^{i-2}(-1)^k\binom{i}{k}B_{i-k}\lambda^k.$$

Врахувавши, що

$$\sum_{k=0}^{i-2}(-1)^k\binom{i}{k}B_{i-k}\lambda^k = \sum_{k=0}^{i-2}(-1)^{k+1}(i{-}k{-}1)\binom{i}{k}t\lambda^i = \\ = t\lambda^i\sum_{k=0}^{i-2}(-1)^{k+1}(i-k-1)\binom{i}{k} = (-1)^{i+1}t\lambda^i,$$

отримаємо потрібний вигляд для x_i

$$x_i = \sum_{k=0}^{i-2}(-1)^k\binom{i}{k}u_{i-k}\lambda^k + (-1)^i t\lambda^i.$$

Таким чином маємо, що $A{=}\mathbb{C}(X)$ і тому, зрозуміло, що і $d_2(A) \subset A$. Для отримання рівняння (**) нам потрібно мати явний вираз для $d_2(u_i)$ як елементів кільця A. Безпосереднім обчисленням знаходимо

$$d_2(\lambda) = \lambda^2 - (n-1)\frac{u_2}{t}, \quad d_2(u_2) = (n-2)u_3 - (n-4)u_2\lambda,$$
$$d_2(u_3) = (n-3)u_4 - (n-6)u_3\lambda - 3(n-1)\frac{u_2^2}{t}.$$

У загальному випадку для $u_i, i > 3$ маємо

$$d_2(u_i) = \sum_{k=0}^{i-2} \binom{i}{k} d_2(x_{i-k})\, \lambda^k + \left(\sum_{k=1}^{i-2} k x_{i-k} \binom{i}{k} \lambda^{k-1} \right) d_2(\lambda) + d_2(B_i).$$

Обчислимо кожну суму окремо

$$\sum_{k=0}^{i-2} \binom{i}{k} d_2(x_{i-k})\, \lambda^k = \sum_{k=0}^{i-2} \binom{i}{k} (n-(i-k))\, x_{i-k+1} \lambda^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{i-2} \binom{i}{k} (n-(i-k))\, \lambda^k \left(\sum_{s=0}^{i-k-1} (-1)^s \binom{i-k+1}{s} u_{i-k-s+1} \lambda^s + (-1)^{i-k+1} t \lambda^{i-k+1} \right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{s=0}^{i-k-1} (-1)^s (n-(i-k)) \binom{i}{k} \binom{i-k+1}{s} u_{i-k-s+1} \lambda^{s+k} + t\lambda^{i+1} T_i =$$
$$= \sum_{p=2}^{i+1} u_p \lambda^{i+1-p} \sum_{s+k=i+1-p} (-1)^s (n-(i-k)) \binom{i}{k} \binom{i-k+1}{s} + t\lambda^{i+1} T_i =$$
$$= u_2 \lambda^{i-1} S_2 + \sum_{p=3}^{i+1} u_p \lambda^{i-p+1} S_p + t\lambda^{i+1} T_i,$$

тут

$$T_i := \sum_{k=0}^{i-2} (-1)^{i-k+1} (n-(i-k)) \binom{i}{k}, \quad S_2 := \sum_{k=3}^{i+1} (-1)^{k-2} (n-(k-1)) \binom{k}{2} \binom{i}{k-1},$$
$$S_p := \sum_{k=p}^{i+1} (-1)^{k-p} (n-(k-1)) \binom{k}{p} \binom{i}{k-1}, \text{ для } p > 2.$$

Лема 1. *Справедливі наступні рівності:*

(i) $T_i = n + i - n\, i, i > 1$;

(ii) $S_2 = -(n-1)i$, *при* $i > 3$;

(iii)

$$S_p = \begin{cases} n-i, & \text{при } p = i+1, \\ 2i-n, & \text{при } p = i, \\ -i, & \text{при } p = i-1, \\ 0, & \text{при } 2 < p < i-1, \\ -(n-1)i, & \text{при } p = 2. \end{cases}$$

Доведення. Використовуючи відому тотожність

$$\sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i}{k} = \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{k-1} \binom{i-1}{k-1} = 0,$$

отримаємо

$$T_i - n + (n-1)i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k+1}(n-(i-k))\binom{i}{k} = (n-i)(-1)^{i+1}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{-k}\binom{i}{k} + \\ +(-1)^{i+1}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{-k}k\binom{i}{k} = 0 + (-1)^{i+1}\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{k-1}\binom{i-1}{k-1} = 0.$$

Рівності для S_p отримуються із відомого, див. [15], співвідношення ортогональності

$$\delta_{m,n} = \sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{k}{m}\binom{n}{k},$$

аналогічними міркуваннями. □

Таким чином перша сума спростилася до вигляду

$$(n-i)u_{i+1} - (n-2i)u_i\lambda - iu_{i-1}\lambda^2 - i(n-1)u_2\lambda^{i-1} + (n+i-n\,i)t\lambda^{i+1}.$$

Обчислимо другу суму у виразі для $d_2(u_i)$

$$\sum_{k=1}^{i-2} x_{i-k}k\binom{i}{k}\lambda^{k-1}d_2(\lambda) = \sum_{k=1}^{i-2} x_{i-k}i\binom{i-1}{k-1}\lambda^{k-1}d_2(\lambda) = i(u_{i-1} - B_{i-1})d_2(\lambda),$$

і вираз для $d_2(B_i)$

$$d_2(B_i) = d_2(-(i-1)t\lambda^2) = (i-1)\lambda^{i-1}((n-i)t\lambda^2 + i(n-1)u_2).$$

Отже, після всіх спрощень для $i > 3$ отримаємо, що

$$d_2(u_i) = (n-i)u_{i+1} - (n-2i)u_i\lambda - i(n-1)\frac{u_2u_{i-1}}{t}.$$

Підсумуємо отримані результати

Теорема 1. *Алгебра інваріантів $\mathcal{I}_n$ співпадає з алгеброю поліноміальних розв'язків наступного диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку*

$$-nt^2\lambda\frac{\partial u}{\partial t} + (t\lambda^2-(n-1)u_2)\frac{\partial u}{\partial \lambda} + ((n-2)u_3t - (n-4)u_2t\lambda)\frac{\partial u}{\partial u_2} + \\ +\sum_{i=3}^{n}((n-i)u_{i+1}t - (n-2i)u_it\lambda - i(n-1)u_2u_{i-1})\frac{\partial u}{\partial u_i} = 0,$$

де

$$\lambda = -\frac{x_1}{t}, \quad u_i = \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}x_{i-k}\,\lambda^k.$$

Доведена теорема зводить розв'язання системи двох диференціальних рівнянь $(*)$ до розв'язання одного диференціального рівняння.

3. Покажемо, що задача знаходження розв'язків цього диференціального рівняння еквівалентна до задачі обчислення перетину деяких підалгебр алгебри $\mathbb{C}(X)$.

Введемо на $\mathbb{C}[x_0, u_2, \ldots, u_n]$ три диференціювання $\widehat{d_1}$, $\widehat{d_2}$ і e за правилами

$$\widehat{d_1}(u_i) = i\, u_{i-1}, \widehat{d_1}(u_2) = 0, \widehat{d_1}(x_0) = 0,$$
$$\widehat{d_2}(u_i) = (n-i)\, u_{i+1}, \widehat{d_2}(x_0) = 0,$$
$$e(u_i) := [\widehat{d_1}, \widehat{d_2}](u_i) = (n-2\,i) u_i, e(x_0) = n\, x_0.$$

Тоді в термінах цих диференціювань, диференціювання d записується так

$$d = x_0\, \widehat{d_2} - x_0 \lambda e - (n-1) u_2 \widehat{d_1}. \qquad (***)$$

Для диференціювання e кожен моном $x_0^{\alpha_1}\, u_2^{\alpha_2} \cdots u_n^{\alpha_n}$ є власним вектором із власним значенням

$$\omega(x_0^{\alpha_0}\, u_2^{\alpha_2} \cdots u_n^{\alpha_n}) = n \sum_i \alpha_i - 2\,(\alpha_2 + 3\,\alpha_3 + \cdots + n\,\alpha_n).$$

Однорідний многочлен z називається ізобарним, якщо сума $(\alpha_2 + 3\,\alpha_3 + \cdots + n\,\alpha_n)$ на всіх його мономах приймає однакове значення і це значення $\omega_u(z)$ назвемо u-вагою многочлена z. Легко бачити, що на таких ізобарних многочленах цілочисельна функція $\omega : \mathbb{C}[x_0, u_2, \ldots, u_n] \to \mathbb{Z}$ є лінійною і мультиплікативною, тому ізобарні многочлени для яких $n \deg(z) - 2\,\omega_n(z) = 0$ утворюють підалгебру в $\mathbb{C}[x_0, u_2, \ldots, u_n]$, яку ми позначимо I_n. Наступна теорема описує розв'язки рівняння інваріантів.

Теорема 2. $\mathcal{I}_n = I_n \cap \mathbb{C}[X]$.

Доведення. Припустимо, що многочлен $u \in \mathcal{I}_n$. Тоді $u \in \mathbb{C}[x_0, u_2, \ldots, u_n]$ і, отже, $\widehat{d_i}(u) \in \mathbb{C}[x_0, u_2, \ldots, u_n]$. Тому рівність $d(u) = x_0\, \widehat{d_2}(u) - x_0 \lambda e(u) - (n-1) u_2 \widehat{d_1}(u) = 0$, можлива лише у випадку коли коефіцієнт біля λ рівний нулю, тобто $e(u) = 0$. Отже $\omega(u) = 0$ і $u \in I_n \cap \mathbb{C}[X]$, звідки слідує $\mathcal{I}_n \subset I_n \cap \mathbb{C}[X]$.

Припустимо тепер, що $u \in I_n \cap \mathbb{C}[X]$. Покажемо, що тоді і $d_2(u) = 0$.

Задамо $\mathbb{C}$-лінійне, мультиплікативне відображення $\varphi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[x_0, u_2, \ldots, u_n]$ таким чином $\varphi(x_0) = x_0$, $\varphi(x_1) = 0$ і $\varphi(x_i) = u_i$ для $2 \leq i \leq n$. □

Лема 2. *(i) якщо $z \in \mathbb{C}[x_0, u_2, \ldots, u_n]$, то $\varphi(z) = z$,*

(ii) якщо $z \in \mathbb{C}[X]$, і до z не входить змінна x_1, то $\varphi(d_i(z)) = \widehat{d_i}\varphi(z))$, $i = 1, 2$.

Доведення. (i). Використавши розклад

$$x_i = \sum_{k=0}^{i-2} (-1)^k \binom{i}{k} u_{i-k} \lambda^k + (-1)^i t \lambda^i,$$

кожне x_i можна зобразити у вигляді $x_i = u_i + \lambda\, u_i'$, для деякого u_i'. Врахувавши мультиплікативність відображення φ і те, що $x_1 = -\lambda x_0 = \varphi(x_1) - \lambda x_0$, ми отримаємо, що для довільного многочлена z має місце розклад $z = \varphi(z) + \lambda z'$, для деякого многочлена z'. З того, що $z \in \mathbb{C}[x_0, u_2, \ldots, u_n]$ і $\lambda z' \notin \mathbb{C}[x_0, u_2, \ldots, u_n]$, випливає, що $z' = 0$ і тому $\varphi(z) = z$.

Для прикладу розглянемо многочлен $z{:=}x_4x_0 - 4\,x_1\,x_3 + 3\,x_2^2$. Виконавши заміну

$$x_1 = -\lambda x_0, \quad x_2 = u_2 + x_0\lambda^2,$$
$$x_3 = u_3 - 3\,u_2\,\lambda - x_0\,\lambda^3, \quad x_4 = u_4 + 6u_2\,\lambda^2 - 4\,u_3\,\lambda + x_4\,\lambda^4,$$

після спрощень отримаємо $z = x_0\,u_4 {+} 3\,u_2^2$. З іншого боку $\varphi(z) = \varphi(x_4\,x_0 {-} 4\,x_1\,x_3 {+} 3\,x_2^2) = x_0\,u_4 + 3\,u_2^2$. Отже, $\varphi(z) = z$.

(ii). Достатньо перевірити комутативність на породжуючих елементах. Маємо для d_1 і $\widehat{d_1}$ $\varphi(d_1(x_0)) = \varphi(0) = \widehat{d_1}(x_0) = \widehat{d_1}(\varphi(x_0))$,

$$\varphi(d_1(x_2)) = \varphi(2\,x_1) = 0 = \widehat{d_1}(u_2) = \widehat{d_1}(\varphi(x_2)),$$
$$\varphi(d_1(x_i)) = \varphi(i\,x_{i-1}) = i\,u_{i-1} = \widehat{d_1}(u_i) = \widehat{d_1}(\varphi(x_i)).$$

Аналогічно для d_2 і $\widehat{d_2}$

$$\varphi(d_2(x_0)) = \varphi(n\,x_1) = 0 = \widehat{d_2}(x_0) = \widehat{d_2}(\varphi(x_0)),$$
$$\varphi(d_2(x_i)) = \varphi((n-i)\,x_{i+1}) = (n-i)\,u_{i+1} = \widehat{d_2}(u_i) = \widehat{d_2}(\varphi(x_i)).$$

□

Доведення теореми. Нагадаємо, що вагою $\omega(z)$ однорідного ізобарного інваріанта $z \in \mathcal{I}_n$ називається така цілочисельна функція, яка на мономах $t^{\alpha_0}\,x_1^{\alpha_1}\,\cdots x_n^{\alpha_n}$ приймає значення $\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \cdots + n\,\alpha_n$, і це значення однакове для всіх мономів. З пункту (i) попередньої леми випливає, що на многочленах з $u \in I_n \cap \mathbb{C}[X]$ вага та u-вага співпадають. Добре відомо ([11], с.38), що для довільного ізобарного многочлена u із того, що $d_1(u) = 0$, а також із рівності $n\deg(u) = \omega(u)$ слідує $d_2(u) = 0$. Отже, кожен многочлен із $I_n \cap \mathbb{C}[X]$ буде інваріантом SL_2, тобто належить алгебрі $\mathcal{I}_n$. □

4. Нижче наведено диференціальні рівняння інваріантів бінарних форм для малих n, мінімальні системи породжуючих та сизигії. Всі обчислення проводилися в Maple.

$\mathbf{n=3}$. Диференціальне рівняння

$$-3t^2\alpha\frac{\partial}{\partial t}u + (t\alpha^2{-}2u_2)\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}u\Big) + (u_3t{+}u_2t\alpha)\Big(\frac{\partial}{\partial u_2}u\Big){+}(3u_3t{-}6{u_2}^2)\Big(\frac{\partial}{\partial u_3}u\Big) = 0,$$
$$\mathcal{I}_3 = \mathbb{C}[f_3],\, f_3{:=}4tu_2^3 + t^2u_3^2.$$

$\mathbf{n=4}$. Диференціальне рівняння

$$-4t^2\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial t}u\Big) + (t\alpha^2 - 3u_2)\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}u\Big) + 2u_3t\Big(\frac{\partial}{\partial u_2}u\Big) + (tu_4 + 2\alpha tu_3 - 9{u_2}^2)\Big(\frac{\partial}{\partial u_3}u\Big) +$$
$$+(4u_4t\alpha - 12u_2u_3)\Big(\frac{\partial}{\partial u_4}u\Big) = 0,$$
$$\mathcal{I}_4 = \mathbb{C}[f_2, f_3],\ f_2{:=}tu_4 + 3{u_2}^2, f_3{:=}{u_2}^3 - tu_2u_4 + t{u_3}^2.$$

$\mathbf{n=5}$. Диференціальне рівняння

$$-5t^2\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial t}u\Big) + (t\alpha^2 - 4u_2)\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}u\Big) + (3u_3t - u_2t\alpha)\Big(\frac{\partial}{\partial u_2}u\Big) + (2tu_4 + \alpha tu_3 - 12{u_2}^2)\times$$
$$\times\Big(\frac{\partial}{\partial u_3}u\Big) + (u_5t + 3u_4t\alpha - 16u_2u_3)\Big(\frac{\partial}{\partial u_4}u\Big) + (5u_5t\alpha - 20u_2u_4)\Big(\frac{\partial}{\partial u_5}u\Big) = 0,$$
$$\mathcal{I}_5 = \mathbb{C}[f_4, f_8, f_{12}, f_{18}].$$

Породжуючі елементи f_i, $\deg(f_i) = i$ зв'язані одним співвідношенням

$$1296f_{18}^2 = -48{f_{12}}^3 + {f_4}^5{f_8}^2 - 6{f_4}^3{f_8}^3 + 9f_4{f_8}^4 - 2{f_4}^4f_8f_{12} - 18{f_4}^2{f_8}^2f_{12} + \\ + 72{f_8}^3f_{12} + {f_4}^3{f_{12}}^2 + 72f_4f_8{f_{12}}^2.$$

$\mathbf{n = 6}$. Диференціальне рівняння

$$(4u_3t - 2u_2t\alpha)\frac{\partial}{\partial u_2}u + (3u_4t - 15{u_2}^2)\frac{\partial}{\partial u_3}u + (2u_5t + 2u_4t\alpha - 20u_2u_3)\frac{\partial}{\partial u_4}u - \\ -6t^2\alpha\frac{\partial}{\partial t}u + (u_6t + 4u_5t\alpha - 25u_2u_4)\frac{\partial}{\partial u_5}u + (6u_6t\alpha - 30u_2u_5)\frac{\partial}{\partial u_6}u = 0,$$

$$\mathcal{I}_6 = \mathbb{C}[f_2, f_4, f_6, f_{10}, f_{15}],$$

для деяких многочленів f_i.

Явні вирази для многочленів з мінімальної системи інваріантів є дуже громіздкими і у випадку $n < 9$ повністю в наведені в роботі [16], а у випадку $n = 9, 10$ в недавніх роботах [9], [10].

Автор вдячний І. В. Аржанцеву за корисні обговорення результатів статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Glenn O. E. Treatise on theory of invariants. – Boston, 1915.
2. Винберг Э.Б., Попов В.Л. Теория инвариантов, Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления. – Т.55, М.: ВИНИТИ, 1989.
3. Dixmier, J. *Quelques aspects de la théorie des invariants*// Gaz. Math., Soc. Math. Fr. – 1990. – V.43. – P. 39–64.
4. Gordan P. Invariantentheorie. – Teubner, Leipzig, 1885-87; reprinted by Chelsea Publ. Co., 1987.
5. Faá de Bruno. Théorie des formes binaires. – Turin, Librairie Brero Succ. de P. Marietti, 1876.
6. Bedratyuk L. *On complete system of invariants for the binary form of degree 7*// Journal of Symbolic Computation. – 2007.– V.42, №10. – P. 935–947.
7. von Gall F. *Das vollständige Formensystem der binären Form achter Ordnung*// Mathematische Annalen. – 1880. – V.17.– P.31–51, P. 139–152.
8. Shioda T. *On the graded ring of invariants of binary octavicts*// Amer. J. Math. – 1967. – V.89. – P. 1022–1046.
9. Brouwer, A. E., Popoviciu, M. *The invariants of the binary nonic* // J. Symb. Comput. – 2010. – V.45, №6. – P.709–720.
10. Brouwer, A. E., Popoviciu, M. *The invariants of the binary decimic* // J. Symb. Comput. – 2010. – V.45, №8. – P.837–843.
11. Hilbert D. Theory of algebraic invariants. Lectures. Cambridge Mathematical Library. – Cambridge, 1993.
12. Nowicki A. Polynomial derivation and their Ring of Constants. – UMK:Torun, 1994.
13. Бедратюк Л.П. *Елементи Казиміра диференціювань кільця многочленів*// Мат. Студ. – 2007. – V.27. – P. 115–119.
14. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. – М.: Наука, 1966.
15. Риордан Д. Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982.
16. Bedratyuk L. *A complete minimal system of covariants for the binary form of degree 7*// J. Symb. Comput. – 2009. – V.44, №.2, – P. 211–220.

Хмельницький національний університет
leonid.uk@gmail.com

Надійшло 21.04.2010