УДК 517.518.837

Г. А. Волошин, В. К. Маслюченко

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ОДНІЄЇ ТЕОРЕМИ БЕРНШТЕЙНА

H. A. Voloshyn, V. K. Maslyuchenko. *The functional generalization of one Bernstein's theorem*, Mat. Stud. **33** (2010), 220–224.

It is proved the functional analogue of the known Bernstein's theorem for finite number of given functions: for arbitrary continuous functions $\alpha_k\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ such that $\alpha_0(x)\ge\alpha_1(x)\ge\ldots\ge\alpha_n(x)\ge 0$ on $[0,1]$ exists a continuous function $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$ such that $E_k(f^x)=\alpha_k(x)$ for every $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ and arbitrary x from $[0,1]$.

Г. А. Волошин, В. К. Маслюченко. *Функциональное обобщение одной теоремы Бернштейна* // Мат. Студії. – 2010. – Т.33, №2. – С.220–224.

Доказан функциональный аналог известной теоремы Бернштейна для конечного числа данных функций: для произвольной последовательности функций $\alpha_k\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, таких, что $\alpha_0(x)\ge\alpha_1(x)\ge\ldots\ge\alpha_n(x)\ge 0$ на $[0,1]$, существует непрерывная функция $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$ такая, что $E_k(f^x)=\alpha_k(x)$ для каждого $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ и произвольного x из $[0,1]$.

1. С. Н. Бернштейн ([1]) встановив, що для довільної спадної послідовності дійсних невід'ємних чисел α_n, яка прямує до нуля, існує така неперервна функція $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, що її найкраще рівномірне наближення $E_n(f)$ многочленами степеня не вищого за n дорівнює α_n для кожного $n\in\{0,1,\ldots\}$. Пізніше С. М. Нікольський ([2]) без доведення зауважив, що ця теорема Бернштейна може бути перенесена на випадок загальних банахових просторів, що і було здійснено в ([3, c.50]). Після цього з'явилося чимало публікацій ([4-10]), у яких згадана теорема розвивається в тому чи іншому напрямку.

У статті [11] сформульовано нові проблеми, що пов'язані з теоремою Бернштейна, серед яких і таке *запитання:* чи для кожної поточково збіжної до нуля послідовності невід'ємних неперервних функцій $\alpha_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ існує така сукупно неперервна функція $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$, що $E_n(f^x)=\alpha_n(x)$ для кожного $n=0,1,\ldots$ і для кожного x з відрізка $[0,1]$? (Тут $f^x=f(x,\cdot)$ — вертикальний x-розріз функції f). Відповідь на це запитання залишається на сьогодні невідомою, як і на слабше *запитання* щодо існування відповідної нарізно неперервної функції $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$.

У цій статті ми робимо перший крок до розв'язання цієї проблеми, розглядаючи її для скінченного числа функцій $\alpha_0(x),\ldots,\alpha_n(x)$, тобто доводимо таку *теорему:* для довільної скінченної послідовності неперервних функцій $\alpha_k\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, де $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, такої, що $\alpha_0(x)\ge\alpha_1(x)\ge\ldots\ge\alpha_n(x)\ge 0$ для кожного $x\in[0,1]$ існує така неперервна функція $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$, що $E_k(f^x)=\alpha_k(x)$ для кожного $x\in[0,1]$ при $k\in\{0,1,\ldots,n\}$. Цей результат і його попередня версія були анонсовані в тезах [12, 13].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 41A50, 41A65.
Keywords: continuous function, polynomial approximation, best uniform approximation
doi:10.30970/ms.33.2.220-224

2. Позначимо, як звичайно, через $C[0,1]$ банахів простір всіх неперервних функцій $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ з нормою $\|g\| = \max\{|g(x)|\colon 0\le x\le 1\}$. Нехай P_n — лінійний підпростір простору $C = C[0,1]$, що складається з усіх поліномів степеня не вищого за n. Для $g\in C$ і довільного $n\in\{0,1,\ldots\}$ покладемо $E_n(g) = \inf\{\|g-p\|\colon p\in P_n\}$.

За теоремою Гаара ([14, c.80]) для кожного n існує єдиний многочлен $r_n = R_n(g)\in P_n$, такий, що $E_n(g) = \|g - r_n\|$, який називається многочленом найкращого рівномірного наближення з P_n. При цьому оператор $R_n\colon C\to P_n$ є неперервним відносно максимум-норми ([14]). Зауважимо, що для кожного $n\in\{0,1,\ldots\}$ існує така функція $\beta\in C$, що $E_n(\beta) = 1$. Щоб її побудувати, беремо довільну функцію $g\in C\setminus P_n$, для якої обов'язково $\gamma = E_n(g) > 0$, і покладаємо $\beta = g/\gamma$. Тоді $E_n(\beta) = E_n(g)/\gamma = 1$.

Почнемо з найпростішого випадку, коли розглядається одна функція.

Символом $f\otimes g$ ми позначаємо тензорний добуток функцій $f\colon X\to\mathbb{R}$ і $g\colon Y\to\mathbb{R}$, тобто функцію $h = f\otimes g\colon X\times Y\to\mathbb{R}$, яка задається на добутку $X\times Y$ рівністю

$$h(x,y) = f(x)g(y).$$

Теорема 1. *Нехай $\alpha\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ — невід'ємна неперервна функція, $\beta\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ — така функція, що $E_n(\beta) = 1$. Тоді функція $f = \alpha\otimes\beta\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$ є сукупно неперервною і для неї $E_n(f^x) = \alpha(x)$ для кожного $x\in[0,1]$.*

Доведення. Для кожного $x\in[0,1]$ на основі додатної однорідності функції E_n будемо мати

$$E_n(f^x) = E_n(\alpha(x)\beta) = \alpha(x)E_n(\beta) = \alpha(x)\cdot 1 = \alpha(x).$$

□

3. Для наступної побудови нам буде потрібний такий варіант теореми про неявну функцію. Для відображення $f\colon X\times Y\to Z$ ми покладаємо, як звичайно, $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$ для довільної точки $(x,y)\in X\times Y$.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, $Y = [0,+\infty)$ і $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція, яка строго зростає відносно другої змінної, причому $f(x,0)\le 0$ і $\lim_{y\to+\infty} f(x,y) = +\infty$ для кожного $x\in X$. Тоді існує єдина функція $g\colon X\to Y$, така, що $f(x,g(x)) = 0$ для всіх $x\in X$, і ця функція є неперервною.*

Доведення. Зафіксуємо x з X. Функція $f^x = f(x,\cdot)\colon Y\to\mathbb{R}$ неперервна і строго зростає на Y. При цьому

$$f^x(0) = f(x,0)\le 0 \quad \text{і} \quad \lim_{y\to+\infty} f^x(y) = +\infty.$$

Тоді за теоремою про проміжне значення існує єдине число $g(x)\in Y$, таке, що $f^x(g(x)) = 0$. Отримана функція $y = g(x)$ і є єдиною функцією, що задовольняє співвідношення $f(x,g(x)) = 0$ на X.

Доведемо неперервність цієї функції. Нехай $x_0\in X$. Тоді $y_0 = g(x_0)\ge 0$. Розглянемо окремо випадки: $y_0 > 0$ і $y_0 = 0$.

а) Нехай $y_0 > 0$. Розглянемо довільне число $\varepsilon > 0$, таке, що $0 < \varepsilon < y_0$. Покладемо $y_1 = y_0 - \varepsilon$, $y_2 = y_0 + \varepsilon$. Зрозуміло, що y_1 і y_2 — це точки з Y і $y_1 < y_0 < y_2$. Оскільки функція $f^{x_0}\colon Y\to\mathbb{R}$ строго зростає, то і $f^{x_0}(y_1) < f^{x_0}(y_0) < f^{x_0}(y_2)$, тобто $f_{y_1}(x_0) < f_{y_0}(x_0) < f_{y_2}(x_0)$. Оскільки $f_{y_0}(x_0) = f(x_0,y_0) = f(x_0,g(x_0)) = 0$, то $f_{y_1}(x_0) < 0 < f_{y_2}(x_0)$.

Але функції f_{y_1} і f_{y_2} неперервні в точці x_0. Тому існує такий окіл U точки x_0 у просторі X, що $f_{y_1}(x) < 0 < f_{y_2}(x)$ для кожного $x\in U$.

Нехай $x \in U$. Тоді $f^x(y_1) < 0 = f^x(g(x)) < f^x(y_2)$. Оскільки f^x строго зростає, то і $y_1 < g(x) < y_2$. Отже, при $x \in U$ виконується нерівність $g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon$, тобто $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$, як тільки $x \in U$. Це показує, що g неперервна в точці x_0.

б) Нехай $y_0 = 0$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і покладемо $y_1 = \varepsilon$. Оскільки $y_1 = \varepsilon > 0 = y_0$ і функція f^{x_0} строго зростає, то $0 = f^{x_0}(y_0) < f^{x_0}(y_1) = f_{y_1}(x_0)$. З неперервності функцій f_{y_1} випливає, що існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f_{y_1}(x) > 0$ для всіх $x \in U$. Для $x \in U$ маємо $f^x(0) \le 0 < f^x(y_1)$. Тоді і $0 \le g(x) < y_1 = \varepsilon$ для всіх $x \in U$, звідки негайно випливає, що $|g(x) - g(x_0)| = g(x) < \varepsilon$ на U. Тому і тут g є неперервною в точці x_0 функцією. □

З теореми 2 випливає наслідок, яким ми власне і будемо користуватися.

Наслідок 1. *Нехай X — топологічний простір, $Y = [0, +\infty)$, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція, яка строго зростає відносно другої змінної, $\lim_{y\to+\infty} f(x, y) = +\infty$ на X, $h_0(x) = f(x, 0)$, $h_1\colon X \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, така, що $h_1(x) \ge h_0(x)$ на X. Тоді існує єдина функція $g\colon X \to Y$, така, що $f(x, g(x)) = h_1(x)$ на X, причому функція g неперервна.*

Доведення. Позначимо через $f_1(x, y) = f(x, y) - h_1(x)$. Функція f_1 задовольняє умови теореми 2: $f_1(x, 0) = h_0(x) - h_1(x) \le 0$. За теоремою 2 існує єдина неперервна функція $g\colon X \to Y$ така, що $f_1(x, g(x)) = 0$ на X. Тому, $f(x, g(x)) = h_1(x)$. □

4. Нехай $e_n(t) = t^n$ на $[0, 1]$, $g \in C[0, 1]$ і $r_n = R_n(g)$ — n-й многочлен найкращого наближення функції g. Вслід за [1], для довільного $n \in \{1, 2, \ldots\}$ введемо функцію $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулою $\varphi(\lambda) = E_{n-1}(g - r_n + \lambda e_n)$. Наступний результат випливає з теореми Гаара та властивостей функціоналу E_n.

Теорема 3. *Функція $\varphi(\lambda) = E_{n-1}(g - r_n + \lambda e_n)$ опукла і неперервна, строго зростає на $[0, +\infty)$ і строго спадає на $(-\infty; 0]$, причому $\varphi(0) = E_n(g)$.*

Доведення. Зрозуміло, що функція $\varphi(\lambda) = E_{n-1}(g - r_n + \lambda e_n)$ є неперервною як композиція неперервних функцій. Переконаємося, що наша функція опукла, тобто, що для довільних чисел $\alpha_1 \ge 0$ і $\alpha_2 \ge 0$, таких, що $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, і довільних дійсних чисел λ_1 і λ_2 виконується нерівність

$$\varphi(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2) \le \alpha_1\varphi(\lambda_1) + \alpha_2\varphi(\lambda_2).$$

Справді, використовуючи властивості функціоналу найкращого наближення, отримуємо

$$\begin{gathered}
\varphi(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2) = E_{n-1}(g - r_n + \alpha_1\lambda_1 e_n + \alpha_2\lambda_2 e_n) = \\
= E_{n-1}((\alpha_1 + \alpha_2)g - (\alpha_1 + \alpha_2)r_n + \alpha_1\lambda_1 e_n + \alpha_2\lambda_2 e_n) = \\
= E_{n-1}(\alpha_1(g - r_n + \lambda_1 e_n) + \alpha_2(g - r_n + \lambda_2 e_n)) \le \\
\le E_{n-1}(\alpha_1(g - r_n + \lambda_1 e_n) + E_{n-1}(\alpha_2(g - r_n + \lambda_2 e_n) = \\
= \alpha_1 E_{n-1}(g - r_n + \lambda_1 e_n) + \alpha_2 E_{n-1}(g - r_n + \lambda_2 e_n) = \alpha_1\varphi(\lambda_1) + \alpha_2\varphi(\lambda_2).
\end{gathered}$$

Доведемо, що $\varphi(\lambda) \ge \varphi(0)$ для кожного $\lambda \in \mathbb{R}$. Знайдемо значення $\varphi(\lambda)$ в нулі $\varphi(0) = E_{n-1}(g - r_n) = \|g - r_n\| = E_n(g)$. З іншого боку

$$\varphi(\lambda) = E_{n-1}(g - r_n + \lambda e_n) \ge E_n(g - r_n + \lambda e_n) = E_n(g) = \varphi(0).$$

Покажемо, що $\varphi(\lambda) \ne \varphi(0)$ для кожного $\lambda \ne 0$. Нехай це не так, тобто $\varphi(\lambda) = \varphi(0)$ для деякого $\lambda \ne 0$. Розглянемо для цього λ функцію $h = g - r_n + \lambda e_n$, для якої

$$E_n(h) = E_n(g) = \varphi(0) = \varphi(\lambda) = E_{n-1}(h).$$

Нехай $q = R_{n-1}(h)$. Тоді $\|g - r_n\| = E_n(g) = E_{n-1}(h) = \|h - g\| = \|g - r_n + \lambda e_n - q\|$. Отримуємо, що функція g має два різних многочлени найкращого наближення в P_n, а саме r_n і відмінний від нього многочлен $p = r_n - \lambda e_n + q$, а це суперечить теоремі Гаара. Отже, $\varphi(\lambda) > \varphi(0) = E_n(g)$ для кожного $\lambda \neq 0$. □

З доведених властивостей функції φ випливає, що вона строго зростає на $[0, +\infty)$. Справді, нехай $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$. Якщо $\lambda_1 = 0$, то $\varphi(\lambda_1) = \varphi(0) < \varphi(\lambda_2)$ за доведеним вище. Нехай $\lambda_1 > 0$. З опуклості функції φ для кутових коефіцієнтів

$$k_1 = \frac{\varphi(\lambda_1) - \varphi(0)}{\lambda_1 - 0} \quad \text{і} \quad k_2 = \frac{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

отримуємо нерівність $k_1 \leq k_2$, звідки випливає, що $k_2 > 0$, адже $k_1 > 0$. Тому $\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1) > 0$, тобто $\varphi(\lambda_1) < \varphi(\lambda_2)$. Так само доводиться, що φ строго спадає на $(-\infty; 0]$.

5. Займемося доведенням основного результату.

Теорема 4. *Нехай $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ — невід'ємні неперервні функції на $[0,1]$, такі, що $\alpha_{k-1}(x) \geq \alpha_k(x)$ для кожного $x \in [0,1]$ і довільного $k \in \{1, \ldots, n\}$. Тоді існує така неперервна функція $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $E_k(f^x) = \alpha_k(x)$ для довільних $x \in [0,1]$ і $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.*

Доведення. Існує така неперервна функція $\beta_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, що $E_n(\beta_n) = 1$. Покладемо $f_n = \alpha_n \otimes \beta_n$. Тоді за теоремою 1 $f_n \in C[0,1]^2$ і $E_n(f_n^x) = \alpha_n(x)$ для кожного $x \in [0,1]$.

Припустимо, що $n > 0$, $0 < m \leq n$, і побудовано таку функцію $f_m \in C[0,1]^2$, що $E_k(f_m^x) = \alpha_k(x)$ для всіх $x \in [0,1]$ і $k \in \{m, m+1, \ldots, n\}$. Покажемо, що існує така функція $f_{m-1} \in C[0,1]^2$, що $E_k(f_{m-1}^x) = \alpha_k(x)$ на $[0,1]$ для $k \in \{m-1, m, \ldots, n\}$.

Розглянемо відображення $R_m\colon C \to P_n$, яке кожній функції $g \in C$ ставить у відповідність її многочлен найкращого наближення $r_m = R_m(g)$ з P_m. Відомо, що це відображення є неперервним.Оскільки функція $f_m\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ неперервна за сукупністю змінних, то асоційоване з нею відображення $\varphi_m\colon [0,1] \to C[0,1]$, $\varphi_m(x) = f_m^x$, неперервне, а отже, і композиція $R_m \circ \varphi_m\colon [0,1] \to P_m$ є неперервним відображенням. Покладемо

$$r_m^x = R_m(\varphi_m(x)) = R_m(f_m^x)$$

і $r_m(x,y) = r_m^x(y)$ для $(x,y) \in [0,1]^2$. З неперервності відображення $R_m \circ \varphi_m$ випливає, що $r_m \in C[0,1]^2$. При цьому r_m^x — це многочлен найкращого наближення функції f_m^x для кожного $x \in [0,1]$.

Покладемо $\varphi(x,\lambda) = E_{m-1}(f_m^x - r_m^x + \lambda e_m)$ для $x \in [0,1]$ і $\lambda \in \mathbb{R}$. Оскільки відображення $(x,\lambda) \mapsto f_m^x - r_m^x + \lambda e_m\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to C[0,1]$ і $E_{m-1}\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ неперервні, то функція φ неперервна за сукупністю змінних. Крім того, за теоремою 3 функція φ^x строго зростає на $[0, +\infty)$ і

$$\varphi^x(0) = E_{m-1}(f_m^x - r_m^x) = E_m(f_m^x) = \alpha_m(x) \leq \alpha_{m-1}(x).$$

Тому за наслідком з теореми 2 про неявну функцію існує неперервна функція $\mu\colon [0,1] \to [0, +\infty)$, така, що $\varphi(x, \mu(x)) = \alpha_{m-1}(x)$ на $[0,1]$. Покладемо $f_{m-1}(x,y) = f_m(x,y) - r_m(x,y) + \mu(x) y^m$. Зрозуміло, що $f_{m-1} \in C[0,1]^2$. При цьому

$$E_{m-1}(f_{m-1}^x) = E_{m-1}(f_m^x - r_m^x + \mu(x) e_m) = \varphi(x, \mu(x)) = \alpha_{m-1}(x)$$

на $[0,1]$. Крім того, при $k \geq m$

$$E_k(f_{m-1}^x) = E_k(f_m^x - r_m^x + \mu(x) e_m) = E_k(f_m^x) = \alpha_k(x)$$

на $[0,1]$, бо $-r_m^x + \mu(x) e_m \in P_k$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Bernstein S.N. *Sur le problème inverse de la theorie de la meilleure approximation des fonctions continues* // Comp. Rend. – 1938. – V.206. – P. 1520–1523.
2. Никольский С.М. *Приближение многочленами функций действительного переменного* // Математика в СССР за 30 лет. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – С. 288–318.
3. Тиман А.Ф. Теория приближений функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. Шведов А.С. *Существование елемента с заданными величинами наилучших приближений.* – Москва: Инст. прикл. матем. АН СССР им. М.В. Келдыша, 1982. – Препр. №55. – 20 с.
5. Шведов А.С. *Существование елемента с заданной последовательностью наилучших приближений* // Теория приближений функций. Труды Межд. конф. по теор. приближ. функ. – Киев, 1983. – М.: Наука, 1987. – С. 473–475.
6. Lewicki G. *A theorem of Bernstein's type for linear projections* // Zeszyty naukowe Universytetu Jagiellonskiego Acta Mathematica. – 1988. – V.27. – P. 23–27.
7. Васильев А.И. *Обратная задача теории наилучшего приближения в F-пространствах* // Докл. РАН. – 1999. – С. 583–585.
8. Бородин П.А. *К задаче существования элемента с заданными уклонениями от расширяющейся системы подпространств* // Мат. заметки. – 2006. – V.80, №5. – С. 657–667.
9. Maslyuchenko V.K., Voloshyn H.A. *On one Bernstein's theorem* // Intern. Scient. Conf. "Infinite dimensional analysis and topology" (May 27-June 1, 2009). Abstracts. – Ivano-Frankivsk, 2009. – P. 24–26.
10. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Узагальнення однієї теореми Бернштейна* // Матем. вісн. НТШ. – 2009. – Т.6. – С. 62–72.
11. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції* // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту. – Чернівці: Рута, 2007. – Вип. 336-337. – С. 52–56.
12. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Про функціональне узагальнення однієї теореми Бернштейна* // Міжн. конф. до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (8–13 червня, 2009). Тези доповідей. – Чернівці, 2009. – С. 149–150.
13. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *До питання про узагальнення однієї теореми Бернштейна* // FM 2009 Conf. "Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III" dedicated to the memory of V.K. Dzyadyk (1919-1998) (August 22-26, 2009). Abstracts. – Kyiv, 2009. – C. 106–107.
14. Kroo A. *The continuoty of best approximatious*// Acta Math. Acad. Sci. Hungary – 1977. – V.30.– P. 175–188.

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича
math.analysis.chnu@gmail.com

Надійшло 1.09.2009