УДК 517.5

Р. В. Хаць

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА КАНОНІЧНИХ ДОБУТКІВ З НУЛЯМИ НА ПРОМЕНІ

R. V. Khats'. *Asymptotic behavior of canonical products with zeros on a ray*, Mat. Stud. **33** (2010), 215–219.

We obtain new uniform asymptotic estimates for the logarithms of canonical products with zeros on a positive ray under the condition of regular growth of a zero-counting function.

Р. В. Хаць. *Асимптотическое поведение канонических произведений с нулями на луче* // Мат. Студії. – 2010. – Т.33, №2. – С.215–219.

Получены новые равномерные асимптотические оценки для логарифмов канонических произведений с нулями на положительном луче при условии регулярного роста считающей функции последовательности их нулей.

Нехай $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність додатних чисел таких, що $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n\to+\infty$ $(n\to+\infty)$, $n(t)=\sum_{\lambda_n\le t}1$, p — найменше ціле невід'ємне число, для якого ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-p-1}$ є збіжним, і канонічний добуток Вейєрштрасса роду p

$$L(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{\lambda_n},p\right), \tag{1}$$

де $E(w,p)=(1-w)\exp(w+w^2/2+\cdots+w^p/p)$ для $p\in\mathbb{N}$ і $E(w,0)=(1-w)$ — первинній множник Вейєрштрасса. Надалі вважаємо функцію

$$\log L(z)=\int_0^z\frac{L'(\zeta)}{L(\zeta)}\,d\zeta,\quad L(0)=1,$$

визначеною в $\mathbb{C}\setminus[\lambda_1,+\infty)$. Відомо [1, с. 81], що якщо $\rho\in(0,+\infty)$ — неціле число і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову

$$n(t)=\Delta t^\rho+o(t^\rho),\quad t\to+\infty,\quad \Delta\in[0,+\infty), \tag{2}$$

то для канонічного добутку (1) роду p, $p=[\rho]<\rho<p+1$ ($[x]$ — ціла частина числа $x>0$), асимптотичне співвідношення

$$\log L(re^{i\varphi})=\frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}e^{i\rho(\varphi-\pi)}r^\rho+\frac{o(r^\rho)}{\sin(\varphi/2)},\quad r\to+\infty, \tag{3}$$

виконується рівномірно за $\varphi\in(0,2\pi)$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

Крім цього, (див. [1, с. 89, 91], [2, с. 88], [3, с. 94]) для кожного $\delta > 0$ рівномірно за $\varphi \in [\delta, 2\pi - \delta]$ співвідношення

$$\log |L(re^{i\varphi})| = \frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^\rho), \quad r \to +\infty, \tag{4}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли виконується (2). До того ж, ([3, с. 98])

$$\log |L(re^{i\varphi})| \leq \frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^\rho), \quad r \to +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \tag{5}$$

Якщо, умова (2) виконується з цілим $\rho \in (0, +\infty)$, то для канонічного добутку (1) справджується ([2, с. 91], [3, с. 106–109])

$$\log L(re^{i\varphi}) = \Lambda(re^{i\varphi}) + o(r^\rho), \quad r \to +\infty, \tag{6}$$

рівномірно за $\varphi \in [\delta, 2\pi - \delta]$, $\delta > 0$, де

$$\Lambda(re^{i\varphi}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} e^{i\rho\varphi} r^\rho \sum\limits_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} - \Delta \left(\dfrac{1}{\rho} - i(\varphi - \pi) \right) e^{i\rho\varphi} r^\rho, & p = \rho, \\ 0, \quad p = \rho - 1. \end{cases} \tag{7}$$

Зауважимо, що аналогічні асимптотичні формули для цілих функцій нульового і скінченного ненульового порядків з від'ємними нулями отримано в [4, 5].

В багатьох працях (див., наприклад, [6–11]) вивчались тонші, ніж (3)–(6) асимптотики цілої функції (1). Так з результатів статті [6] випливає, зокрема, що асимптотична формула

$$\log L(re^{i\varphi}) = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi - \pi)} r^\rho + o(r^{\rho_1}), \quad r \to +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \tag{8}$$

де $\rho_1 \in (0, \rho)$, є справедливою зовні деякої виняткової C_0-множини (означення див. [1, с. 86], [2, с. 120]). У [8] (див. також [7]) знайдено необхідні і достатні умови на нулі цілої функції (1) нецілого порядку $\rho \in (0, +\infty)$, за яких для деякого $\rho_2 \in (0, \rho)$

$$\log |L(re^{i\varphi})| = \frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^{\rho_2}), \quad U \not\ni re^{i\varphi} \to \infty, \tag{9}$$

при цьому виняткову множину $U \subset \mathbb{C}$ можна покрити об'єднанням кругів зі скінченною сумою радіусів. В [9] для канонічного добутку (1) цілого порядку $\rho \in (0, +\infty)$ отримано достатні умови на нулі, за яких для деякого $\rho_3 \in (0, \rho)$ існує в $\mathbb{C}$ виняткова множина U, яка міститься в об'єднанні кругів зі скінченною сумою радіусів така, що

$$\log |L(re^{i\varphi})| = \widetilde{\Lambda}(re^{i\varphi}) + o(r^{\rho_3}), \quad U \not\ni re^{i\varphi} \to \infty, \tag{10}$$

де $\widetilde{\Lambda}(re^{i\varphi}) = \operatorname{Re} \Lambda(re^{i\varphi}) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} r^\rho \cos \rho\varphi \sum\limits_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} - \Delta r^\rho \left(\dfrac{1}{\rho} \cos \rho\varphi + (\varphi - \pi) \sin \rho\varphi \right), & p = \rho, \\ 0, \quad p = \rho - 1. \end{cases} \tag{11}$$

Крім цього, в [10] встановлено критерій на нулі канонічного добутку (1) нульового роду, за якого на деяких колах $\{z\colon |z| = r_k\}$ рівномірно за $\varphi \in [0, 2\pi]$ виконується

$$\log |L(r_k e^{i\varphi})| = \frac{\pi \Delta r_k^\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + O(1), \quad r_k \to +\infty.$$

Проте питання про знаходження достатніх умов на асимптотичну поведінку нулів канонічного добутку (1), за яких співвідношення (8)–(10) виконуються рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$ залишається відкритим.

Метою статті є доведення наступних тверджень, які пов'язані з дослідженням асимптотичних властивостей цілих функцій покращеного регулярного зростання [11] і, зокрема, доповнюють результати, отримані в [8–10].

Теорема 1. *Нехай $\Delta \in [0, +\infty)$, $\rho \in (0, +\infty)$ — неціле число, $p = [\rho] < \rho_1 < \rho < p + 1$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову*

$$q(t) \overset{\text{def}}{=} n(t) - \Delta t^\rho = o(t^{\rho_1}), \quad t \to +\infty. \tag{12}$$

Тоді для канонічного добутку (1) рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\log L(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi - \pi)} r^\rho + \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \to +\infty. \tag{13}$$

Теорема 2. *Нехай $\Delta \in [0, +\infty)$, $\rho \in \mathbb{N}$, $\rho_1 \in (\rho - 1, \rho)$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (12). Тоді для канонічного добутку (1) рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$*

$$\log L(re^{i\varphi}) = \Lambda(re^{i\varphi}) + \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \to +\infty, \tag{14}$$

де функція $\Lambda(re^{i\varphi})$ визначена формулою (7).

Через c_1, c_2, c_3, … будемо позначати деякі додатні сталі.

Доведення теореми 1. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Маємо ([1, с. 81], [2, с. 89], [3, с. 92])

$$\log L(re^{i\varphi}) = -z^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{p+1}(t - z)}\, dt.$$

Оцінимо модуль виразу

$$S = \log L(re^{i\varphi}) + r^{p+1} e^{i(p+1)\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^\rho dt}{t^{p+1}(t - re^{i\varphi})} = -z^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^\rho}{t^{p+1}(t - z)}\, dt. \tag{15}$$

Враховуючи (12), отримуємо ($|q(t)| \le c_1 t^{\rho_1}$, $t \in [0, +\infty)$)

$$|S| \le r^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^\rho|}{t^{p+1}|t - re^{i\varphi}|}\, dt \le c_1 r^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_1 - p - 1}}{|t - re^{i\varphi}|}\, dt = J(r, \varphi). \tag{16}$$

Покладемо $t = ur$. Тоді, використовуючи нерівність $u^2 - 2u\cos\varphi + 1 \ge (u^2 + 1)\min\{1 - \cos\varphi, 1\}$, одержимо

$$J(r, \varphi) = c_1 r^{\rho_1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1 - p - 1}}{|u - e^{i\varphi}|}\, du = c_1 r^{\rho_1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1 - p - 1}}{\sqrt{u^2 - 2u\cos\varphi + 1}}\, du \le$$

$$\leq c_1 r^{\rho_1}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\rho_1-p-1}}{\sqrt{(u^2+1)\min\{1-\cos\varphi,1\}}}\,du\leq\frac{c_2r^{\rho_1}}{\sin(\varphi/2)}. \tag{17}$$

До того ж, ([1, с. 82], [3, с. 94])

$$\Delta r^{p+1}e^{i(p+1)\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{t^\rho dt}{t^{p+1}(t-re^{i\varphi})}=\Delta r^\rho e^{i(p+1)\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\rho-p-1}du}{u-e^{i\varphi}}=-\frac{\pi\Delta r^\rho}{\sin\pi\rho}e^{i\rho(\varphi-\pi)}.$$

Звідси і з (15)–(17) випливає (13). Теорему 1 доведено. □

Наслідок 1. *За умов теореми 1, маємо*

$$\log|L(re^{i\varphi})|=\frac{\pi\Delta r^\rho}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\varphi-\pi)+\frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)},\quad r\to+\infty,$$
$$\arg L(re^{i\varphi})=\frac{\pi\Delta r^\rho}{\sin\pi\rho}\sin\rho(\varphi-\pi)+\frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)},\quad r\to+\infty,$$

рівномірно за $\varphi\in(0,2\pi)$.

Зауваження 1. *З теореми 1, як наслідок, випливає лема 1 з [8].*

Доведення теореми 2. Нехай $z=re^{i\varphi}$, $\varphi\in(0,2\pi)$ і $p=\rho$. Маємо ([2, с. 92], [3, с. 106])

$$\log L(re^{i\varphi})=\frac{z^\rho}{\rho}\sum_{\lambda_n\leq r}\lambda_n^{-\rho}-z^\rho\int_0^r\frac{n(t)dt}{t^\rho(t-z)}-\frac{z^\rho}{\rho r^\rho}n(r)-z^{\rho+1}\int_r^{+\infty}\frac{n(t)dt}{t^{\rho+1}(t-z)}.$$

Враховуючи (12), подібно як при доведенні теореми 1, отримуємо

$$\Big|\log L(re^{i\varphi})-\frac{1}{\rho}e^{i\rho\varphi}r^\rho\sum_{\lambda_n\leq r}\lambda_n^{-\rho}+\frac{\Delta}{\rho}e^{i\rho\varphi}r^\rho+\Delta e^{i\rho\varphi}r^\rho\int_0^r\frac{dt}{t-z}+\Delta e^{i(\rho+1)\varphi}r^{\rho+1}\int_r^{+\infty}\frac{dt}{t(t-z)}\Big|\leq$$

$$\leq c_3r^{\rho_1}+c_4r^\rho\int_0^r\frac{t^{\rho_1-\rho}}{|t-re^{i\varphi}|}\,dt+c_4r^{\rho+1}\int_r^{+\infty}\frac{t^{\rho_1-\rho-1}}{|t-re^{i\varphi}|}\,dt\leq c_3r^{\rho_1}+c_4r^{\rho_1}\times$$

$$\times\int_0^1\frac{u^{\rho_1-\rho}du}{\sqrt{(u^2+1)\min\{1-\cos\varphi,1\}}}+c_4r^{\rho_1}\int_1^{+\infty}\frac{u^{\rho_1-\rho-1}du}{\sqrt{(u^2+1)\min\{1-\cos\varphi,1\}}}\leq\frac{c_5r^{\rho_1}}{\sin(\varphi/2)}. \tag{18}$$

Позаяк ([2, с. 93], [9])

$$\Delta e^{i\rho\varphi}r^\rho\int_0^r\frac{dt}{t-z}+\Delta e^{i(\rho+1)\varphi}r^{\rho+1}\int_r^{+\infty}\frac{dt}{t(t-z)}=-\Delta i(\varphi-\pi)e^{i\rho\varphi}r^\rho,$$

то з (18) отримуємо (14). Нехай тепер $p=\rho-1$. Тоді ([2, с. 94], [3, с. 109])

$$\log L(re^{i\varphi})=-\frac{z^\rho}{\rho}\sum_{\lambda_n>r}\lambda_n^{-\rho}-z^\rho\int_0^r\frac{n(t)dt}{t^\rho(t-z)}-\frac{z^\rho}{\rho r^\rho}n(r)-z^{\rho+1}\int_r^{+\infty}\frac{n(t)dt}{t^{\rho+1}(t-z)}.$$

Оскільки в даному випадку ряд $\sum_{n=1}^\infty\lambda_n^{-\rho}$ є збіжним і [9] $n(t)=o(t^{\rho_1})$ $(t\to+\infty)$, то при $r\to+\infty$

$$-\frac{z^\rho}{\rho}\sum_{\lambda_n>r}\lambda_n^{-\rho}=-\frac{z^\rho}{\rho}\int_r^{+\infty}\frac{dn(t)}{t^\rho}=\frac{z^\rho}{\rho}\frac{n(r)}{r^\rho}-z^\rho\int_r^{+\infty}o(t^{\rho_1-\rho-1})\,dt=o(r^{\rho_1})=\frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}.$$

Тому, як і вище, виконується (14). Теорему 2 доведено. □

Наслідок 2. *За умов теореми 2, рівномірно за* $\varphi \in (0, 2\pi)$ *виконується*

$$\log |L(re^{i\varphi})| = \widetilde{\Lambda}(re^{i\varphi}) + \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \to +\infty,$$

$$\arg L(re^{i\varphi}) = \widehat{\Lambda}(re^{i\varphi}) + \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \to +\infty,$$

де функція $\widetilde{\Lambda}(re^{i\varphi})$ *визначена формулою (11), а* $\widehat{\Lambda}(re^{i\varphi}) = \operatorname{Im} \Lambda(re^{i\varphi}) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} r^{\rho} \sin \rho\varphi \sum\limits_{\lambda_n \le r} \lambda_n^{-\rho} - \Delta r^{\rho} \left(\dfrac{1}{\rho} \sin \rho\varphi - (\varphi - \pi) \cos \rho\varphi \right), & p = \rho, \\ 0, \quad p = \rho - 1. \end{cases}$$

Зауваження 2. З теореми 2, як наслідок, випливає лема 1 з [9].

ЛІТЕРАТУРА

1. Levin B. Ya. Lectures on entire functions. Transl. Math. Monographs, Vol. 150. Amer. Math. Soc., Providence RI, 1996. – 248 p.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
3. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.
4. Заболоцький М. В. *Теореми типу Валірона та Валірона-Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку* // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 3. – С. 315–325.
5. Борова О. І., Заболоцький М. В. *Многочленна асимптотика цілих функцій скінченного порядку* // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 6. – С. 723–732.
6. Агранович П. З., Логвиненко В. Н. *Аналог теоремы Валирона-Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей* // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 26, № 5. – С. 3–19.
7. Khabibullin B. N. *Asymptotic behavior of the difference of subharmonic functions* // Матем. студії. – 2004. – Т. 21, № 1. – С. 47–63.
8. Винницький Б. В., Хаць Р. В. *Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку* // Матем. студії. – 2004. – Т. 21, № 2. – С. 140–150.
9. Хаць Р. В. *Про асимптотичне поводження канонічного добутку цілого порядку* // Матем. студії. – 2004. – Т. 22, № 1. – С. 105–110.
10. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. *On asymptotic behaviour of entire functions of order less than one* // Матем. студії. – 2003. – Т. 19, № 1. – С. 97–105.
11. Хаць Р. В. Цілі функції покращеного регулярного зростання: Дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2006. – 125 с.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
Інститут фізики, математики та інформатики
khats@ukr.net

Надійшло 06.04.2009