УДК 512.54

М. В. Заводя, В. С. Сікора, В. І. Сущанський

# ДВОХЕЛЕМЕНТНІ СИСТЕМИ ТВІРНИХ МЕТАЗНАКОЗМІННИХ ГРУП СКІНЧЕННОГО РАНГУ

M. V. Zavodya, V. S. Sikora, V. I. Sushchansky. *Two-element generatorsets of metaalterneting groups of finite rang*, Mat. Stud. **34** (2010), 3–12.

We construct concrete 2-element geterator sets of wreath products $A_{k_1} \wr A_{k_2} \wr ... \wr A_{k_n}$ of alternating groups $A_{k_1}$, $A_{k_2}$,..., $A_{k_n}$, where $k_i > 6$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Н. В. Заводя, В. С. Сикора, В. И. Сущанский. *Двухэлементные системы образующих метазнакопеременных групп конечного ранга* // Мат. Студії. – 2010. – Т.34, №1. – С.3–12.

Построены двухэлементные системы образующих метазнакопеременной группы $A_{k_1} \wr A_{k_2} \wr ... \wr A_{k_n}$ конечного ранга $n$ при условии, что $k_i > 6$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

**1. Вступ.** Системи твірних метазнакозмінних груп скінченного рангу, тобто скінченно ітерованих вінцевих добутків знакозмінних груп, вивчалися авторами в роботі [1]. Було встановлено, що кратний вінцевий добуток знакозмінних груп $A_{k_1} \wr A_{k_2} \wr ... \wr A_{k_s}$ — метазнакозмінна група рангу $s$ та метастепеня $(k_1, k_2, ..., k_s)$, де $s \geq 2$, $k_i \geq 7$ $(1 \leq i \leq s)$ — при довільному $r$ $(4 \leq r \leq s)$ має незвідні системи твірних, які складаються з $r$ елементів. Це твердження було використане в [2] при побудові топологічних $r$-елементних систем твірних $(4 \leq r < \infty)$ в метазнакозмінних групах нескінченного рангу. Природно виникає питання, чи не можна зменшити кількість елементів у незвідних системах твірних для таких груп. Насправді, ще раніше (див. [3]), неконструктивними методами було встановлено, що метазнакозмінні групи нескінченного (а, отже, й довільного скінченного) рангу та метастепеня $(k_1, k_2, ...)$ при $k_i \geq 5$ $(i = 1, 2, ...)$ мають 2-елементні топологічні системи твірних. А тому представляє інтерес опис явних конструкцій таких систем.

У роботі [2] нами було обґрунтовано алгоритм переходу від метасиметричних груп скінченного рангу до метасиметричних груп нескінченного рангу при побудові різних систем твірних. Згідно з цим алгоритмом, досить вміти будувати двохелементні системи твірних у метазнакозмінних групах скінченного рангу. У цій статті ми пропонуємо такі конструкції.

Дана робота є продовженням [1, 2]. Тут ми використовуємо означення та теореми, доведені в [1, 2], та введену там систему позначень. Всі інші позначення є загальноприйнятими (див., наприклад, [5]).

**2. Допоміжні факти.** Нагадаємо (див. [1]), що *метазнакозмінною групою метастепеня* $\overline{k} = (k_1, k_2, ..., k_n)$, $k_i \geq 3$ $(i = 1, 2, ..., n)$, називається вінцевий добуток $A(\overline{k}) =$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 05C25.

$A_{k_1} \wr A_{k_2} \wr ... \wr A_{k_n}$ знакозмінних груп підстановок $A_{k_1}$, $A_{k_2}$, ..., $A_{k_n}$ степенів $k_1, k_2, ..., k_n$ відповідно. Число $n$ називається *рангом* метазнакозмінної групи $A(\overline{k})$.

Метазнакозмінна група $A(\overline{k})$ природним чином діє на прямому добутку множин $\{1, 2, ..., k_1\}$, $\{1, 2, ..., k_2\}$, ..., $\{1, 2, ..., k_n\}$, тобто є групою підстановок степеня $k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n$. Ця дія є транзитивною але імпримітивною, причому всі розбиття на області імпримітивності описуються наступним чином.

При довільному $i$ $(1 \leq i \leq n)$ визначимо відношення еквівалентності $\sim_i$ на множині $M = \{1, 2, ..., k_1\} \times \{1, 2, ..., k_2\} \times ... \times \{1, 2, ..., k_n\}$, поклавши для довільних $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$:

$$\overline{x} \sim_i \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1, \ x_2 = y_2, \ ..., \ x_i = y_i.$$

Класи еквівалентності $\sim_i$ утворюють розбиття $\Theta_i$ множини $M$, яке складається з $k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_i$ елементів. Відношення еквівалентності $\sim_n$ є відношенням рівності елементів множини $M$.

**Лема 1.** *Метазнакозмінна група $A(\overline{k})$ має $(n-1)$ нетривіальну систему імпримітивності. Кожна нетривіальна система імпримітивності групи $A(\overline{k})$ на множині $M$ збігається з одним із розбиттів $\Theta_i$ для $i = 1, 2, ..., n-1$.*

*Доведення.* Досить переконатися, що стабілізатор точки $\overline{x}_0 \in M$ у групі $A(\overline{k})$ має $(n-1)$ різних надгруп.

Дійсно, стабілізатор точки $\overline{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, ..., x_{0,n})$ складається з найможливіших таблиць вигляду

$$[g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), ..., g_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1})], \tag{1}$$

де $g_i(\overline{x}_{i-1}) = g_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1})$ — така функція з множини $\{1, 2, ..., k_1\} \times \{1, 2, ..., k_2\} \times ... \times \{1, 2, ..., k_{i-1}\}$ в групу $A_{k_i}$, для якої мають місце рівності

$$x_{0,i}^{g_i(x_{0,1}, x_{0,2}, ..., x_{0,i-1})} = x_{0,i} \tag{2}$$

$(i = 1, 2, ..., n)$.

Надгрупи стабілізатора складаються з таблиць вигляду (1), координати яких задовольняють рівність (2) лише до певного місця (від початку таблиці), а далі можуть бути довільними. Таких надгруп маємо рівно $n-1$, що й треба було довести. $\square$

З леми 1 випливає, що всі системи імпримітивності групи $A(\overline{k})$ на множині $M$ утворюють, відносно включення, ланцюг довжини $n+1$ (враховуючи два тривіальні розбиття на області імпримітивності).

Конструкція таблиць, які утворюють двохелементну систему твірних групи $A(\overline{k})$ опирається на побудовані нами в [1] чотирьохелементні системи твірних цієї групи. Нагадаємо коротко як будуються такі системи.

Як відомо (див., наприклад, [6]), знакозмінна група $A_n$ степеня $n \geq 4$, яка діє на множині $\{1, 2, ..., n\}$, породжується парою підстановок вигляду

1. $a = (1, 2, ..., n)$, $b = (1, 2, 3)$, якщо $n$ — непарне число;
2. $a = (1, 2, ..., n-1)$, $b = (2, 3, ..., n)$, якщо $n$ — парне число.

Знакозмінна група $A_3$ є циклічною і породжується циклом $(1,2,3)$.

Нехай тепер $\overline{k} = (k_1, k_2, ..., k_n)$ — довільний вектор над множиною $\mathbb{N} \setminus \{1,2,3\}$, $A(\overline{k})$ — метазнакозмінна група метастепеня $\overline{k}$. Символами $a_i$, $b_i$ позначимо твірні вигляду 1) або 2) в знакозмінній групі $A_{k_i}$ (залежно від парності чи непарності чисел $k_i$), $i = 1, 2, ..., n$. Далі розглядатимемо лише такі вектори $\overline{k}$, найменша координата $\eta(\overline{k})$ яких не менша семи (тобто $\eta(\overline{k}) \geq 7$).

Визначимо тепер таблиці $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$ із $A(\overline{k})$ рівностями

(i) $u_1 = [a_1, e, e, ..., e]$; (ii) $u_2 = [b_1, e, e, ..., e]$;

(iii) $v_1 = [e, g_2(x_1), e, ..., e]$; (iv) $v_2 = [e, h_2(x_1), e, ..., e]$,

де символом $e$ позначено як тотожну підстановку, так і функцію від $k$ змінних ($1 \leq k \leq n-1$), всі значення якої є тотожною підстановкою; а функції $g_2(x_1)$ та $h_2(x_1)$ набувають лише одне нетривіальне значення в точці $x_1 = 1$, яке, відповідно, дорівнює $a_2$ та $b_2$.

**Лема 2.** ([1]) *Таблиці $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$ породжують підгрупу метазнакозмінної групи $A(\overline{k})$, яка ізоморфна вінцевому добутку $A_{k_1} \wr A_{k_2}$.*

Побудуємо окремо наступну спеціальну таблицю

$$u = [c_1, e, c_3(\overline{x}_2), ..., c_n(\overline{x}_{n-1})], \tag{2}$$

координати якої визначено рівностями:

$$c_1 = a_1, \tag{4}$$

$$c_i(\overline{x}_{i-1}) = \begin{cases} a_i, & \text{якщо } \overline{x}_{i-1} = (5,4,...,4,1); \\ b_i, & \text{якщо } \overline{x}_{i-1} = (5,4,...,4,2); \\ e, & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{5}$$

для $i = 2, 3, ..., n$.

**Теорема 1.** ([1]) *Нехай $n \geq 3$ — фіксоване натуральне число. Для довільного вектора $\overline{k} = (k_1, k_2, ..., k_n)$ над множиною $\mathbb{N}$ такого, що $\eta(\overline{k}) \geq 7$, метазнакозмінна група $A(\overline{k})$ породжується таблицями $u$, $u_2$, $v_1$, $v_2$.*

Легко будуються різні модифікації описаної в теоремі 1 системи твірних. Наведемо тут деякі нові чотирьохелементні системи твірних групи $A(\overline{k})$. Для цього визначимо елемент $\overline{u}$ за допомогою рівності (3) так, що всі його координати, окрім третьої, визначаються рівностями (4) та (5), а третю координату $c_3(\overline{x}_3)$ задамо рівністю

$$c_3(\overline{x}_3) = \begin{cases} a_3, & \text{якщо } \overline{x}_2 = (4,1); \\ b_3, & \text{якщо } \overline{x}_2 = (4,2); \\ e, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

**Лема 3.** *За умов теореми 1, множина таблиць $\overline{u}$, $u_2$, $v_1$, $v_2$ є системою твірних метазнакозмінної групи $A(\overline{k})$.*

Для доведення досить пересвідчитись, що таблицю $u$ можна записати у вигляді добутку таблиць $\overline{u}$, $u_2$, $v_1$, $v_2$. Ми опускаємо технічні деталі.

Змінювати можна й інші таблиці в системі твірних, котра описана в теоремі 1. Символом $v_1^{(s)}$ позначимо таблицю $v_1^{(s)} = [e, g_2^{(s)}(x_1), e, e, ..., e]$, де $s \in \{1, 2, 3, k_1\}$, а функція $g_2^{(s)}(x_1)$ визначається рівністю

$$g_2^{(s)}(x_1) = \begin{cases} a_2, & \text{якщо } x_1 = s; \\ e & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Аналогічно визначається таблиця $v_2^{(s)} = [e, h_2^{(s)}(x_1), e, e, ..., e]$ для $s \in \{1, 2, 3, 4, k_1\}$, де

$$h_2^{(s)}(x_1) = \begin{cases} b_2, & \text{якщо } x_1 = s; \\ e & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Крім того, символом $\overline{u}_2$ позначимо таблицю вигляду $[d, e, e, ..., e]$, де $d \in \{b_1;\ a_1 b_1^{-1};\ a_1^{-1} b_1\}$.

**Лема 4.** *За умов теореми 1, метазнакозмінна група $A(\overline{k})$ породжується таблицями $\overline{u}$, $\overline{u}_2$, $v_1$, $v_2^{(s)}$ при довільному $s \in \{1, 2, 3, 4, k_1\}$ та довільному виборі підстановки $d$, що визначає таблицю $\overline{u}_2$.*

*Доведення.* Досить переконатися, що кожна з таблиць $u_2$, $v_2$ може бути записана у вигляді добутку таблиць $\overline{u}$, $\overline{u}_2$, $v_1$, $v_2^{(s)}$. Обмеження $\overline{u}_1$ таблиці $u$ на першу координату дає змогу побудувати другий твірний елемент знакозмінної групи $A_{k_1}$. А тому обмеження таблиць $\overline{u}$, $\overline{u}_2$, $v_1$, $v_2^{(s)}$ на перші дві координати є системою твірних вінцевого добутку $A_{k_1} \wr A_{k_2}$. Враховуючи це, легко отримуються вирази для елементів $u_2$, $v_2$, що й закінчує доведення. □

Далі у роботі будемо використовувати також конкретні обчислення з твірними знакозмінної групи $A_n$, які було визначено вище. Зокрема, правильними є наступні леми 5 та 6, доведення яких отримується безпосередньою перевіркою, котру ми опускаємо.

**Лема 5.** *Нехай число $n \in \mathbb{N}$ є непарним, підстановки $a = (1, 2, ..., n)$, $b = (1, 2, 3) \in A_n$. Тоді мають місце рівності:*

*(i)* $a^{-1}ba = (2, 3, 4)$;
*(ii)* $a^{-1}bab = (1, 2)(3, 4)$;
*(iii)* $a^{-1}b = (1, n, n-1, ..., 5, 4)$;
*(iv)* $b^{-1}a = (1, 4, 5, ..., n-1, n)$;
*(v)* $b^{-1}ab = (1, 4, 5, ..., n-1, n, 2, 3)$;
*(vi)* $b^{-1}aba^{-1} = (1, 3, n)$;
*(vii)* $b^{-1}aba^{-1}b^{-1} = (1, 2)(3, n)$.

**Лема 6.** *Нехай число $n \in \mathbb{N}$ є парним, підстановки $a = (1, 2, ..., n-1)$, $b = (2, 3, ..., n) \in A_n$. Тоді мають місце рівності:*

*(i)* $ab^{-1} = (1, n, n-1)$;
*(ii)* $a^2b^{-1} = (1, 2, ..., n-2)(n, n-1)$;
*(iii)* $a^2b^{-1}a^{-1} = (n-2, n-1, n)$;
*(iv)* $b^{-1}a = (1, 2, n)$;
*(v)* $a^{-1}b = (1, n, 2)$;
*(vi)* $b^{-1}a^3b^{-1}a^{-1} = (1, 2, n-2, n-1, n)$;
*(vii)* $ab = (1, 3, 5, ..., n-3, n-1)(2, 4, 6, ..., n-2, n)$.

**3. Основна теорема.** Наведемо тепер конструкцію двохелементної системи твірних групи $A(\overline{k})$.

**Теорема 2.** *Нехай $n \geq 3$ — фіксоване натуральне число. Для довільного вектора $\overline{k} = (k_1, k_2, ..., k_n)$, такого, що $\eta(\overline{k}) \geq 7$, існує таблиця $w = [h_1, h_2(x_1), e, ..., e] \in A(\overline{k})$ така, що пара $\overline{u}$, $w$ є системою твірних групи $A(\overline{k})$.*

*Доведення.* Конструкція таблиці $w$ залежить від парності чисел $k_1$, $k_2$ та від остачі при діленні числа $k_2$ на 3. А тому розглядаємо наступні чотири випадки.

***1)*** Числа $k_1$ та $k_2$ є непарними. Покладемо $h_1 = b_1$, а функцію $h_2(x_1)$ визначимо залежно від подільності на 3 наступним чином:

***1а)*** якщо $3 \nmid k_2$, то покладемо $h_2(x_1) = \begin{cases} b_2 & \text{при } x_1 = 3, \\ a_2 & \text{при } x_1 = k_1, \\ e & \text{в інших випадках;} \end{cases}$

***1б)*** якщо $3 \mid k_2$, то вважаємо $h_2(x_1) = \begin{cases} a_2 & \text{при } x_1 = 3, \\ b_2 & \text{при } x_1 = 4, \\ e & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

Оскільки числа $k_1$ та $k_2$ непарні, то вибираємо $b_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (1,\ 2, ..., k_2)$, $b_2 = (1, 2, 3)$. А тому в цьому випадку

$$w^3 = [e, \beta(x_1), e, ..., e],$$

де функція $\beta(x_1)$ набуває неодиничне значення $a_2^3$ тільки в одній точці — при $x_1 = k_1$.

Розглянемо спочатку підвипадок ***1а)***. За визначенням функції $h_2(x)$ друга координата таблиці $v_1 = (w^3)^{k_2+1}$ (при $k_2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$) або $v_1 = \left((w^3)^{k_2-1}\right)^{-1}$ (при $k_2 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\, 3)$) є функцією, яка набуває неодиничного значення $a_2$ лише в точці $x_1 = k_1$. Отже, має місце рівність

$$v_1^{(k_1)} = \begin{cases} (w^3)^{k_2+1} & \text{при} \quad k_2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3), \\ \left((w^3)^{k_2-1}\right)^{-1} & \text{при} \quad k_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3). \end{cases}$$

Крім того, безпосередньо перевіряється, що

$$(\overline{u})^{-4}\, v_1^{(k_1)}\, (\overline{u})^4 = v_1^{(3)}.$$

Послідовно обчислюючи таблиці $w \cdot \left(v_1^{(k_1)}\right)^{-1} = v_2$, $\left(v_1^{(3)}\right)^{-1} \cdot v_2 \cdot v_1^{(3)} = v_3$ та $v_3 \cdot v_2 = v_4$, дістаємо таблицю, квадрат якої визначається рівністю

$$v_4^2 = [b_1, e, e, ..., e].$$

При цьому треба враховувати, що, згідно з лемою 5 (умови (i) та (ii)), $a_2^{-1} b_2 a_2$ — підстановка третього порядку, а $a_2^{-1} b_2 a_2 b_2$ — підстановка другого порядку. Тепер досить розглянути добуток $v_4^{-2} {\cdot} v_2$ й таким чином дістаємо систему твірних $A(\overline{k})$, котра визначається лемою 4.

Отже, у розглянутому випадку кожен з чотирьох елементів системи твірних групи $A(\overline{k})$ виражається через таблиці $\overline{u}$, $w$, тобто ця множина сама є системою твірних групи $A(\overline{k})$.

Розглянемо тепер підвипадок ***1б)***. Покладемо $(\overline{u})^{-1} \cdot w^{-3} \cdot \overline{u} \cdot w = v_2$, $v_2^3 \cdot w^3 = v_3$. Якщо $k_2 = 3t$, $t \in \mathbb{N}$, то $v_4 = v_3^{t-1}$ має вигляд $v_4 = [e, \gamma(x_1), e, e, ..., e]$, де $\gamma(x_1)$ набуває неодиничного значення лише в одній точці $x_1 = 4$, причому це значення дорівнює

$(a_2^{-1}b_2)^3$. Таблиця $v_5 = v_4 \cdot w \cdot \big((\overline{u})^{-1} \cdot w^{-3} \cdot \overline{u}\big) \cdot w^{-1}$ має вигляд $v_5 = [e, \gamma_1(x_1), e, e, ..., e]$, де

$$\gamma(x_1) = \begin{cases} a_2^{-1} & \text{при } x_1 = 1, \\ a_2^{-1} & \text{при } x_1 = 2, \\ b_2^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} & \text{при } x_1 = 4, \\ e & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Оскільки підстановка $b_2^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$ має порядок 2 (див. лему 5, випадок $(vii)$), а порядок елемента $a_2^{-1}$ є непарним числом, то таблиця $v_5 = v_4^{1-k_2} \cdot v_4$ має вигляд $v_5 = [e, \gamma_2(x_1), e, e, ..., e]$, де $\gamma_2(x_1)$ набуває неодиничного значення $a_2$ лише при $x_1 = 3$. А тому таблиця $v_6 = \big((\overline{u})^{-1} \cdot v_5 \cdot u\big) \cdot v_4$ має вигляд $v_6 = [e, \gamma_3(x_1), e, e, ..., e]$, де $\gamma_3(x_1)$ набуває неодиничного значення $b_2$ лише при $x_1 = 3$. Оскільки $v_5 = v_1^{(3)}$ та $v_6 = v_2^{(3)}$, то таблиці $v_5$, $v_6$, $\overline{u}$ та $v_5^{-1} \cdot v_6^{-1} \cdot u$ є системою твірних групи $A(\overline{k})$, тобто підвипадок $3 \mid k_2$ доведено.

***2)*** Розглянемо випадок, коли обидва числа $k_1$ та $k_2$ є парними. Покажемо, що тоді $h_1 = a_1b_1^{-1}$, а функція $h_2(x_1)$ визначається залежно від подільності числа $k_2 - 1$ на 3 наступним чином:

***2а)*** якщо $3 \nmid (k_2 - 1)$, то $h_2(x_1) = \begin{cases} b_2 & \text{при } x_1 = 2, \\ a_2b_2^{-1} & \text{при } x_1 = 3, \\ e & \text{в інших випадках;} \end{cases}$

***2б)*** якщо $3 \mid (k_2 - 1)$, то $h_2(x_1) = \begin{cases} a_2 & \text{при } x_1 = 1, 2, \\ a_2b_2 & \text{при } x_1 = 3, \\ e & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

При цьому нагадаємо, що оскільки $k_1$ та $k_2$ парні, то $a_i = (1, 2, ..., k_i - 1)$, $b_i = (2, 3, ..., k_i)$, $i = 1, 2$.

Розглянемо підвипадок ***2а)***. Згідно з лемою 6, випадок $(i)$, маємо, що $a_ib_i^{-1} = (1, k_i, k_i^{-1})$, тобто підстановка $a_ib_i^{-1}$ має порядок 3. Оскільки $k_2 - 1 \equiv -1 (\operatorname{mod} 3)$, то

$$w^{k_2} = [e, \beta(x_1), e, ..., e],$$

де функція $\beta(x_1)$ набуває неодиничне значення $b_2$ лише в одній точці $x_1 = 2$. Якщо ж $k_2 - 1 \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$, то має місце рівність

$$\big(w^{k_2-2}\big)^{-1} = [e, \beta(x_1), e, ..., e].$$

Покладемо $v = [e, \beta(x_1), e, ..., e]$, $(\overline{u})^{-1} \cdot v \cdot u = v_1$ та $w \cdot v_1 \cdot v = v_2$. Тоді при $k_2 - 1 \equiv -1 (\operatorname{mod} 3)$ маємо

$$v_2^{k_2} = [e, \gamma(x_1), e, ..., e],$$

де $\gamma(x_1)$ набуває неодиничне значення $a_2$ при $x_1 = 3$, а в усіх інших точках її значення дорівнює $e$. При $k_2 - 1 \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$ справджується рівність

$$\big(v_2^{k_2-2}\big)^{-1} = [e, \gamma(x_1), e, ..., e].$$

Поклавши $[e, \gamma(x_1), e, ..., e] = v_3$, далі дістаємо

$$v^{-1} \cdot v_1 \cdot v_3 \cdot w = [a_1b_1^{-1}, e, ..., e]$$

і таким чином отримуємо систему твірних групи $A(\overline{k})$ при $3 \nmid (k_2 - 1)$.

Розглянемо підвипадок ***2б)***. Маємо

$$w^3 = [e, \beta(x_1), e, ..., e],$$

де

$$\beta(x_1) = \begin{cases} a_2^2 & \text{при } x_1 = 1, 2, k_1, \\ (a_2 b_2)^3 & \text{при } x_1 = 3, \\ e & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Оскільки елементи $a_2 b_2$ та $a_2$ мають, відповідно, порядки $\dfrac{k_2}{2}$ та $k_2 - 1$, то

$$(w^3)^{k_2/2} = [e, \lambda(x_1), e, ..., e],$$

де $\lambda(1) = \lambda(2) = \lambda(k_1) = a_2$, $\lambda(x_1) = e$ при $x_1 \neq 1, 2, k_1$. Покладемо $k_2 - 1 = 3t$, $t \in \mathbb{N}$. Враховуючи, що порядок підстановки $a_2 b_2$ дорівнює 3, дістаємо

$$w^{k_2 - 3} = [e, \mu(x_1), e, ..., e],$$

де $\mu(x_1)$ набуває лише одне неодиничне значення $a_2 b_2$ в точці $x_1 = 3$. Крім того, спряжені $\left((\overline{u})^{-1} \cdot w^{3k_2/2} \cdot \overline{u}\right)$ та $\left((\overline{u})^{-2} \cdot w^{3k_2/2} \cdot (\overline{u})^2\right)$ є таблицями вигляду $v_1 = [e, \mu_1(x_1), e, ..., e]$ та $v_2 = [e, \mu_2(x_1), e, ..., e]$, відповідно, де $\mu_1(2) = \mu_1(3) = a_2$, $\mu_2(3) = \mu_2(4) = a_2$, а всі інші значення цих функцій — одиничні.

Обчислюючи далі, дістаємо, що функції $\mu_3(x_1)$, $\mu_4(x_1)$, $\mu_5(x_1)$ — другі координати таблиць

$$v_3 = w^{3k_2/2} \cdot v_1^{-1}, \quad v_4 = w^{4 - k_2}, \quad v_5 = v_4 \cdot v_2^{-1} = [a_1^{-1} b_1, \mu_5(x_1), e, ..., e]$$

мають лише такі неодиничні значення:

$$\mu_3(1) = (\mu_3(3))^{-1} = a_2, \quad \mu_4(1) = \mu_4(2) = a_2, \quad \mu_5(2) = (\mu_5(3))^{-1} = (\mu_5(4))^{-1} = a_2.$$

Враховуючи це, дістаємо

$$v_6 = v_5 \cdot (\overline{u})^{-1} \cdot v_3 \cdot \overline{u} \cdot w^{k_2 - 3} = [a_1^{-1} b_1, \gamma(x_1), e, ..., e],$$

де $\gamma(x_1)$ набуває єдиного неодиничного значення $b_2$ в точці $x_1 = 3$. Обчислюємо послідовно таблиці

$$v_7 = v_6^{-1} \cdot v_5^{-3} \cdot v_6^{-1} \cdot v_5; \quad v_8 = v_7 \cdot v_3^2;$$
$$v_9 = (\overline{u})^2 \cdot w^{k_2 - 2} \cdot (\overline{u})^{-2}; \quad v_{10} = v_9^{-1} v_8,$$

де другі координати цих таблиць набувають лише таких неодиничних значень:

$$\mu_7(3) = \mu_8(3) = \mu_{10}(3) = b_2^{-1} a_2^3 b_2^{-1} a_2^{-1} = (1, 2, k_2 - 2, k_2 - 1, k_2);$$
$$\mu_8(1) = a_2^2; \quad \mu_9(1) = a_2 b_2; \quad \mu_{10}(1) = b_2^{-1} a_2.$$

Враховуючи, що порядки підстановок $b_2^{-1} a_2^3 b_2^{-1} a_2^{-1}$ та $b_2^{-1} a_2$ рівні 5 та 3 відповідно (див. лему 6, випадки $(vi)$, $(iv)$), будуємо далі таблиці

$$v_{11} = v_9 \cdot v_{10}^{-5}; \quad v_{12} = v_{11}^{k_2/2}; \quad v_{13} = v_{12}^{-1} \cdot v_9,$$

де їх другі координати набувають, відповідно, таких значень: $\mu_{11}(1) = a_2^2$, $\mu_{12}(1) = a_2$, $\mu_{13}(1) = b_2$ та $\mu_{11}(x_1) = \mu_{12}(x_1) = \mu_{13}(x_1) = e$ при $x_1 \neq 1$.

Побудувавши, нарешті, таблицю

$$v_{14} = v_6 \cdot \left((\overline{u})^{-2} \cdot v_{13}^{-1} \cdot (\overline{u})^2\right) = [a_1^{-1}b_1, e, ..., e]$$

отримуємо, що елементи $v_{12}$, $v_{13}$, $\overline{u}$, $v_{14}$ є системою твірних групи $A(\overline{k})$ при $3 \mid (k_2 - 1)$. Цим випадок 2) доведено повністю.

***3)*** Нехай тепер $k_1$ — непарне, а $k_2$ — парне натуральні числа. У таблиці $w = [h_1, h_2(x_1), e, ..., e] \in A(\overline{k})$ визначимо $h_1 = b_1$, а значення функції $h_2(x_1)$ задамо в залежності від подільності числа $k_2 - 1$ на 3 наступним чином:

***3а)*** якщо $3 \nmid (k_2 - 1)$, то

$$h_2(x_1) = \begin{cases} a_2 & \text{при } x_1 = 4, \\ a_2^{-1}b_2 & \text{при } x_1 = k_1, \\ e & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

***3б)*** якщо $3 \mid (k_2 - 1)$, то

$$h_2(x_1) = \begin{cases} a_2 & \text{при } x_1 = 2, 3, \\ a_2b_2 & \text{при } x_1 = 4, \\ e & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Оскільки $k_1$ — непарне, а $k_2$ — парне, то $b_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (1, 2, ..., k_2 - 1)$, $b_2 = (2, 3, ..., k_2)$. Крім того, згідно з лемою 6, частина $(v)$, маємо, що $a_2^{-1}b_2 = (1, k_2, 2)$ — підстановка третього порядку.

У підвипадку ***3а)*** покладемо

$$v_1 = [e, \beta(x_1), e, ..., e] = \begin{cases} w^{k_2} & \text{при } k_2 - 1 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3); \\ \left(w^{k_2-2}\right)^{-1} & \text{при } k_2 - 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3), \end{cases}$$

де функція $\beta(x_1)$ набуває неодиничне значення $a_2$ лише в одній точці $x_1 = 4$.

Побудуємо тоді послідовно таблиці $v_2 = v_1^{-1} \cdot ((\overline{u})^4 \cdot v_1 \cdot (\overline{u})^{-4}) \cdot w$ та

$$v_3 = [e, \gamma(x_1), e, ..., e] = \begin{cases} v_2^{k_2} & \text{при } k_2 - 1 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3); \\ \left(v_2^{k_2-2}\right)^{-1} & \text{при } k_2 - 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3), \end{cases}$$

де функція $\gamma(x_1)$ набуває неодиничне значення $b_2$ лише в одній точці $x_1 = k_1$. Тоді таблиці $v_1$, $v_3$, $\overline{u}$ та $(v_3^{-1} \cdot v_2)$ є системою твірних групи $A(\overline{k})$ при непарному $k_1$ та такому парному $k_2$, що $3 \nmid (k_2 - 1)$. А це й доводить повністю теорему при вибраних $k_1$ та $k_2$.

Нехай має місце підвипадок ***3б)***. Враховуючи лему 6, частини $(vi)$ та $(vii)$, маємо, що $c_2 = b_2^{-1}a_2^3b_2^{-1}a_2^{-1}$ — підстановка п'ятого порядку, а $a_2b_2$ — підстановка порядку $\dfrac{k_2}{2}$.

Покладемо $(w^3)^{k_2/2} = [e, \mu_1(x_1), e, ..., e] = v_1$, причому функція $\mu_1(x_1)$ набуває неодиничного значення $a_2$ лише в точках $x_1 = 1, 2, 3$. Нехай $k_2 - 1 = 3t$, $t \in \mathbb{N}$. Тоді $(w^{3-3k_2})^{-t} = [e, \mu_2(x_1), e, ..., e] = v_2$, де $\mu_2(4) = a_2b_2$ та $\mu_2(x_1) = e$ для всіх $x_1 \neq 4$.

Далі послідовно будуємо таблиці $v_3 = (\overline{u})^{-1} \cdot v_1^{-1} \cdot \overline{u} \cdot w$, $v_4 = v_3 \cdot v_2^{-1}$, другі координати яких набувають лише по одному неодиничному значенню: $\mu_3(4) = b_2$, $\mu_4(4) = a_2^{-1}$. Тоді

$$v_5 = v_3^{-1} \cdot v_4^{-3} \cdot v_3^{-1} \cdot v_4^{-1} \cdot \left((\overline{u})^{-1} \cdot v_2 \cdot \overline{u}\right)^2 = [e, \mu_5(x_1), e, ..., e],$$
$$v_6 = v_5 \cdot (\overline{u})^2 \cdot \left(v_2 \cdot (\overline{u})^{-1}\right)^2 = [e, \mu_6(x_1), e, ..., e],$$
$$v_7 = (\overline{u} \cdot v_2)^2 \cdot (\overline{u})^{-2} \cdot v_6^5 = [e, \mu_7(x_1), e, ..., e],$$

де функції $\mu_5(x_1)$, $\mu_6(x_1)$, $\mu_7(x_1)$ набувають лише таких неодиничних значень:

$$\begin{array}{ll} \mu_5(2) = \mu_5(3) = a_2^{-2}, & \mu_5(4) = b_2^{-1}a_2^3b_2^{-1}a_2^{-1}, \\ \mu_6(2) = \mu_6(3) = a_2^{-1}b_2, & \mu_6(4) = c_2, \\ \mu_7(2) = \mu_7(3) = a_2^2. & \end{array}$$

Звідси одразу отримуємо таблиці $v_8 = v_1 \cdot v_7^{-k_2/2}$ та $v_9 = v_8^{-1} \cdot (\overline{u})^3 \cdot v_2 \cdot (\overline{u})^{-3}$, другі координати яких є функціями, що набувають лише одне неодиничне значення $a_2$ та $b_2$, відповідно, при $x_1 = 1$. Крім того, маємо, що

$$v_{10} = v_7^{-k_2/2} \cdot v_2 \cdot w = [b_1, e, ..., e].$$

Таким чином, показали, що через елементи $\overline{u}$, $w$ виражаються елементи $v_8$, $v_9$, $\overline{u}$, $v_{10}$, які утворюють систему твірних групи $A(\overline{k})$. А це й доводить повністю теорему при непарному $k_1$ та такому парному $k_2$, що $3 \mid (k_2 - 1)$.

***4)*** Розглянемо тепер випадок, коли $k_1$ — парне, $k_2$ — непарне натуральні числа. Таблицю $w = [h_1, h_2(x_1), e, ..., e] \in A(\overline{k})$ побудуємо наступним чином:

$$h_2(x_1) = \begin{cases} a_2 & \text{при } x_1 = 2, \\ b_2 & \text{при } x_1 = 3, \\ e & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

а значення $h_1$ визначимо залежно від подільності числа $k_2$ на 3 наступним чином:

***4а)*** якщо $3 \nmid k_2$, то $h_1 = a_1 b_1^{-1}$;

***4б)*** якщо $3 \mid k_2$, то $h_1 = a_1^{-1} b_1$,

де для заданих $k_1$, $k_2$ маємо що $a_1 = (1, 2, ..., k_1 - 1)$, $b_1 = (2, 3, ..., k)$, $a_2 = (1, 2, ..., k_2)$, $b_2 = (1, 2, 3)$, причому, враховуючи лему 6, випадки $(i)$ та $(v)$, $a_1 b_1^{-1} = (1, k_1, k_1 - 1)$ та $a_1^{-1} b_1 = (1, k_1, 2)$ — підстановки третього порядку.

При розгляді підвипадку ***4а)*** покладемо

$$v_1 = [e, \beta(x_1), e, ..., e] = \begin{cases} (w^3)^{k_2+1} & \text{при } k_2 \equiv -1 (\bmod 3); \\ (w^3)^{1-k_2} & \text{при } k_2 \equiv 1 (\bmod 3), \end{cases}$$

де функція $\beta(x_1)$ набуває єдиного неодиничного значення $a_2$ в точці $x_1 = 2$. Тоді друга координата спряженої таблиці $v_2 = (\overline{u})^{-1} \cdot v_1 \cdot \overline{u}$ має тільки одне неодиничне значення $a_2$ при $x_1 = 3$. Нарешті, нескладно переконатися, що

$$v_3 = \left(v_2^{-1} \cdot (w \cdot v_1^{-1}) \cdot v_2 \cdot (w \cdot v_1^{-1})\right)^2 = [a_1 b_1^{-1}, e, ..., e]$$

та друга координата таблиці $v_4 = v_3^{-1} \cdot w \cdot v_1^{-1}$ набуває неодиничного значення $b_2$ в точці $x_1 = 3$.

Отже, доведено, що через елементи $\overline{u}$, $w$ виражаються елементи $v_2$, $v_4$, $\overline{u}$, $v_3$, які утворюють систему твірних групи $A(\overline{k})$. А це й доводить теорему при парному $k_1$ та такому непарному $k_2$, що $3 \nmid k_2$.

Розглянемо нарешті підвипадок ***4б)***. Маємо

$$w^3 = [e, \beta(x_1), e, ..., e],$$

де $\beta(1) = \beta(2) = \beta(k_1) = a_2$ та $\beta(x_1) = e$, якщо $x_1 \neq 1, 2, k_1$.

Покладемо тепер

$$(\overline{u})^{-1} \cdot (w^3)^{-1} \cdot \overline{u} \cdot w = [a_1^{-1}b_1, \beta_1(x_1), e, ..., e] = v_1,$$
$$(v_1^3 \cdot w^3)^{-1+k_2/3} = [e, \beta_2(x_1), e, ..., e] = v_2,$$

де функції $\beta_1(x_1)$ та $\beta_2(x_1)$ набувають лише таких неодиничних значень:

$$\beta_1(3) = a_2^{-1}b_2; \quad \beta_1(k_1) = a_2^{-1}; \quad \beta_2(3) = b_2^{-1}a_2.$$

Обчислюючи тепер послідовно таблиці $v_3 = v_2 \cdot w \cdot ((\overline{u})^{-1} \cdot (w^3)^{-1} \cdot \overline{u})$, $v_4 = v_4 \cdot w^{-1}$, $v_5 = v_2^{-1} \cdot v_4^{k_2}$ та $v_6 = v_2 \cdot ((\overline{u})^{-1} \cdot (w^3)^{-1} \cdot \overline{u})$, побудуємо таблицю

$$v_7 = \left(\left((\overline{u})^{-1} \cdot w^3 \cdot \overline{u}\right) \cdot v_6\right)^{-1} = [e, \gamma(x_1), e, ..., e],$$

де функція $\gamma(x_1)$ набуває неодиничне значення $b_2$ лише в точці $x_1 = 3$. Тоді

$$v_8 = v_7 \cdot v_2 = [e, \lambda(x_1), e, ..., e],$$
$$v_9 = (\overline{u} \cdot v_8^{-1} \cdot (\overline{u})^{-1}) \cdot v_7^{-1} \cdot w = [a_1^{-1}b_1, e, ..., e],$$

де функція $\lambda(x_1)$ набуває неодиничне значення $a_2$ лише в точці $x_1 = 3$.

Таким чином, доведено, що через елементи $\overline{u}$, $w$ виражаються елементи $v_7$, $v_8$, $\overline{u}$, $v_9$, які утворюють систему твірних групи $A(\overline{k})$. А це й доводить теорему при парному $k_1$ та такому непарному $k_2$, що $3 \mid k_2$.

Теорему доведено повністю. □

## ЛІТЕРАТУРА


1. Заводя М.В., Сікора В.С., Сущанський В.І. *Системи твірних метазнакозмінних груп скінченного рангу*// Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. Чернівці. Рута – 2006. – V.314–315. – С. 64–72.
2. Олійник Б.В., Сущанський В.І., Сікора В.С. *Метасиметричні та метазнакозмінні групи нескінченного рангу*// Мат. Студ. – 2008. – Т.29, №2.— С. 139–150.
3. Bhattacharjee M. *The probability of generating certain profinite groups by two elements*// Israel Journal of Mathematics. – 1994. – V.86. – P. 311–329.
4. Сикора В.С., Сущанский В.И. *Системы порождающих групп автоматных подстановок*// Кибернетика и системный анализ. – 2000. – №3. – С. 121–133.
5. Сущанський В.І., Сікора В.С. Операції на групах підстановок. Теорія та застосування. – Чернівці, Рута – 2003. – 255 с.



Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
Сілезький технічний університет, Глівіце, Польща


*Надійшло 14.12.2009*