УДК 512.552.12

С. І. Білявська, Б. В. Забавський

# СТАБІЛЬНИЙ РАНГ АДЕКВАТНОГО КІЛЬЦЯ

S. I. Bilavska, B. V. Zabavsky, *Stable rank of adequate ring*, Mat. Stud. **33** (2010), 212–214.

It is shown, that a stable rank of an adequate ring equals 2 and an adequate ring is Hermite ring. Moreover, it is proved that a stable rank of an adequate ring with non zero Jacobson radical equals 1. Also we consider the notion of everywhere adequate ring and prove that a stable rank of this ring is 1.

С. И. Белявская, Б. В. Забавский. *Стабильный ранг адекватного кольца* // Мат. Студії. – 2010. – Т.33, №2. – С.212–214.

В данной работе показано, что стабильный ранг адекватного кольца равен 2 и адекватное кольцо является кольцем Эрмита. Кроме того доказано, что стабильный ранг адекватного кольца с ненулевым радикалом Джекобсона равен 1. Также россматривается понятие везде адекватного кольца и доказывается, что ранг такого кольца равен 1.

Поняття адекватного кільця вперше було введено Хелмером, як клас кілець елементарних дільників, які не задовільняють ніяким умовам обриву зростаючих ланцюгів ідеалів над якими довільна матриця діагоналізується [1]. Після того з'являється ряд робіт, в яких вивчаються властивості адекватних кілець [2-6]. Зокрема, адекватні кільця з дільниками нуля в радикалі Джекобсона розглядав Капланський, а Гілман і Хенріксен показали, що комутативне регулярне кільце є адекватним. В даній роботі описано стабільний ранг адекватних та всюди адекватних кілець, також вивчається стабільний ранг адекватного кільця, радикал Джекобсона якого не є нульовий.

Під кільцем $R$ будемо розуміти комутативне кільце з $1 \neq 0$. Нагадаємо, що кільце Безу — це кільце в якому довільний скінченно породжений ідеал з кільця є головним.

**Означення 1.** *Адекватне кільце* $R$ — це кільце Безу в якому для довільних елементів $a, b \in R$, $a \neq 0$ існують елементи $r, s \in R$, такі, що $a = r \cdot s$, де $rR + bR = R$ і $\acute{s}R + bR \neq R$ для довільного необоротного дільника $\acute{s}$ елемента $s$ [2].

**Означення 2.** Рядок $(a_1, \dots a_n)$, де $a_i \in R$, $i = 1, 2, \dots n$ назвемо *унімодулярним*, якщо $a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R$.

**Означення 3.** Скажемо, що натуральне число $n$ є *стабільним рангом кільця* $R$, якщо для довільного унімодулярного рядка $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$, де $a_i \in R$, $i = 1, 2, \dots n+1$ існують такі елементи $b_1, \dots b_n \in R$, що рядок $(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 + a_{n+1}b_2, \dots a_n + a_{n+1}b_n)$ є унімодулярний [7].

---

2000 *Mathematics Subject Classification:* 16U80, 16S50.

Таким чином, кільце $R$ є кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких що $aR + bR = R$ існує елемент $t \in R$, що $a + bt$ — зворотній елемент кільця $R$ [8].

Подібно, кільце $R$ є кільцем стабільного рангу 2, якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$ виконується рівність $(a + cx)R + (b + cy)R = R$ для деяких елементів $x, y \in R$ [9].

**Теорема 1.** *Нехай $R$ — адекватне кільце, тоді стабільний ранг $R$ рівний 2.*

*Доведення.* Нехай $aR+bR+cR = R$. Якщо $a = 0$, тоді $bR+cR = R$, тобто $(b+a\cdot 0)R+(c+a\cdot 0)R = R$. Ми бачимо, що в даному випадку виконується умова, що визначає стабільний ранг 2. Нехай $a \neq 0$, тоді згідно означення кільця $R$ існують елементи $r, s \in R$ такі, що $a = r \cdot s$, де $rR + bR = R$ і $\acute{s}R + bR \neq R$ для довільного $\acute{s} \in R$, такого, що $sR \subset \acute{s}R \neq R$. Покажемо, що $aR+(b+cr)R = R$. Дійсно, якщо $aR+(b+cr)R = \delta R$, де $\delta$ — незворотній елемент $R$, тоді $\delta$ є дільником $a = r \cdot s$. Якщо $\delta R+rR = hR$, де $h$ — незворотній елемент $R$, тоді $h$ є дільником елемента $b+cr \in R$. Оскільки $h$ є дільником $r$, тоді $h$ є дільником елемента $b$. Але це неможливо, оскільки $rR + bR = R$. Якщо ж $\delta$ є дільником елемента $s$, то згідно визначення елемента $s$, маємо $\delta R+bR = \alpha R$, де $\alpha$ — незворотній елемент $R$. Так як $\delta$ є дільником $b+cr$ і $\alpha$ є дільником $\delta$, тоді $\alpha$ є дільником $b+cr$. Але це неможливо, оскільки $aR+bR+cR = R$. Отже, $aR+(b+cr)R = R$, тобто $(a+c\cdot 0)R+(b+cr)R = R$, а це умова, яка визначає стабільний ранг 2. Звідси $R$ є кільцем стабільного рангу 2. □

**Означення 4.** Нагадаємо, що комутативне кільце $R$ називається *кільцем Ерміта*, якщо для довільного $a, b \in R$ існує зворотня матриця $P$ порядку 2 і елемент $d \in R$, такі, що $(a, b)P = (d, 0)$ [2].

Згідно [10] отримуємо наступний наслідок.

**Теорема 2.** *Адекватне кільце є кільцем Ерміта.*

**Теорема 3.** *Нехай $R$ — адекватне кільце, таке, що його радикал Джекобсона $J(R)$ є ненульовим, тоді стабільний ранг $R$ дорівнює 1.*

*Доведення.* Нехай $bR + cR = R$, нам потрібно довести, що існує елемент $t \in R$ такий що $b + ct$ — зворотній елемент $R$. Нехай $a \in J(R)$, $a \neq R$ тоді $aR + bR + cR = R$. Згідно доведеного вище існує $r \in R$ такий, що $aR + (b + cr)R = R$. Оскільки $a \in J(R)$, тоді $(b + cr)R = R$, що і потрібно довести. Тобто $R$ — кільце стабільного рангу 1. □

**Означення 5.** Нагадаємо, що комутативне кільце Безу називається *всюди адекватним*, якщо для довільних елементів $a, b$ (зокрема $a = 0$) існують такі елементи $r, s \in R$ такі що $a = r\cdot s$, де $rR+bR = R$ і $\acute{s}R+bR \neq R$ для довільного $\acute{s} \in R$ такого що $sR \subset \acute{s}R \neq R$ [11].

Прикладами всюди адекватних кілець можуть слугувати регулярні кільця, кільця нормування [3].

**Теорема 4.** *Стабільний ранг всюди адекватного кільця рівний 1.*

*Доведення.* Нехай $R$ всюди адекватне кільце і $aR + bR = R$. Оскільки $R$ всюди адекватне, то $0 = r \cdot s$, де $rR + aR = R$ і $\acute{s}R + aR \neq R$ для довільного елемента $\acute{s}$, такого що $sR \subset \acute{s}R \neq R$, тоді очевидно, згідно доведення у теоремі 1 маємо $0 \cdot R + (a + br)R = R$, тобто $(a + br) = R$, що і потрібно було довести. □

## ЛІТЕРАТУРА


1. Helmer O. *The elementary divisor for certain rings without chain conditions* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – V. 49, №2. – P. 225–236.
2. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 66. – P. 464–491.
3. Larsen M., Levis W., Shores T. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* // Tran. Amer. Soc. – 1949. – V. 66. – P. 464–491.
4. Комарницький М.Я., Забавський Б.В. *Зауваження про адекватні кільця* // Вісник Львівського університету. – 1988. – С. 39–43.
5. Gilman L., Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor rings* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956 – V. 82. – P. 362–365.
6. Brewer J. W., Conrad P., Moutgomery H. *Lattice ordered groups and conjecture for adequate domains* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – V. 43, №1 – P. 31–35.
7. Vaserstein L.N. *The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces*// Functional.Anal.Appl. – 1971. – V. 5. – P. 102–110.
8. Vaserstein L.N. *Bass's first stable range condition* // J. Pure. Appl. Alg. – 1984. – V. 34. – P. 319–330.
9. Menal P., Mongasi J. *On regular rings with stable range 2* // J. Pure Appl. Alg. – 1982. – V. 24. – P. 25–40.
10. Забавський Б.В. *Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2* // Укр. мат. журнал. – 2003. – Т. 55, №4. – P. 550–554.
11. Забавський Б.В. *Адекватні кільця елементарних дільників зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів* // В збірку "Алгебра і топологія", Львів, ЛДУ. – 1996. – С. 74–79.


Львівський національний університет імені Івана Франка
механіко-математичний факультет

*Надійшло 09.12.2008*