УДК 512.538

Р. А. Заторський, О. Р. Малярчук

ЗВЕДЕННЯ ПАРАДЕТЕРМІНАНТІВ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ ДО k-ДІАГОНАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

R. A. Zatorsky, A. R. Malarchuk. *Reduction of Paradeterminants of a triangular matrix to k-diagonal kind*, Mat. Stud. **34** (2010), 20–29.

Reduction of paradeterminants of triangular matrices to paradeterminants of k-diagonal matrices is considered.

Р. А. Заторский, А. Р. Малярчук *Приведение парадетерминанта треугольной матрицы к k-диагональному виду* // Мат. Студії. – 2010. – Т.34, №1. – С.20–29.

Рассматривается приведение парадетерминантов треугольных матриц к парадетерминантам матриц k-диагонального вида.

1. Вступ. Метод Гауса зведення детермінанта до рівного йому детермінанта верхньої чи нижньої трикутної матриці відіграє важливу роль в теорії та практиці лінійної алгебри. Для трикутних матриць
$$A = (a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} \tag{1}$$
задача про побудову алгоритму аналогічного до алгоритму Гауса була сформульована Протасовим І. В. і частково розв'язана Ліщинським І. І. [1]. Обнулення нижньої частини елементів парадетермінанта трикутної матриці також важливе як у теорії парадетермінантів, так і при самих обчисленнях значень парадетермінантів. Зокрема таке обнулення елементів дає змогу понизити порядок лінійного рекурентного рівняння n-го порядку до лінійного рекурентного рівняння k-го порядку ($k < n$).

Означення 1. *k-діагональною трикутною матрицею $n-$го порядку* ($k < n$) назвемо трикутну матрицю
$$A = (a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n},$$
всі елементи $a_{i,j},\ i - j \geqslant k$ якої дорівнюють нулю.

Побудуємо алгоритм зведення парадетермінанта трикутної матриці n-го порядку до рівного йому парадетермінанта k-діагональної ($k < n$) трикутної матриці.

Зауважимо, що для цього достатньо парадетермінант трикутної матриці (1) звести до рівного йому парадетермінанта у якому всі елементи $a_{i,i-k} = 0,\ i = k+1,\dots,n$ дорівнюють нулю. Бо якщо у парадетермінанті чи параперманенті трикутної матриці (1) елемент a_{rs} дорівнює нулю, то ненульові елементи $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{r,s-1}$ не впливають на їх значення. Нижче буде використано ряд понять та тверджень теорії парадетермінантів трикутних матриць, основи якої закладено у [2], [3].

2. Побудова алгоритму. Доведемо теорему, на якій базується алгоритм зведення трикутної матриці до k-діагональної ($k < n$) трикутної матриці.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.

Теорема 1. *Нехай A — трикутна матриця (1) і*

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots & \ddots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,j-1} \\ a_{j1} & \dots & a_{j,j-1} & a_{jj} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,j-1} & a_{j+1,j} & a_{j+1,j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,i-1} \\ 0 & \dots & 0 & x_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,i-1} & a_{ii} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,i-1} & a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тоді із рівностей

$$\operatorname{ddet}(A) = \operatorname{ddet}(B), \tag{2}$$

$$\operatorname{pper}(A) = \operatorname{pper}(B), \tag{3}$$

випливають відповідно рівності:

$$x_{ij} = a_{ij}\left(1 - \frac{\operatorname{ddet}(R_{\frac{j-1}{i},1}(A))}{\operatorname{ddet}(R_{j-1,1}(A))}\right), \tag{4}$$

$$x_{ij} = a_{ij}\left(1 + \frac{\operatorname{pper}(R_{\frac{j-1}{i},1}(A))}{\operatorname{pper}(R_{j-1,1}(A))}\right), \tag{5}$$

тут через $R_{\frac{j-1}{i},1}(A)$ позначено ріг $R_{i1}(A)$ трикутної матриці A, в якому $i-$тий рядок замінено $(j-1)-$м рядком, причому ми вважаємо що

$$\operatorname{ddet}(R_{\frac{0}{1},1}(A)) = \operatorname{pper}(R_{\frac{0}{1},1}(A)) = 0.$$

Доведення. Доведемо що із рівності (2) випливає рівність (4). Після розгортання парадетермінантів правої та лівої частини рівності (2) частина доданків знищиться. При цьому, в лівій частині цієї рівності залишаться доданки з іксом, а в правій частині відповідні до них доданки та доданки відповідні тим доданкам лівої частини рівності, які дорівнюють нулю.

Отже, в лівій частині цієї рівності залишиться вираз

$$\{x_{ij}\} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \operatorname{ddet}(R_{j-1,1}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}),$$

тобто добуток факторіального добутку $\{x_{ij}\}$ на його алгебричне доповнення. Зауважимо, що $\{x_{ij}\} = x_{ij} \cdot \{a_{i,j+1}\}$.

Доданки правої частини цієї рівності відповідні доданкам з іксом, можна об'єднати у вираз

$$\{a_{ij}\} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \operatorname{ddet}(R_{j-1,1}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}).$$

Згрупуємо доданки правої частини рівності відповідні доданкам лівої частини рівності, що дорівнюють нулеві:

$$\{a_{i1}\} \cdot (-1)^{i+1} \cdot 1 \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}) + \{a_{i2}\} \cdot (-1)^{i+2} \cdot \operatorname{ddet}(R_{11}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}) + \ldots +$$

$$+\{a_{i,j-1}\}\cdot(-1)^{i+j-1}\cdot\mathrm{ddet}(R_{j-2,1})\cdot\mathrm{ddet}(R_{n,i+1})=$$
$$=\{a_{ij}\}(-1)^{i+j-1}\cdot\mathrm{ddet}(R_{n,i+1})\left(a_{i,j-1}\cdot\mathrm{ddet}(R_{j-2,1})-a_{i,j-2}a_{i,j-1}\,\mathrm{ddet}(R_{j-3,1})+\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{j-2}a_{i1}\cdot\ldots\cdot a_{i,j-1}\cdot 1\right)=\{a_{ij}\}\cdot(-1)^{i+j-1}\cdot\mathrm{ddet}(R_{\frac{j-1}{i},1})\cdot\mathrm{ddet}(R_{n,i+1}).$$

Таким чином, маємо рівність

$$x_{ij}\cdot\mathrm{ddet}(R_{j-1,1})=a_{ij}\cdot\Big(\mathrm{ddet}(R_{j-1,1})-\mathrm{ddet}(R_{\frac{j-1}{i},1})\Big),$$

або рівність (4).

Рівність (5) доводиться аналогічно. □

Відзначимо, що рівність

$$\left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle_n = -\left\langle\begin{matrix}(a_{21}-a_{11})\cdot a_{22} & & & \\ (a_{31}-a_{11})\cdot a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ (a_{n1}-a_{11})\cdot a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle_{n-1}$$

(див. [1] теорема 2) є наслідком теореми 1, бо при $j=2,\ i=2,3,\ldots,n$ рівності (2), (3) приймають відповідно вигляд:

$$\left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & & \\ 0 & a_{22}\left(1-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) & & & \\ 0 & a_{32}\left(1-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) & a_{33} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & a_{n2}\left(1-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right) & a_{n3} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} a_{11} & & & & \\ 0 & a_{22}\left(1+\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) & & & \\ 0 & a_{32}\left(1+\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) & a_{33} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & a_{n2}\left(1+\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right) & a_{n3} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}\right].$$

На цих рівностях базується алгоритм обчислення парадетермінанта та параперманента трикутної матриці, який вимагає всього $\frac{n(n-1)}{2}$ операцій множення і стільки ж операцій додавання.

Таким чином, щоб звести параперманент чи парадетермінант трикутної матриці $A=(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ до k-діагональної трикутної матриці необхідно, використовуючи теорему 1, послідовно перетворити в нуль елементи, що знаходяться на перетині i-го рядка та $(i-k)$-го стовпця $(i=k+1,k+2,\ldots,n)$.

3. Зведення парадетермінантів до діагонального та 2-діагонального вигляду. Послідовне застосування теореми 1 дозволяє звести парадетермінант довільної трикутної матриці до рівного йому парадетермінанта діагональної чи 2-діагональної трикутної матриці. Справедлива наступна

Теорема 2. *Нехай A — матриця (1), тоді справедлива рівність:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \prod_{i=1}^{n} x_{ii},$$

де

$$x_{ii} = a_{ii}\left(1 - \frac{\operatorname{ddet}(P_{i-1})}{\operatorname{ddet}(Q_{i-1})}\right) \tag{6}$$

та рівність

$$\operatorname{pper}(A) = \prod_{i=1}^{n} x_{ii},$$

де

$$x_{ii} = a_{ii}\left(1 + \frac{\operatorname{pper}(P_{i-1})}{\operatorname{pper}(Q_{i-1})}\right).$$

Тут

$$P_{i-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & & & & \\ 0 & x_{22} & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & x_{i-2,i-2} & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,i-2} & a_{i,i-1} \end{pmatrix}, \ Q_{i-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & & & & \\ 0 & x_{22} & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & x_{i-2,i-2} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{i-1,i-1} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Зведемо парадетермінант трикутної матриці A до парадетермінанта діагональної трикутної матриці $X = (\delta_{ij} \cdot x_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$, використовуючи теорему 1 для послідовного перетворення парадетермінанта даної трикутної матриці.

Застосуємо теорему 1 до парадетермінанта трикутної матриці (1) при $i = j = 1$. Позаяк $\operatorname{ddet}\left(R_{\frac{0}{1},1}(A)\right) = 0$ і $\operatorname{ddet}(R_{01}(A)) = 1$, то $x_{11} = a_{11}\left(1 - \frac{0}{1}\right) = a_{11}$ і ми від парадетермінанта матриці (1) приходимо до парадетермінанта матриці $A^{(1)}$, в якій елемент a_{11} замінено елементом x_{11}.

Застосовуючи тепер теорему 1 до парадетермінанта трикутної матриці $A^{(1)}$ при $i = j = 2$, отримаємо рівності

$$x_{22} = a_{22}\left(1 - \frac{\operatorname{ddet}(R_{\frac{1}{2},1}(A^{(1)}))}{\operatorname{ddet}(R_{11}(A^{(1)}))}\right) = a_{22}\left(1 - \frac{a_{21}}{x_{11}}\right).$$

Тепер парадетермінант трикутної матриці $A^{(1)}$ можна замінити рівним йому парадетермінантом трикутної матриці $A^{(2)}$, в якій елемент a_{21} замінено нулем, а елемент a_{22} — елементом x_{22}.

При $i = j = 3$ терема 1 при її застосуванні до парадетермінанта трикутної матриці $A^{(2)}$ дає рівності

$$x_{33} = a_{33}\left(1 - \frac{\operatorname{ddet}(R_{\frac{2}{3},1}(A^{(2)}))}{\operatorname{ddet}(R_{21}(A^{(2)}))}\right) = a_{33}\left(1 - \frac{\left\langle \begin{matrix} x_{11} & \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{matrix} x_{11} & \\ 0 & x_{22} \end{matrix} \right\rangle}\right)$$

і парадетермінант трикутної матриці $A^{(3)}$, в якому перший та другий елементи третього рядка дорівнюють нулю, а елемент третього рядка і третього стовпця замінюється елементом x_{33}.

При $i = j = 4$ отримаємо рівності

$$x_{44} = a_{44}\left(1 - \frac{\operatorname{ddet}(R_{\frac{3}{4},1}(A^{(3)}))}{\operatorname{ddet}(R_{31}(A^{(3)}))}\right) = a_{44}\left(1 - \frac{\left\langle\begin{matrix} x_{11} & & \\ 0 & x_{22} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{matrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{matrix} x_{11} & & \\ 0 & x_{22} & \\ 0 & 0 & x_{33}\end{matrix}\right\rangle}\right)$$

та парадетермінант відповідної трикутної матриці $A^{(4)}$.

Користуючись індукцією, легко довести справедливість рівності (6). Тепер справедливість теореми для парадетермінантів випливає із того, що парадетермінант діагональної трикутної матриці дорівнює добутку її діагональних елементів.

Для параперманентів доведення аналогічне. □

Приклад 1. Нехай

$$A = \left(\frac{1}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n},$$

тоді, застосовуючи до парадетермінанта цієї трикутної матриці теорему 2, ми отримаємо парадетермінант діагональної трикутної матриці $\left(\frac{1}{i}\delta_{ij}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$. Таким чином, парадетермінант вихідної матриці дорівнює

$$\operatorname{ddet}\left(\frac{1}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = D_n = \frac{1}{n!}.$$

Розкладаючи парадетермінант D_n за елементами останнього рядка, отримаємо комбінаторну тотожність

$$\frac{1}{n!} = D_n = \frac{1}{1!}D_{n-1} - \frac{1}{2!}D_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)!}D_1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}D_0 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i!}D_{n-i} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i!(n-i)!}.$$

Зведемо параперманент трикутної матриці (1) до параперманента 2-діагональної трикутної матриці виду

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ x_{21} & a_{22} & & & & \\ 0 & x_{32} & a_{33} & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Очевидно, що $x_{21} = a_{21}$. Знайдемо x_{32} користуючись теоремою 1:

$$x_{32} = a_{32}\left(1 + \frac{\mathrm{pper}(R_{\frac{1}{3},1})}{\mathrm{pper}(R_{11})}\right) = a_{32}\left(1 + \frac{a_{31}}{a_{11}}\right).$$

Отже, ми звели параперманент трикутної матриці $A = (a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ до параперманента трикутної матриці

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ x_{21} & a_{22} \\ 0 & x_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Зведемо параперманент трикутної матриці A_1 до рівного йому параперманента трикутної матриці

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ x_{21} & a_{22} \\ 0 & x_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & x_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}:$$

$$x_{43} = a_{43}\left(1 + \frac{\mathrm{pper}(R_{\frac{2}{4},1})}{\mathrm{pper}(R_{21})}\right) = a_{43}\left(1 + \frac{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} \\ x_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}\right).$$

Далі знайдемо, що

$$x_{54} = a_{54}\left(1 + \frac{\mathrm{pper}(R_{\frac{3}{5},1})}{\mathrm{pper}(R_{31})}\right) = a_{54}\left(1 + \frac{\begin{bmatrix} a_{11} \\ x_{21} & a_{22} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} \\ x_{21} & a_{22} \\ 0 & x_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}\right),$$

і т.д.

$$x_{i,i-1} = a_{i,i-1}\left(1 + \frac{\mathrm{pper}(R_{\frac{i-2}{i},1})}{\mathrm{pper}(R_{i-2,1})}\right) = a_{i,i-1}\left(1 + \frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}}\right), \tag{7}$$

де

$$P_{i-2} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ x_{21} & a_{22} \\ 0 & x_{32} & a_{33} \\ \vdots & \dots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-4,i-4} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{i-3,i-4} & a_{i-3,i-3} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{i,i-4} & a_{i,i-3} & a_{i,i-2} \end{bmatrix}_{i-2}, \quad i = 3, 4, \dots, n, \tag{8}$$

$$Q_{i-2} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & \\ x_{21} & a_{22} & & & & & \\ 0 & x_{32} & a_{33} & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-4,i-4} & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{i-3,i-4} & a_{i-3,i-3} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{i-2,i-3} & a_{i-2,i-2} \end{bmatrix}_{i-2}, \ i = 3, 4, \dots, n. \quad (9)$$

Таким чином, справедлива рівність:

$$\operatorname{pper}(a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ x_{21} & a_{22} & & & & \\ 0 & x_{32} & a_{33} & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}_n,$$

де $x_{i,i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n-1$ задаються рівностями (7)–(9).

Розкладемо парадетермінанти (8), (9) за елементами останнього рядка, тоді отримаємо відповідно рекурентні рівняння:

$$P_{i-2} = \{a_{i,i-2}\}Q_{i-3} + \{a_{i,i-3}\}Q_{i-4} + \dots + \{a_{i2}\}Q_1 + \{a_{i1}\}Q_0, \quad (10)$$

$$Q_{i-2} = \{a_{i-2,i-2}\}Q_{i-3} + \{x_{i-2,i-3}\}Q_{i-4}, \ i = 3, 4, \dots, n. \quad (11)$$

Відзначимо, що в цих рекурсіях факторіальні добутки $\{a_{i1}\}$, $\{x_{i-2,i-3}\}$ відповідно дорівнюють $\prod_{j=1}^{i-2} a_{ij}$ та $x_{i-2,i-3}a_{i-2,i-2}$.

Рекурентні рівняння (10), (11) із початковою умовою $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, при $i = 3, 4, \dots, n$ разом із рівностями (7), при $i = 2, 3, \dots, n$ дають ефективний алгоритм зведення парадетермінанта трикутної матриці до рівного йому парадетермінанта 2-діагональної трикутної матриці.

Легко переконатися в тому, що при зведенні парадетермінанта трикутної матриці до парадетермінанта 3-діагональної трикутної матриці аналогічні рекурсії мають вигляд:

$$P_{i-3} = \{a_{i,i-3}\}Q_{i-4} + \{a_{i,i-4}\}Q_{i-5} + \dots + \{a_{i2}\}Q_1 + \{a_{i1}\}Q_0, \ i = 4, 5, \dots, n,$$

$$Q_{i-3} = \{a_{i-3,i-3}\}Q_{i-4} + \{a_{i-3,i-4}\}Q_{i-5} + \{x_{i-3,i-5}\}Q_{i-6}, \ i = 4, 5, \dots, n,$$

$$x_{i,i-2} = a_{i,i-2}\left(1 + \frac{P_{i-3}}{Q_{i-3}}\right), \ i = 3, 4, \dots, n.$$

Взагалі, при зведенні парадетермінанта трикутної матриці $(a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ до рівного йому парадетермінанта k-діагональної трикутної матриці, можна користуватися рекурсіями:

$$P_{i-k} = \{a_{i,i-k}\}Q_{i-k-1} + \{a_{i,i-k-1}\}Q_{i-k-2} + \dots + \{a_{i2}\}Q_1 + \{a_{i1}\}Q_0, \quad (12)$$

$$Q_{i-k} = \{a_{i-k,i-k}\}Q_{i-k-1} + \{a_{i-k,i-k-1}\}Q_{i-k-2} + \dots + \{x_{i-k,i-(2k-1)}\}Q_{i-2k}, \quad (13)$$

$$x_{i,i-k+1} = a_{i,i-k+1}\left(1 + \frac{P_{i-k}}{Q_{i-k}}\right), \ i = k, k+1, \dots, n, \ k = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

В рекурсіях (12), (13) $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$ та $i = k+1, k+2, \dots, n$.

Проте, всі обчислення можна дещо спростити. Знайдемо рекурентне співвідношення для Q_{i-k}. З цією метою виразимо $x_{i,i-k+1}$ через $Q_{i-k}, Q_{i-k-1}, \ldots, Q_1, Q_0$, підставляючи P_{i-k} із (12) у праву частину рівності (14) та звільнимося від $x_{i-k,i-(2k-1)}$ у рівності (13). При цьому отримаємо рекурсію:

$$Q_{i-k} = \{a_{i-k,i-k}\}Q_{i-k-1} + \{a_{i-k,i-k-1}\}Q_{i-k-2} + \ldots + \{a_{i-k,2}\}Q_1 + \{a_{i-k,1}\}Q_0 \tag{15}$$

де $Q_0 = 1,\ i = k+1, k+2, \ldots, n.$

У рекурентних рівняннях (12), (15) факторіальні добутки $\{a_{is}\}, \{a_{i-k,s}\}$, де $s \leqslant i-k$ відповідно дорівнюють:

$$\prod_{r=s}^{i-k} a_{ir},\ \prod_{r=s}^{i-k} a_{i-k,r}.$$

Приклад 2. Зведемо параперманент 3-діагональної трикутної матриці виду

$$A = \begin{pmatrix} p &&&&&&& \\ q & p &&&&&& \\ r & q & p &&&&& \\ 0 & r & q & p &&&& \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots &&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p && \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & p & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & r & q & p \end{pmatrix}_n \tag{16}$$

до рівного йому параперманента 2-діагональної трикутної матриці

$$X = \begin{pmatrix} p &&&&&& \\ x_{21} & p &&&&& \\ 0 & x_{32} & p &&&& \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots &&& \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p && \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{n-1,n-2} & p & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{n,n-1} & p \end{pmatrix}_n. \tag{17}$$

При цьому використаємо рекурентні рівняння (8), (9) та рекурентне рівняння (7). Позаяк $a_{ii} = p,\ a_{i,i-1} = q,\ a_{i,i-2} = r$, то ці рекурсії матимуть вигляд:

$$x_{i,i-1} = q \cdot \left(1 + \frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}}\right),\ i = 2, 3, \ldots, n. \tag{18}$$

$$P_{i-2} = r \cdot Q_{i-3},\ i = 3, 4, \ldots, n, \tag{19}$$

$$Q_{i-2} = p \cdot Q_{i-3} + x_{i-2,i-3} \cdot p \cdot Q_{i-4},\ i = 3, 4, \ldots, n. \tag{20}$$

Знайдемо рекурентне співвідношення для Q_{i-2}. З цією метою виразимо $x_{i,i-1}$ через Q_{i-2}, Q_{i-3}, підставляючи (19) у (18) та звільнимося від $x_{i-2,i-3}$ у (20). Маємо:

$$x_{i,i-1} = q \cdot \left(1 + \frac{r \cdot Q_{i-3}}{Q_{i-2}}\right),\ i = 2, 3, \ldots, n, \tag{21}$$

$$Q_{i-2} = p \cdot Q_{i-3} + pq \cdot Q_{i-4} + pqr \cdot Q_{i-5},\ Q_0 = 1,\ i = 3, 4, \ldots, n. \tag{22}$$

Таким чином, основою алгоритму зведення параперманента трикутної матриці (16) до рівного йому параперманента (17) є рекурсії (21), (22).

При $p = q = r = 1$ маємо:

$$Q_{i-2} = Q_{i-3} + Q_{i-4} + Q_{i-5},\ i = 3, 4, \ldots, n,\ Q_0 = 1,$$
$$P_{i-2} = Q_{i-3},\ i = 3, 4, \ldots, n,\ P_0 = 0,$$
$$x_{i,i-1} = \frac{Q_{i-2} + P_{i-2}}{Q_{i-2}},\ i = 2, 3, \ldots, n.$$

Отже,

$$Q_1 = 1, Q_2 = 2, Q_3 = 4, Q_4 = 7, Q_5 = 13, Q_6 = 24, Q_7 = 44, Q_8 = 81, \ldots,$$
$$P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 2, P_4 = 4, P_5 = 7, P_6 = 13, P_7 = 24, P_8 = 44, \ldots,$$
$$x_{21} = \frac{1}{1}, x_{32} = \frac{2}{1}, x_{43} = \frac{3}{2}, x_{54} = \frac{6}{4}, x_{65} = \frac{11}{7}, x_{76} = \frac{20}{13}, x_{87} = \frac{37}{24}, x_{98} = \frac{68}{44}, \ldots$$

і шуканий параперманент має вигляд

$$\left[\begin{array}{cccccccccc}
1 \\
\frac{1}{1} & 1 \\
0 & \frac{2}{1} & 1 \\
0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & \frac{6}{4} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{7} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{20}{13} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{37}{24} & 1 \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]_n .$$

Приклад 3. Зведемо параперманент трикутної матриці

$$\left(\frac{i - j + 1}{i - j + \delta_{ij}} \right)_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \tag{23}$$

до 2-діагональної трикутної матриці.

Обчислення показують, що відповідним параперманентом 2-діагональної трикутної матриці є параперманент виду

$$F_{2n-1} = \left[\begin{array}{ccccccccc}
1 \\
\frac{F_2}{1} & 1 \\
0 & \frac{F_4}{F_1} & 1 \\
0 & 0 & \frac{F_6}{F_3} & 1 \\
0 & 0 & 0 & \frac{F_8}{F_5} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_{10}}{F_7} & 1 \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{F_{2n-2}}{F_{2n-5}} & 1
\end{array}\right]_n ,\ n = 2, 3, \ldots, \tag{24}$$

де F_i, $i = 1, 2, \dots$ — числа Фібоначчі.

Позаяк параперманент трикутної матриці (23) дорівнює F_{2n-1}, то справедливість рівності (24) можна перевірити розкладанням параперманента її правої частини за елементами останнього рядка.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ганюшкін О.Г., Заторський Р.А., Ліщинський І.І. *До паравизначників і параперманентів*// Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – Т.1. – С. 35–41.
2. Заторський Р.А. *Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць* // Мат. Студ. – 2002. – Т.17, №1. – С. 3–17.
3. Zatorsky R.A. *Theory of paradeterminants and its applications*// Algebra and Diskrete Mathematics. – 2007. – Т.1. – P. 109–138.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
romazz@rambler.ru
Надійшло 15.04.2008