УДК 519.217

М. М. Осипчук, М. І. Портенко

ПРО КІЛЬКІСТЬ ПЕРЕТИНІВ ДОВІЛЬНОГО РІВНЯ ПОСЛІДОВНІСТЮ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ З ПЕРІОДИЧНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

M. M. Osypchuk, N. I. Portenko. *On the number of crossings of an arbitrary level by the sequence of diffusion processes with the periodic coefficients*, Mat. Stud. **33** (2010), 199–211.

A limit theorem on the number of crossings of an arbitrary level by the sequence of diffusion processes $(x_n(t))_{t\geq 0}$, $n = 1, 2, \ldots$, is investigated under the assumption that the drift and diffusion coefficients are given, respectively, by $a_n(x) = na(nx)$ and $b_n(x) = b(nx)$ for $x \in \mathbb{R}$ and n being an integer, where $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ and $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ are given periodic functions with the same period.

М. М. Осипчук, Н. И. Портенко. *О количестве пересечений фиксированного уровня последовательностью диффузионных процессов с периодическими коэффициентами* // Мат. Студії. – 2010. – Т.33, №2. – C.199–211.

В работе доказывается предельная теорема для количества пересечений фиксированного уровня последовательностью диффузионных процессов $(x_n(t))_{t\geq 0}$, $n = 1, 2, \ldots,$ с коэффициентом переноса $a_n(x) = na(nx)$, $x \in \mathbb{R}$ и коэффициентом диффузии $b_n(x) = b(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, где функции $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$, $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ периодические с общим периодом.

Вступ. Нехай на дійсній осі, яка позначатиметься через $\mathbb{R}$, задані неперервні періодичні функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ зі спільним періодом. Найменший додатний період цих функцій позначимо через l. Припустимо, що ці функції задовольняють такі умови

$$\inf_{x\in[0;l)} b(x) > 0; \quad \int_0^l \frac{a(x)}{b(x)}\, dx = 0. \tag{1}$$

За цих умов функція A аргументу $x \in \mathbb{R}$, яка визначається рівністю

$$A(x) = \int_0^x \frac{a(y)}{b(y)}\, dy,$$

також є періодичною, а отже, обмеженою. Якщо для $x \in \mathbb{R}$ покласти

$$F(x) = \int_0^x e^{-2A(y)} dy, \quad H(x) = \int_0^x e^{2A(y)} \frac{dy}{b(y)},$$

то ці функції будуть задовольняти умови

$$\frac{1}{x}F(x) \to \varkappa_F, \quad \frac{1}{x}H(x) \to \varkappa_H,$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 60J60, 60H10.

коли $x \to \pm\infty$, де

$$\varkappa_F = \frac{1}{l}\int_0^l e^{-2A(y)}dy, \quad \varkappa_H = \frac{1}{l}\int_0^l e^{2A(y)}\frac{dy}{b(y)}.$$

Очевидно, $\varkappa_F > 0$ та $\varkappa_H > 0$. Позначатимемо їх добуток через $\varkappa$.

Для натуральних n та $x \in \mathbb{R}$ покладемо $a_n(x) = na(nx)$ та $b_n(x) = b(nx)$ і розглянемо дифузійний процес $(x_n(t))_{t\geq 0}$ з коефіцієнтом переносу $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та коефіцієнтом дифузії $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$. Якщо виконуються умови (1), то послідовність дифузійних процесів $(x_n(\cdot))_{n\geq 1}$ слабко збігається до випадкового процесу $\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}w(t)\right)_{t\geq 0}$, де $(w(t))_{t\geq 0}$ — стандартний вінерів процес. Це твердження вперше було доведене Г. Л. Кулінічем в [1], [2] (див. також [3]).

Фіксуємо тепер деяке $\alpha \in \mathbb{R}$ і позначимо через $\xi_k^{(n,m)}$ для натуральних k, m та n випадкову величину, яка приймає значення 1 у разі, якщо випадкові величини $x_n\left(\frac{k-1}{m}\right)$ та $x_n\left(\frac{k}{m}\right)$ приймають значення по різні боки від точки α на дійсній осі, і значення 0 в протилежному випадку:

$$\xi_k^{(n,m)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \left(x_n\left(\frac{k-1}{m}\right) - \alpha\right)\left(x_n\left(\frac{k}{m}\right) - \alpha\right) < 0; \\ 0, & \text{якщо } \left(x_n\left(\frac{k-1}{m}\right) - \alpha\right)\left(x_n\left(\frac{k}{m}\right) - \alpha\right) \geq 0. \end{cases}$$

Тоді випадкова величина

$$\nu_N^{(n,m)} = \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(n,m)} \tag{2}$$

при натуральних N визначає кількість перетинів рівня α послідовністю випадкових величин $x_n(0)$, $x_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $x_n\left(\frac{N}{m}\right)$. Нашим завданням в цій замітці буде знайти умови за яких величини $\nu_N^{(n,m)}$ з певним нормуючим множником мають граничний розподіл, коли в деякий узгоджений спосіб числа n, m та N необмежено зростають.

Випадок $\alpha = 0$ розглядався (за дещо загальніших умов) в роботах [4], [5]. Як ми побачимо, у випадку довільного $\alpha \in \mathbb{R}$ ситуація значно складніша, а саме, слід розрізняти два випадки:

а) існують такі цілі числа p та q (їх можна вважати взаємно простими, причому $q > 0$), що $\alpha = \frac{p}{q}l$;

б) число $\frac{\alpha}{l}$ є ірраціональним.

У першому випадку множина натуральних чисел розбивається на q підпослідовностей $(n_k^{(i)})_{k\geq 1}$, $i = 0, 1, ..., q-1$, таких, що для кожного такого i маємо $\alpha n_k^{(i)} = \frac{i}{q}l + m^{(i,k)}l$, де $m^{(i,k)}$ — ціле число. По кожній з таких підпослідовностей величини $\nu_N^{(n,m)}$ (N та m пов'язані з n) з певним нормуючим множником мають граничні розподіли. Всі ці розподіли — одного типу, але мають параметри, що відрізняються в різних розподілів. У випадку б) для кожного $\beta \in [0; l)$ існує підпослідовність $(n_k(\beta))_{k\geq 1}$ послідовності натуральних чисел, для якої $\left\{\frac{\alpha}{l}n_k(\beta)\right\} l \to \beta$ при $k \to \infty$, де $\{x\}$ означає дробову частину числа $x \in \mathbb{R}$. І знову кожна така підпослідовність визначає граничний розподіл, подібний до тих, що описано вище.

При доведенні цих теорем ми використовуємо метод роботи [4] з тією відмінністю, що в цій роботі наші міркування ґрунтуються на традиційному (в теорії диференціальних рівнянь) зображенні резольвенти дифузійного процесу (див., наприклад, [6], [7]) в той час як в [4] використано інше зображення згаданої резольвенти, яке ґрунтується на тому факті, що дифузійний процес є результатом двох трансформацій вінерового процесу: перетворення фазового простору та випадкової заміни часу.

Структура роботи така: в параграфі 1 ми наводимо деякі результати теорії дифузійних процесів, які в параграфі 2 використовуються для доведення основних теорем.

Стаття написана під час візиту другого співавтора до м. Івано–Франківська на запрошення Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника прочитати курс лекцій для студентів–математиків. Обидва автори щиро вдячні цьому університету за запрошення, що дало їм змогу не лише плідно попрацювати разом, а ще й спільно насолодитися пишними барвами прикарпатської осені.

Користуємось нагодою подякувати рецензентові нашої статті за низку зауважень, які сприяли поліпшенню викладу матеріалу, а також за те, що він звернув нашу увагу на існування альтернативного методу доведення основного результату роботи.

1. Дифузійний процес.

1.1. Означення. Кожна пара неперервних обмежених функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ та інтервалі $[0;+\infty)$, відповідно, визначає еліптичний оператор $\mathcal{L}$, який діє на двічі неперервно диференційовну функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}}$ з дійсними значеннями за правилом

$$\mathcal{L}\varphi(x) = a(x)\varphi'(x) + \frac{1}{2}b(x)\varphi''(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Нехай задана така пара функцій. Неперервний однорідний процес Маркова $(x(t))_{t\geq 0}$ у фазовому просторі $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (через $\mathcal{B}$ позначається σ–алгебра борельових підмножин дійсної осі) з ймовірністю переходу $(P(t,x,\Gamma))_{t>0,x\in\mathbb{R},\Gamma\in\mathcal{B}}$ зветься *дифузійним* з коефіцієнтом переносу $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та коефіцієнтом дифузії $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, якщо відповідний еліптичний оператор $\mathcal{L}$ та ймовірність переходу P задовольняють співвідношення

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)P(t,x,dy) = \varphi(x) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}\varphi(y)P(\tau,x,dy) \tag{3}$$

при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}$, якою б не була двічі неперервно диференційовна та обмежена разом зі своїми похідними функція $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$.

Зрозуміло, що рівність (3) в тих, чи інших випадках поширюється і на деякі необмежені функції.

1.2. Теорема існування та єдиності. Відповідь на питання, якими мають бути задані функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, щоб існував єдиний дифузійний процес $(x(t))_{t\geq 0}$ в $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ з цими коефіцієнтами, дає наступне твердження (про достатні умови існування та єдиності дифузійного процесу), що є частковим випадком загальної теореми Струка–Варадана (див. [8]).

Нехай задані неперервні обмежені функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ та (відкритому!) інтервалі $(0;+\infty)$ відповідно. Тоді існує дифузійний процес $(x(t))_{t\geq 0}$ в $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, для якого функція $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ є коефіцієнтом переносу, а функція $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ є коефіцієнтом дифузії. Більше того, такий процес єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності. Це означає, що всі такі процеси мають одну й ту ж ймовірність переходу.

Зауважимо, що якщо пара неперервних періодичних функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови (1), то їй відповідає єдиний дифузійний процес у фазовому просторі $(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

Позначимо через $\mathbf{B}$ сукупність всіх обмежених борельових функцій $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ з нормою $\|\varphi\|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|$, а через $\mathbf{C}$ підпростір $\mathbf{B}$, що складається з усіх неперервних (обмежених) функцій.

Окрім твердження про існування та єдиність дифузійного процесу за сформульованих вище умов, Струк та Варадан довели, що він є феллеровим, тобто, що при фіксованих $t>0$ та $\varphi\in\mathbf{C}$ функція $\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)P(t,x,dy)\right)_{x\in\mathbb{R}}$ також належить до $\mathbf{C}$.

1.3. Резольвента. Фіксуємо пару неперервних періодичних функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, які задовольняють умови (1), і нехай $P(t,x,\Gamma)$ ($t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $\Gamma\in\mathcal{B}$) — ймовірність переходу відповідного дифузійного процесу $(x(t))_{t\geq 0}$. Подальші твердження будуть стосуватись саме цього процесу, хоча більшість з них залишаються справедливими і за значно загальніших умов.

Для $\lambda>0$ функція R_λ аргументів $x\in\mathbb{R}$ та $\Gamma\in\mathcal{B}$, що визначається формулою

$$R_\lambda(x,\Gamma)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t,x,\Gamma)dt,$$

зветься *резольвентним ядром.* При фіксованих $\lambda>0$ та $x\in\mathbb{R}$ функція $R_\lambda(x,\cdot)$ є мірою на $\mathcal{B}$. Ця функція породжує лінійний оператор $\mathcal{R}_\lambda\colon\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, що діє на функцію $\varphi\in\mathbf{C}$ за правилом

$$\mathcal{R}_\lambda\varphi(x)=\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)R_\lambda(x,dy).$$

Цей оператор зветься *резольвентою* процесу $(x(t))_{t\geq 0}$.

З формули (3) дістаємо рівність

$$\lambda\mathcal{R}_\lambda\varphi(x)=\varphi(x)+\mathcal{R}_\lambda\mathcal{L}\varphi(x), \tag{4}$$

що має місце при всіх $\lambda>0$ та $x\in\mathbb{R}$ для кожної двічі неперервно диференційовної функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}}$, обмеженої разом зі своїми похідними.

Виявляється, що ядро $R_\lambda(x,\cdot)$ є абсолютно неперервним відносно лебегової міри ($R_\lambda(x,\Gamma)=\int_\Gamma r_\lambda(x,y)dy$ при $\lambda>0$, $x\in\mathbb{R}$ та $\Gamma\in\mathcal{B}$), і його щільність — ядро r_λ — допускає певне зображення, добре відоме в теорії диференціальних рівнянь (див., наприклад, [6], [7]). Опишемо це зображення детальніше.

Визначимо функції $(v_k(x))_{x\in\mathbb{R}}$ для $k=0,1,\ldots$, поклавши $v_0(x)\equiv 1$, а при $k\geq 1$

$$v_k(x)=\int_0^x\left[\int_0^y v_{k-1}(z)dH(z)\right]dF(y),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Можна довести (див. [7]), що ряд $\sum_{k=0}^\infty(2\lambda)^k v_k(x)$ збігається локально рівномірно відносно $\lambda\in\mathbb{R}$ та $x\in\mathbb{R}$, і його сума, позначимо її через $v(x,\lambda)$, при додатних λ та $x\in\mathbb{R}$ допускає двосторонні оцінки

$$\operatorname{ch}\left(x\sqrt{2\lambda\mu_-}\right)\leq v(x,\lambda)\leq\operatorname{ch}\left(x\sqrt{2\lambda\mu_+}\right) \tag{5}$$

зі сталими $\mu_- > 0$ та $\mu_+ \geq \mu_-$, які визначаються рівностями

$$\mu_- = \inf_{y\in\mathbb{R}} F'(y) \cdot \inf_{y\in\mathbb{R}} H'(y), \quad \mu_+ = \sup_{y\in\mathbb{R}} F'(y) \cdot \sup_{y\in\mathbb{R}} H'(y).$$

Простим диференціюванням встановлюємо, що функція v при $\lambda > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ є розв'язком рівняння

$$\mathcal{L}v(x,\lambda) = \lambda v(x,\lambda). \tag{6}$$

Тепер для $\lambda > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ покладемо

$$v_+(x,\lambda) = v(x,\lambda)\int_x^\infty \frac{dF(y)}{v(y,\lambda)^2}, \quad v_-(x,\lambda) = v(x,\lambda)\int_{-\infty}^x \frac{dF(y)}{v(y,\lambda)^2}.$$

Неважко перевірити, що це — пара лінійно незалежних розв'язків рівняння (6) і що вронскіан цієї пари, позначимо його через $W(x,\lambda)$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, задається рівністю $W(x,\lambda) = c(\lambda)F'(x)$, де

$$c(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dF(y)}{v(y,\lambda)^2}, \quad \lambda > 0.$$

Тепер для ядра r_λ можемо записати формулу (див. [7])

$$r_\lambda(x,y) = \begin{cases} \frac{2v_-(x,\lambda)v_+(y,\lambda)}{W(y,\lambda)b(y)}, & \text{при } x \leq y; \\ \\ \frac{2v_-(y,\lambda)v_+(x,\lambda)}{W(y,\lambda)b(y)}, & \text{при } x \geq y. \end{cases} \tag{7}$$

що має місце при всіх $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$.

1.4. Щільність ймовірності переходу. Якщо на додаток до умов (1) функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняють умову Гельдера, то ймовірність переходу P відповідного дифузійного процесу допускає зображення

$$P(t,x,\Gamma) = \int_\Gamma g(t,x,y)dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ \Gamma \in \mathcal{B},$$

де функція g є фундаментальним розв'язком параболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Метод параметрикс (див. [9]) дозволяє не лише побудувати фундаментальний розв'язок рівняння (8), а й дістати оцінки

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^k}{\partial x^k} g(t,x,y)\right| \leq K t^{-\frac{k+1}{2}-j} \exp\left\{-\mu\frac{(y-x)^2}{t}\right\}, \tag{9}$$

що мають місце при $k = 0,1$ та $j = 0,1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ та $t \in (0;T]$, яким би не було $T < +\infty$, з деякою сталою $\mu > 0$ та сталою $K > 0$, яка може залежати від T. За певних умов, як показують результати роботи [10], константу K можна вибрати незалежною від T, і тоді оцінка (9) виконується при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$. При цьому жодних додаткових умов, окрім гладкості функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, в нашій ситуації (тобто, коли ці функції задовольняють умови (1)) вимагати не треба.

Отже, надалі будемо вважати функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, що задовольняють умови (1), достатньо гладкими, так що відповідний фундаментальний розв'язок рівняння (8) задовольняє нерівності (9) при $k = 0, 1$ та $j = 0, 1$ в області $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ з деякими додатними сталими $K > 0$ та $\mu > 0$.

Нижче буде також використана така властивість функції g: якими б не були $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$, має місце рівність

$$g(t, x, y) = g(t, x + l, y + l). \tag{10}$$

Для її доведення слід звернути увагу на ту обставину, що розв'язком рівняння (8) з початковою умовою $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}}$ (вважаємо, що $\varphi \in \mathbf{C}$) поряд з функцією

$$\int_{\mathbb{R}} g(t, x, y)\varphi(y)dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

є також функція

$$\int_{\mathbb{R}} g(t, x + l, y)\varphi(y - l)dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Єдиність обмеженого розв'язку такої задачі і приводить до (10).

2. Гранична теорема.

2.1. Послідовність процесів. Фіксуємо пару неперервних періодичних зі спільним періодом функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, які задовольняють умови (1) і є досить гладкими, так що щільність ймовірності переходу відповідного дифузійного процесу задовольняє нерівності (9). Як вже зазначалось у вступі, будуть розглядатися дифузійні процеси $(x_n(t))_{t\geq 0}$, що відповідають коефіцієнтам $a_n(x) = na(nx)$ та $b_n(x) = b(nx)$ для натуральних n та $x \in \mathbb{R}$.

Введені в параграфі об'єкти, пов'язані з процесом $x(t) = x_1(t)$, $t \geq 0$, будемо позначати тими ж літерами і наділяти їх індексом n (вгорі, чи внизу), якщо вони будуть асоціюватись з процесом $(x_n(t))_{t\geq 0}$. Так, наприклад, при $x \in \mathbb{R}$ та $n = 1, 2, \ldots$ маємо

$$A_n(x) = \int_0^x \frac{a_n(y)}{b_n(y)}\, dy = \int_0^{nx} \frac{a(y)}{b(y)}\, dy = A(nx),$$

$$F_n(x) = \int_0^x e^{-2A_n(y)}dy = \frac{1}{n}\int_0^{nx} e^{-2A(y)}dy = \frac{1}{n}F(nx),$$

$$H_n(x) = \int_0^x e^{2A_n(y)}\frac{dy}{b_n(y)} = \frac{1}{n}H(nx),$$

$$v_0^{(n)}(x) \equiv 1, \quad v_k^{(n)}(x) = \int_0^x \left[\int_0^y v_{k-1}^{(n)}(z)dH_n(z)\right] dF_n(y),\ k \geq 1,$$

$$v^{(n)}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(2\lambda)^k v_k^{(n)}(x)$$

і т.п. Легко бачити, що сталі $\mu_-^{(n)}$ та $\mu_+^{(n)}$ не залежать від n і збігаються відповідно з μ_- та μ_+. Звідси випливає, що функція $(v^{(n)}(x, \lambda))_{x\in\mathbb{R},\lambda>0}$ задовольняє нерівності (5) при всіх $n = 1, 2, \ldots$. Це дозволяє стверджувати, що інтеграли типу $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{v^{(n)}(y,\lambda)}$ збігаються рівномірно відносно $n = 1, 2, \ldots$. Неважко тепер бачити, що виконуються співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} v^{(n)}(x,\lambda) = \operatorname{ch} x\sqrt{2\lambda\varkappa}, \quad \lim_{n\to\infty} c_n(\lambda) = \frac{2\varkappa_F}{\sqrt{2\lambda\varkappa}},$$

$$\lim_{n\to\infty} v_+^{(n)}(x,\lambda) = \frac{\varkappa_F}{\sqrt{2\lambda\varkappa}}\, e^{-x\sqrt{2\lambda\varkappa}}, \quad \lim_{n\to\infty} v_-^{(n)}(x,\lambda) = \frac{\varkappa_F}{\sqrt{2\lambda\varkappa}}\, e^{x\sqrt{2\lambda\varkappa}},$$

причому всі вони (за винятком другого) виконуються локально рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $\hat{\mathbf{C}}$ підпростір $\mathbf{C}$, що складений з функцій φ, для яких $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$. Наведені вище співвідношення разом з такими

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \varkappa_F x, \quad \lim_{n\to\infty} H_n(x) = \varkappa_H x$$

(вони також виконуються локально рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$) показують, що для $\varphi \in \hat{\mathbf{C}}$ справджуються співвідношення (див. деталі в [7])

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_\lambda^{(n)}\varphi(x) = \hat{\mathcal{R}}_\lambda\varphi(x)$$

рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$ (при фіксованому $\lambda > 0$), де покладено

$$\hat{\mathcal{R}}_\lambda\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\varkappa}{2\lambda}} \exp\left\{-|y-x|\sqrt{2\lambda\varkappa}\right\} \varphi(y)dy$$

для $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що $(\hat{\mathcal{R}}_\lambda)_{\lambda>0}$ — резольвента процесу $\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa}} w(t)\right)_{t\geq 0}$, де $(w(t))_{t\geq 0}$ — стандартний вінерів процес.

Звернемо увагу читача на ту обставину, що за наших припущень послідовність ядер $r_\lambda^{(n)}$ не є збіжною, коли $n \to \infty$.

Щільність g_n ймовірності переходу процесу $(x_n(t))_{t\geq 0}$ визначається рівністю

$$g_n(t,x,y) = ng(n^2t, nx, ny), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},$$

яким би не було $n = 1, 2, \ldots$, де g — щільність ймовірності переходу процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ (або ж $(x_1(t))_{t\geq 0}$). Неважко зрозуміти, що функція g_n при кожному $n = 1, 2, \ldots$ задовольняє нерівності (9) зі сталими K та μ, що не залежать від n.

2.2. Допоміжні результати. Фіксуємо деяке $\alpha \in \mathbb{R}$ і покладемо $D_\alpha^- = \{x \in \mathbb{R} \colon x < \alpha\}$ та $D_\alpha^+ = \{x \in \mathbb{R} \colon x > \alpha\}$. Через індикаторні функції (для $\Gamma \subset \mathbb{R}$ індикаторна функція $\mathbb{I}_\Gamma$ визначається рівністю $\mathbb{I}_\Gamma(x) = 1$, якщо $x \in \Gamma$, та $\mathbb{I}_\Gamma(x) = 0$, якщо $x \notin \Gamma$) введені у вступі величини $\xi_k^{(n,m)}$ для натуральних k, n та m можна записати так

$$\xi_k^{(n,m)} = \mathbb{I}_{D_\alpha^-}\left(x_n\left(\frac{k-1}{m}\right)\right)\mathbb{I}_{D_\alpha^+}\left(x_n\left(\frac{k}{m}\right)\right) + \mathbb{I}_{D_\alpha^+}\left(x_n\left(\frac{k-1}{m}\right)\right)\mathbb{I}_{D_\alpha^-}\left(x_n\left(\frac{k}{m}\right)\right).$$

Визначимо для натуральних n та m функцію $q^{(n,m)}$ аргументу $x \in \mathbb{R}$, поклавши

$$q^{(n,m)}(x) = \mathbb{I}_{D_\alpha^-}(x)\int_{D_\alpha^+} g_n\left(\frac{1}{m}, x, y\right)dy + \mathbb{I}_{D_\alpha^+}(x)\int_{D_\alpha^-} g_n\left(\frac{1}{m}, x, y\right)dy.$$

Очевидно, $q^{(n,m)}(x) = \mathbb{E}_x\xi_1^{(n,m)}$, де через $\mathbb{E}_x$ позначено символ математичного сподівання при умові, що $x_n(0) = x$. Важливість цих функцій для нас пояснюється відомою лемою Скорохода[1] (див. [11]), яка твердить, що величини $n^{-1}\nu_N^{(n,m)}$ мають граничний розподіл тоді і тільки тоді, коли він існує для величин

$$\eta_N^{(n,m)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N} q^{(n,m)}\left(x_n\left(\frac{k}{m}\right)\right), \tag{11}$$

причому обидва граничні розподіли (у разі їх існування) збігаються один з одним. Нагадаємо, що величини $\nu_N^{(n,m)}$ визначаються рівністю (2) і є при натуральних N кількостями перетинів рівня α послідовністю випадкових величин $x_n(0)$, $x_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $x_n\left(\frac{N}{m}\right)$.

Для $\theta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ та натуральних n, m, N покладемо

$$u_N^{(n,m)}(x,\theta) = \mathbb{E}_x \exp\left\{i\theta\eta_N^{(n,m)}\right\}.$$

Ця функція задовольняє рівняння

$$u_N^{(n,m)}(x,\theta) = 1 + \sum_{k=0}^{N}\int_{\mathbb{R}}\left(1 - e^{-\frac{i\theta}{n}q^{(n,m)}(y)}\right)u_{N-k}^{(n,m)}(y,\theta)g_n\left(\frac{k}{m},x,y\right)dy.$$

В цій рівності (і далі) вважаємо, що $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)g_n(0,x,y)dy = \varphi(x)$.

Якщо покласти $u^{(n,m)}(t,x,\theta) = u_{[mt]}^{(n,m)}(x,\theta)$ для $t \geq 0$, де $[mt]$ — ціла частина числа mt, то попереднє рівняння можна записати так

$$u^{(n,m)}(t,x,\theta) = 1+m\int_{\left[0;\frac{[mt]+1}{m}\right)}ds\int_{\mathbb{R}}\left(1 - e^{-\frac{i\theta}{n}q^{(n,m)}(y)}\right)u^{(n,m)}(s,y,\theta)g_n\left(\frac{[mt]-[ms]}{m},x,y\right)dy. \tag{12}$$

Поряд з цим розглянемо рівняння

$$\tilde{u}^{(n,m)}(t,x,\theta) = 1 + i\theta\frac{m}{n}\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}g_n(s,x,y)\tilde{u}^{(n,m)}(t-s,y,\theta)q^{(n,m)}(y)dy \tag{13}$$

в області $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ (тут $\theta \in \mathbb{R}$ — параметр). Добре відомо, що єдиним обмеженим розв'язком рівняння (13) є функція

$$\tilde{u}^{(n,m)}(t,x,\theta) = \mathbb{E}_x \exp\left\{i\theta\frac{m}{n}\int_0^t q^{(n,m)}(x_n(s))ds\right\}.$$

Сформулюємо тепер деякі допоміжні результати, які будуть мати своїм наслідком, зокрема, факт асимптотичного зближення функцій $u^{(n,m)}$ та $\tilde{u}^{(n,m)}$ при фіксованих $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $\theta \in \mathbb{R}$, коли n та m необмежено зростають в такий спосіб, що $\frac{n^2}{m} \to \tau$ при $0 < \tau < \infty$.

[1]Хоча лема сформульована для випадкових блукань, проте вона прямо переноситься на ланцюги Маркова. Саме таке узагальнення леми Скорохода використовується в статті.

Лема 1. *Для всіх натуральних m та n, що задовольняють нерівність $\frac{n^2}{m} \le M$ з деякою сталою $M > 0$, справджується оцінка*

$$n \int_{\mathbb{R}} q^{(n,m)}(x)\ dx \le \mu^{-1} K M^{1/2}, \tag{14}$$

де K та μ — сталі з нерівності (9).

Доведення. Враховуючи зв'язок між функціями g та g_n, можемо записати

$$n \int_{\mathbb{R}} q^{(n,m)}(x)\ dx = n \left(\int_{-\infty}^{\alpha} dx \int_{\alpha}^{\infty} g_n\left(\frac{1}{m}, x, y\right) dy + \int_{\alpha}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\alpha} g_n\left(\frac{1}{m}, x, y\right) dy \right) =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{0}^{\infty} g\left(\frac{n^2}{m}, x + n\alpha, y + n\alpha\right) dy + \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{0} g\left(\frac{n^2}{m}, x + n\alpha, y + n\alpha\right) dy$$

Оцінка (9) тепер приводить до нерівності

$$n \int_{\mathbb{R}} q^{(n,m)}(x)\ dx \le K \frac{m^{1/2}}{n} \left(\int_{-\infty}^{0} dx \int_{0}^{\infty} e^{-\mu \frac{m}{n^2}(y-x)^2} dy + \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{0} e^{-\mu \frac{m}{n^2}(y-x)^2} dy \right),$$

з якої (14) отримується простим обчисленням. □

Наступне твердження подібне до того, що його для випадку $\alpha = 0$ доведено в [4].

Для обмеженої вимірної функції ψ на $[0;\infty) \times \mathbb{R}$ покладемо при $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$ і натуральних n та m

$$\Phi^{(n,m)}(t, x, \psi) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} g_n(s, x, y) \psi(t - s, y) n q^{(n,m)}(y) dy.$$

Лема 2. *Для кожного набору сталих $T > 0$, $L > 0$, $M > 0$ та $\varepsilon > 0$ відшукається таке $\rho > 0$, що $|\Phi^{(n,m)}(t, x, \psi) - \Phi^{(n,m)}(t', x', \psi)| < \varepsilon$ при всіх натуральних m та n, для яких $\frac{n^2}{m} \le M$, а також всіх $t \in [0; T]$, $t' \in [0; T]$, $x \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}$ і функціях ψ з властивістю $\sup\limits_{s \ge 0,\ x \in \mathbb{R}} |\psi(s, x)| \le L$, якщо тільки виконується нерівність $|t - t'| + |x - x'| \le \rho$.*

Доведення. Для $0 \le t < t'$ можемо записати

$$\Phi^{(n,m)}(t', x, \psi) - \Phi^{(n,m)}(t, x, \psi) = \int_t^{t'} ds \int_{\mathbb{R}} g_n(t' - s, x, y) \psi(s, y) n q^{(n,m)}(y) dy +$$
$$+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} (g_n(t' - s, x, y) - g_n(t - s, x, y)) \psi(s, y) n q^{(n,m)}(y) dy \tag{15}$$

Якщо $0 \le t < t' \le T$, $x \in \mathbb{R}$, $\frac{n^2}{m} \le M$, а ψ така, що $|\psi(s, y)| \le L$ при всіх $(s, y) \in [0;\infty) \times \mathbb{R}$, то перший доданок в правій частині (15) оцінюється виразом

$$LK \int_t^{t'} \frac{ds}{\sqrt{t' - s}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ -\mu \frac{(y - x)^2}{t' - s} \right\} n q^{(n,m)}(y) dy \le \frac{2}{\mu} L K^2 M^{1/2} (t' - t)^{1/2},$$

що стає як завгодно малим, якщо $t' - t$ досить мале (тут використана лема 1 і факт, що функція g_n задовольняє (9) при всіх n).

Для оцінки другого доданку в правій частині (15) розіб'ємо інтервал інтегрування $[0;t]$ на два проміжки $[0;t-\gamma]$ та $[t-\gamma;t]$. Інтеграл по проміжку $[t-\gamma;t]$ буде малим за рахунок вибору γ, що випливає з такої оцінки (знову використовується (9) при $k=0$ та $j=0$)

$$\Big|\int_{t-\gamma}^{t} ds \int_{\mathbb{R}} (g_n(t'-s,x,y)-g_n(t-s,x,y))\psi(s,y)nq^{(n,m)}(y)dy\Big| \le$$
$$\le \mu^{-1}LK^2M^{1/2}\int_{t-\gamma}^{t}((t'-s)^{-1/2}+(t-s)^{-1/2})ds \le \frac{4}{\mu}LK^2M^{1/2}\gamma^{1/2}.$$

Тепер інтеграл по проміжку $[0;t-\gamma]$ можна оцінити з використанням теореми Лагранжа про скінчені прирости та оцінки (9) при $k=0$ та $j=1$. Маємо

$$\Big|\int_{0}^{t-\gamma} ds \int_{\mathbb{R}} (g_n(t'-s,x,y)-g_n(t-s,x,y))\psi(s,y)nq^{(n,m)}(y)dy\Big| \le$$
$$\le \mu^{-1}LK^2M^{1/2}(t'-t)\int_{0}^{t-\gamma}\frac{ds}{(t-s)^{3/2}} \le \frac{2}{\mu}LK^2M^{1/2}(t'-t)\gamma^{-1/2}.$$

Отже, другий доданок в правій частині (15) стає як завгодно малим, якщо спочатку вибрати $\gamma>0$ досить малим, а потім, зафіксувавши γ, вибрати різницю $t'-t$ досить малою.

Тепер для $x\in\mathbb{R}$ та $x'\in\mathbb{R}$ інтервал $[0;t]$ інтегрування в різниці

$$\Phi^{(n,m)}(t,x,\psi)-\Phi^{(n,m)}(t,x',\psi)=\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}(g_n(t-s,x,y)-g_n(t-s,x',y))\psi(s,y)nq^{(n,m)}(y)dy \tag{16}$$

знову розбиваємо на проміжки $[t-\gamma;t]$ та $[0;t-\gamma]$. З використанням оцінки (9) при $k=0$ та $j=0$ інтеграл по першому з них оцінюється виразом

$$2LK\int_{t-\gamma}^{t}\frac{ds}{\sqrt{t-s}}\int_{\mathbb{R}}nq^{(n,m)}(y)dy \le \frac{4}{\mu}LK^2M^{1/2}\gamma^{1/2},$$

який стає малим, якщо γ досить мале. Інтеграл по проміжку $[0;t-\gamma]$ оцінюємо з використанням вже згаданої теореми Лагранжа та оцінки (9) при $k=1$ та $j=0$. Дістаємо

$$\Big|\int_{0}^{t-\gamma} ds \int_{\mathbb{R}} (g_n(t-s,x,y)-g_n(t-s,x',y))\psi(s,y)nq^{(n,m)}(y)dy\Big| \le$$
$$\le LK|x-x'|\int_0^{t-\gamma}\frac{ds}{t-s}\int_{\mathbb{R}}nq^{(n,m)}(y)dy \le \mu^{-1}LK^2M^{1/2}T\gamma^{-1}|x-x'|.$$

Отже, якщо спочатку вибрати $\gamma>0$ досить малим, а потім для фіксованого γ вибрати $|x-x'|$ досить малим, то можна інтеграл (16) зробити як завгодно малим. Цим завершується доведення леми 2. □

Наслідок. *Якщо n та m необмежено зростають у такий спосіб, що $\frac{n^2}{m}\to\tau$, $0<\tau<\infty$, то при фіксованих $t\ge 0$, $x\in\mathbb{R}$ та $\theta\in\mathbb{R}$ різниця $u^{(n,m)}(t,x,\theta)-\tilde{u}^{(n,m)}(t,x,\theta)$ прямує до нуля.*

Лема 3. *В умовах леми 1 при всіх $C > 0$ має місце оцінка*

$$\int_{|x-\alpha|>C} nq^{(n,m)}(x)dx \le \mu^{-1} K M^{1/2} e^{-\mu m C^2}.$$

Доведення. Викладка, подібна до тієї, що використана при доведенні леми 1, приводить до рівності

$$\int_{|x-\alpha|>C} nq^{(n,m)}(x)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{-nC} dx \int_0^{\infty} g\left(\frac{n^2}{m}, x+n\alpha, y+n\alpha\right) dy + \int_{nC}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{0} g\left(\frac{n^2}{m}, x+n\alpha, y+n\alpha\right) dy.$$

Беручи до уваги нерівність (9) при $k = 0$ та $j = 0$, звідси знаходимо нерівність

$$\int_{|x-\alpha|>C} nq^{(n,m)}(x)dx \le 2K\frac{m^{1/2}}{n} \int_{-\infty}^{-nC} dx \int_0^{\infty} e^{-\mu\frac{m}{n^2}(y-x)^2} dy,$$

з якої і випливає твердження леми. □

Розглянемо тепер такий інтеграл

$$U_\lambda^{(n,m)}(x,\varphi) = \int_{x\in\mathbb{R}} r_\lambda^{(n)}(x,y)\varphi(y) nq^{(n,m)}(y)dy$$

при $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbf{C}$ та натуральних n і m, для яких $\frac{n^2}{m} \le M$, де M — деяка додатна стала. Позначимо через β_n такі дійсні числа із $[0; l)$, що $\frac{n\alpha-\beta_n}{l} \in \mathbb{Z}$. Тоді, враховуючи (10), можемо записати

$$U_\lambda^{(n,m)}(x,\varphi) = \int_{-\infty}^{0} r_\lambda^{(n)}\left(x, \alpha+\frac{y}{n}\right)\varphi\left(\alpha+\frac{y}{n}\right) dy \int_0^{\infty} g\left(\frac{n^2}{m}, y+\beta_n, z+\beta_n\right) dz+$$
$$+\int_0^{\infty} r_\lambda^{(n)}\left(x, \alpha+\frac{y}{n}\right)\varphi\left(\alpha+\frac{y}{n}\right) dy \int_{-\infty}^{0} g\left(\frac{n^2}{m}, y+\beta_n, z+\beta_n\right) dz$$

Беручи до уваги періодичність функцій A та b, дістаємо рівності $A(y+n\alpha) = A(y+\beta_n)$, $b(y+n\alpha) = b(y+\beta_n)$. Тому ядро $r_\lambda^{(n)}$ в попередній формулі запишеться так

$$r_\lambda^{(n)}\left(x, \alpha+\frac{y}{n}\right) = \begin{cases} \frac{2v_-^{(n)}(x,\lambda)v_+^{(n)}\left(\alpha+\frac{y}{n},\lambda\right)}{c_n(\lambda)b(y+\beta_n)} e^{2A(y+\beta_n)}, & \text{якщо } x \le \alpha+\frac{y}{n}; \\ \frac{2v_-^{(n)}\left(\alpha+\frac{y}{n},\lambda\right)v_+^{(n)}(x,\lambda)}{c_n(\lambda)b(y+\beta_n)} e^{2A(y+\beta_n)}, & \text{якщо } x \ge \alpha+\frac{y}{n}. \end{cases}$$

Тепер можемо сформулювати таке твердження

Лема 4. *Якщо послідовності $(n_k)_{k\ge1}$ та $(m_k)_{k\ge1}$ необмежено зростають у такий спосіб, що $\frac{n_k^2}{m_k} \to \tau$ для деякого $\tau \in (0;\infty)$, а величини β_{n_k} збігаються до деякого $\beta \in [0; l)$, то при $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbf{C}$ виконується співвідношення*

$$\lim U_\lambda^{(n_k,m_k)}(x,\varphi) = \frac{\varkappa_F}{\sqrt{2\lambda\varkappa}} e^{-|x-\alpha|\sqrt{2\lambda\varkappa}} \varphi(\alpha)\delta(\beta,\tau),$$

де $\delta(\beta,\tau) = \int_{-\infty}^{\beta}\left(\int_\beta^{\infty} g(\tau,y,z)dz\right) dH(y) + \int_\beta^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\beta} g(\tau,y,z)dz\right) dH(y).$

Доведення випливає безпосередньо з наведених вище результатів.

2.3. Основний результат. Щоб дослідити граничну поведінку величин $n^{-1}\nu_{[mt]}^{(n,m)}$, нам залишилось дослідити поведінку функції $\tilde{u}^{(n,m)}$, що є розв'язком рівняння (13), коли $\frac{n^2}{m} \to \tau$ для деякого $\tau \in (0;\infty)$.

Виберемо підпослідовності $(n_k)_{k\geq 1}$ та $(m_k)_{k\geq 1}$ так, як вказано в лемі 4. З леми 2 випливає, що з цих підпослідовностей можна вибрати в свою чергу підпослідовності $(\tilde{n}_k)_{k\geq 1}$ та $(\tilde{m}_k)_{k\geq 1}$ так, щоб функції $\tilde{u}^{(\tilde{n}_k,\tilde{m}_k)}$ при $k \to \infty$ збігалися до деякої функції $\tilde{u}(t,x,\theta)$ локально рівномірно відносно $(t,x) \in [0;\infty) \times \mathbb{R}$ (тут θ — фіксоване).

Покладемо

$$V_\lambda^{(k)}(x,\theta) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{u}^{(\tilde{n}_k,\tilde{m}_k)}(t,x,\theta)dt$$

для $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ та $k = 1, 2 \ldots$. Тоді з рівняння (13) знаходимо

$$V_\lambda^{(k)}(x,\theta) = \frac{1}{\lambda} + i\theta\frac{\tilde{m}_k}{\tilde{n}_k^2}\int_{\mathbb{R}} r_\lambda^{(\tilde{n}_k)}(x,y)V_\lambda^{(k)}(y,\theta)\tilde{n}_k q^{(\tilde{n}_k,\tilde{m}_k)}(y)dy.$$

Оскільки при $\lambda > 0$ та $\theta \in \mathbb{R}$ локально рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} V_\lambda^{(k)}(x,\theta) = V_\lambda(x,\theta) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{u}(t,x,\theta)dt,$$

то з леми 4 випливає таке рівняння для функції V_λ

$$V_\lambda(x,\theta) = \frac{1}{\lambda} + \frac{i\theta}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{2\lambda\varkappa_H}}\delta(\beta,\tau)e^{-|x-\alpha|\sqrt{2\lambda\varkappa}}V_\lambda(\alpha,\theta). \tag{17}$$

Але з цього рівняння функція V_λ визначається однозначно. Тому вся послідовність функцій $\tilde{u}^{(n_k,m_k)}$, а отже і $u^{(n_k,m_k)}$, збігається до функції $\tilde{u}$, яка має своїм перетворенням Лапласа функцію V_λ.

Неважко знайти розв'язок рівняння (17). Більше того, можна знайти відповідну функцію розподілу, тобто, функцію $F_{t,x}(y)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, для якої

$$\tilde{u}(t,x,\theta) = \int_{x\in\mathbb{R}} e^{i\theta y}dF_{t,x}(y)$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $\theta \in \mathbb{R}$. Вона може бути записана так

$$F_{t,x}(y) = \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(y)\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{y\gamma^{-1}+d(x)} e^{-\frac{z^2}{2t}}dz,$$

де покладено $\gamma = \dfrac{\delta(\beta,\tau)}{\tau}\sqrt{\dfrac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}$, $d(x) = |x-\alpha|\sqrt{\varkappa}$. Цим доведена така теорема.

Теорема. *Припустимо що підпослідовності $(n_k)_{k\geq 1}$ та $(m_k)_{k\geq 1}$ послідовності натуральних чисел вибрані так, що $\frac{n_k^2}{m_k} \to \tau$, а $\beta_{n_k} = \left\{\frac{\alpha}{l}n_k\right\}l \to \beta$ при $k \to \infty$ для деяких $\tau \in (0;\infty)$ та $\beta \in [0;l)$. Тоді при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ має місце співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_x(n_k^{-1}\nu_{[m_k t]}^{(n_k,m_k)} < y) = F_{t,x}(y).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Кулинич Г.Л. *Асимптотическая нормальность распределения решения стохастического диффузионного уравнения* // Украинский матем. журн. – 1968. – Т.20 № 3. – С. 396–400.
2. Кулинич Г.Л. *Предельные распределения решения стохастического диффузионного уравнения* // Теория вероятн. и её примен. – 1968. – Т.XIII, №3. – С. 502–506.
3. Портенко М.І. *Одна формула для резольвенти одновимірного дифузійного процесу та її застосування до граничних теорем* // Математика сьогодні'08. – С. 66–96.
4. Аль Фарах Х., Портенко М. *Гранична теорема для кількості перетинів фіксованого рівня слабко збіжною послідовністю дифузійних процесів* // Інститут математики НАН України. – Препринт 2007.6 – С. 1–24.
5. Kulik A.M. *A limit theorem for the number of sign changes for a sequence of one-dimensional diffusions* // Theory of Stochastic Processes. – 2008. – T.14(30), №2. – P. 79–92.
6. Mandl P. *Analytical treatment of one-dimensional Markov processes.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. – 1968.
7. Портенко М.І., Сергієнко М.П. *Про збіжність резольвент деякої послідовності дифузійних процесів* // Математика сьогодні'09.
8. Stroock D.W., Varadhan S.R.S. *Multidimensional diffusion processes..* – Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. – 1979.
9. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* – М.: Мир. – 1968.
10. Порпер Ф.О., Эйдельман С.В. *Асимптотическое поведение классических и обобщённых решений одномерных параболических уравнений второго порядка* // Труды Моск. Матем. общества. – 1978. – Т. 36. – С. 85–130.
11. Скороход А.В. *Некоторые предельные теоремы для аддитивных функционалов от последовательности сум независимых случайных величин* // Украинский матем. журн. – 1961. – Т.13, № 4. – С. 67–78.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
кафедра статистики і вищої математики
myosyp@ukr.net
Інститут математики НАН України
відділ теорії випадкових процесів
portenko@imath.kiev.ua

Надійшло 19.11.2009
Після переробки 02.03.2010