УДК 517.5

М. І. Юрків

ПРО ГОЛОМОРФНІ В ПІВПЛОЩИНІ ФУНКЦІЇ ПОКРАЩЕНОГО РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ ЦІЛОГО ПОРЯДКУ З НУЛЯМИ НА СКІНЧЕННІЙ СИСТЕМІ ПРОМЕНІВ

M. I. Yurkiv. *On holomorphic in the half-plane functions of improved regular growth of integer order with zeroes on a finite system of rays*, Mat. Stud. **33** (2010), 153–172.

In the paper, a criterion of improved regular growth of holomorphic in the half-plane functions of integer order with zeroes on a finite system of rays is established.

М. И. Юркив. *О голоморфных в полуплоскости функциях улучшенного регулярного роста целого порядка с нулями на конечной системе лучей* // Мат. Студії. – 2010. – Т.33, №2. – С.153–172.

Установлен критерий улучшенного регулярного роста голоморфных в полуплоскости функций целого порядка с нулями на конечной системе лучей.

Як добре відомо [1, с. 97], голоморфна у півплощині $\mathbb{C}^+ = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ функція $f \not\equiv 0$ цілого формального порядку $\rho \in (0; +\infty)$, тобто така, що $\ln|f(z)| \le c(|z|^\rho + 1)$ для всіх $z \in \mathbb{C}^+$, подається у вигляді

$$f(z) = \exp\left\{i\sum_{k=0}^{\rho} b_k z^k + \frac{1}{\pi i}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\ln|f_0(t)|}{t-z}dt + \int_{-1}^{1}\frac{ds(t)}{t-z}\right)\right\}\prod_{|\lambda_n|<1}\frac{z-\lambda_n}{z-\overline{\lambda}_n}\times$$
$$\exp\left\{\frac{z^{\rho+1}}{\pi i}\left(\int_{|t|\ge 1}\frac{\ln|f_0(t)|}{t^{\rho+1}(t-z)}dt + \int_{|t|\ge 1}\frac{ds(t)}{t^{\rho+1}(t-z)}\right)\right\}\prod_{|\lambda_n|\ge 1} D_\rho(z;\lambda_n), \qquad (1)$$

де $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}$ — нулі функції f, $b_1,\ldots,b_\rho$ — дійсні сталі, $s(t)$ — сингулярна межова функція, $D_\rho(z;\lambda_n) = E(z/\lambda_n;\rho)/E(z/\overline{\lambda}_n;\rho)$ і $E(\omega;\rho) = (1-\omega)\exp(\omega + \omega^2/2 + \ldots + \omega^\rho/\rho)$ — первинний множник Вейєрштрасса роду ρ. При цьому $f_0(t)$ — кутові межові значення функції f на $\partial\mathbb{C}^+$, $f_0 \in L^\infty[a;b]$ для кожного проміжка $[a;b] \subset \mathbb{R}$ і функція $\ln|f_0(t)|$ є локально інтегровною на $\mathbb{R}$. Сингулярна межова функція s функції f, голоморфної і обмеженої в кожному півкрузі $Q_R = \{z\colon |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}, 0 < R < +\infty$, є незростаючою функцією, похідна її дорівнює нулеві майже скрізь і вона визначається, з точністю до адитивної сталої і значень в точках розриву, рівністю

$$s(t_2) - s(t_1) = \lim_{y\to+0}\int_{t_1}^{t_2}\ln|f(x+iy)|dx - \int_{t_1}^{t_2}\ln|f(x)|dx.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D99.

© М. І. Юрків, 2010

В теорії голоморфних функцій цілком регулярного зростання у відкритій півплощині $\mathbb{C}^+$ М. В. Говорова встановлюються, зокрема, необхідні і достатні умови, за яких для голоморфної в $\mathbb{C}^+$ функції f формального порядку $\rho \in (0;+\infty)$ з індикатором h співвідношення

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = r^\rho h(\varphi) + o(r^\rho), \quad E_0 \not\ni r \to +\infty, \tag{2}$$

виконується рівномірно в кожному куті $\{z\colon \delta_0 \le \arg z \le \pi - \delta_0\}$, $\delta_0 \in (0;\pi)$, для деякої множини $E_0 := E_0(\delta_0) \subset [0;+\infty)$ нульової відносної міри (такі функції звуться функціями цілком регулярного зростання у відкритій півплощині $\mathbb{C}^+$).

Нехай $n_j(t) = \sum_{1<|\lambda_n|\le t, \arg\lambda_n = \psi_j} 1$ — кількість нулів голоморфної в $\mathbb{C}^+$ функції f з півкруга $\{z\colon |z| \le t, \operatorname{Im} z > 0\}$, які належать променю $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $N_j(r) = \int_0^r \frac{n_j(t)}{t}dt$,

$$\tau_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \frac{\ln|f_0(x)|}{x}dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \frac{ds(x)}{x}, \quad \tau_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \frac{\ln|f_0(-x)|}{x}dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \frac{ds(-x)}{x}.$$

Через $c_1, c_2, ...$ позначимо деякі додатні сталі. З результатів М. В. Говорова [1, с.97-101] випливає наступне твердження.

Теорема Г. *Нехай нулі голоморфної в $\mathbb{C}^+$ функції $f \ne 0$ цілого формального порядку $\rho \in (0;+\infty)$ лежать на скінченій системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1,...,m\}$, $0 < \psi_1 < ... < \psi_m < \pi$. Для того щоб f була функцією цілком регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$, необхідно і досить щоб для деяких $l_1 \in \mathbb{R}$, $l_2 \in \mathbb{R}$, $\Delta_j \in [0;+\infty)$ і кожного $j \in \{1,...,m\}$ виконувалось*

$$\tau_1(r) = l_1 r^\rho + o(r^\rho), \quad \tau_2(r) = l_2 r^\rho + o(r^\rho), \quad r \to +\infty$$

$$n_j(r) = \Delta_j r^\rho + o(r^\rho), \quad r \to +\infty,$$

і за деякого $\sigma_f \in [0;+\infty)$

$$\frac{1}{\rho}\sum_{1\le|\lambda_n|\le r} \frac{\sin\rho\varphi_n}{|\lambda_n|^\rho} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r} \frac{\ln|f_0(t)|}{t^{\rho+1}}dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r} \frac{ds(t)}{t^{\rho+1}} = \sigma_f + o(1), \quad r \to +\infty.$$

Функцію f, голоморфну в $\mathbb{C}^+$, назвемо функцією покращеного регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$, якщо за деяких $\rho_2 \in (0;\rho)$ і тригонометрично ρ - опуклої функції $h\colon (0;\pi) \to \mathbb{R}$ знайдеться така множина U, яка міститься в об'єднанні кругів $U_s(a_s, \widetilde{\tau}_s) = \{z\colon |z - a_s| < \widetilde{\tau}_s\}$, $s \in \mathbb{N}$ зі скінченою сумою радіусів S, що

$$\ln|f(z)| = |z|^\rho h(\varphi) + O\left(\frac{|z|^{\rho_2}}{\sin\varphi}\right), \quad \mathbb{C}^+ \backslash U \ni z = re^{i\varphi} \to \infty. \tag{3}$$

Метою даної статті є доведення наступного твердження, яке є аналогом деяких результатів М. В. Говорова [1, с. 97] про голоморфні функції цілком регулярного зростання та Р. В. Хаця [2, с. 18] про цілі функції покращеного регулярного зростання.

Теорема 1. *Для того щоб голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція $f \not\equiv 0$ цілого формального порядку $\rho \in (0;+\infty)$, нулі якої розміщені на скінченій системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1,...,m\}$, $0 < \psi_1 < ... < \psi_m < \pi$, була функцією покращеного регулярного зростання* *в* $\mathbb{C}^+$, *необхідно і досить щоб для деяких* $l_1 \in \mathbb{R}$, $l_2 \in \mathbb{R}$, $\Delta_j \in [0;+\infty)$, $\rho_1 \in (0;\rho)$, $\rho_3 \in (0;\rho)$, $\sigma_f \in [0;+\infty)$ *і кожного* $j \in \{1,...,m\}$ *виконувались умови*

$$\tau_1(r) = l_1 r^\rho + O(r^{\rho_1}), \quad \tau_2(r) = l_2 r^\rho + O(r^{\rho_1}), \quad r \to +\infty, \tag{4}$$

$$n_j(r) = \Delta_j r^\rho + O(r^{\rho_1}), \quad r \to +\infty, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\rho} \sum_{1 \le |\lambda_n| \le r} \frac{\sin \rho\varphi_n}{|\lambda_n|^\rho} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1 \le |t| \le r} \frac{\ln|f_0(t)|}{t^{\rho+1}} dt - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1 \le |t| \le r} \frac{ds(t)}{t^{\rho+1}} = \sigma_f + O(r^{\rho_3 - \rho}), \ r \to +\infty. \tag{6}$$

Зауважимо, що аналогічний критерій покращеного регулярного зростання для голоморфних у верхній півплощині функцій нецілого формального порядку отриманий в [13].

Для доведення теореми потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Для того щоб ціле число* $\rho \in (1;+\infty)$ *було формальним порядком функції* f, *голоморфної у верхній півплощині, необхідно і досить щоб*

$$\left| -b_\rho + \frac{2}{\rho} \sum_{1 < |\lambda_n| \le r} \frac{\sin \rho\varphi_n}{|\lambda_n|^\rho} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{1 < |t| \le r} \frac{\ln|f_0(t)|}{t^{\rho+1}} dt - \frac{1}{\pi} \int\limits_{1 < |t| \le r} \frac{ds(t)}{t^{\rho+1}} \right| \le c_4, \quad r \in [1;+\infty),$$

і число ρ *було формальним порядком повної міри функції* f, *тобто*

$$\sum_{0 < |\lambda_n| \le r} \sin\varphi_n + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \le r} \frac{\ln^+|f_0(t)|}{|t|+1} dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \le r} \frac{\ln^+ \frac{1}{|f_0(t)|}}{|t|+1} dt - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \le r} \frac{ds(t)}{|t|+1} <$$
$$< c_3 r^\rho + c_3, \quad r \in [0;+\infty).$$

Ця лема випливає з [8, с. 82-83].

Лема 2. *Для того щоб число* $\rho = 1$ *було формальним порядком функції* f, *голоморфної і обмеженої у кожному півкрузі* $Q_R = \{z\colon |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}, 0 < R < +\infty$, *необхідно і досить щоб функція* $\ln|f_0(t)|$ *була локально інтегровною на* $\mathbb{R}$,

$$\sum_{0 < |\lambda_n| \le 1} \operatorname{Im} \lambda_n < +\infty, \tag{7}$$

для майже всіх $t \in \mathbb{R}$

$$|f_0(t)| \le c \exp\{c|t|\} \tag{8}$$

і

$$\sum_{1 < |\lambda_n| \le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \sin\varphi_n + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1 < |t| \le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) (|ds(t)| - \ln|f_0(t)|\, dt) < c_5, r \in (1;+\infty).$$

Ця лема випливає із [11, с. 42] з врахуванням уточнення [див. "Мат. студії", Т. 16, №1, с. 110].

Лема 3. *Нехай $\rho \in (0;+\infty)$ — ціле число, $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — незростаюча на $\mathbb{R}$ функція, похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь, $f_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — така функція, що функція $\ln|f_0(x)|$ є локально інтегровною на $\mathbb{R}$ і $f_0 \in L^\infty[a;b]$ для кожного проміжка $[a;b] \subset \mathbb{R}$, (λ_n) — послідовність точок з півплощини $\mathbb{C}^+$, які лежать на скінченній кількості променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1, ..., m\}$, $0 < \psi_1 < ... < \psi_m < \pi$. Тоді, якщо виконується умова (7) і для деяких $l_1 \in \mathbb{R}$, $l_2 \in \mathbb{R}$, $\Delta_j \in [0;+\infty)$, $\rho_1 \in (0;\rho)$, $\rho_3 \in (0;\rho)$ і $\sigma_f \in [0;+\infty)$ виконуються рівності (4)–(6), то функція f, визначена формулою (1), є голоморфною в $\mathbb{C}^+$ і виконується (3) з функцією h, визначеною рівністю*

$$h(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} h_i(\varphi) + 2\sin\rho\varphi\left(\sigma_f - \frac{b_\rho}{2}\right) - 2\rho l_1(\varphi - \pi)\cos\rho\varphi + (-1)^\rho 2\rho l_2\varphi\cos\rho\varphi, \qquad (9)$$

де

$$h_i(\varphi) = \widehat{h}_i(\varphi) - \widetilde{h}_i(\varphi), \qquad (10)$$

$$\widehat{h}_i(\varphi) = \begin{cases} \Delta_i(\pi - \varphi + \psi_i)\sin\rho(\varphi - \psi_i) - \frac{\Delta_i}{\rho}\cos\rho(\varphi - \psi_i), \varphi > \psi_j, \\ \\ \Delta_i(\psi_i - \varphi - \pi)\sin\rho(\varphi - \psi_i) - \frac{\Delta_i}{\rho}\cos\rho(\varphi - \psi_i), \varphi < \psi_j, \end{cases}$$

$$\widetilde{h}_i(\varphi) = \Delta_i(\pi - \varphi - \psi_i)\sin\rho(\varphi + \psi_i) - \frac{\Delta_i}{\rho}\cos\rho(\varphi + \psi_i). \qquad (11)$$

Якщо, крім цього, виконується умова (8), то функція f має формальний порядок $\rho \in (0;+\infty)$.

Доведення. Нехай

$$F_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\ln|f_0(t)|}{t - z}dt + \int_{-1}^{1}\frac{ds(t)}{t - z}\right)\right\}\prod_{|\lambda_n|<1}\frac{z - \lambda_n}{z - \overline{\lambda}_n},$$

$$F_1(z) = \exp\left\{\frac{z^\rho}{\pi i}\left(\int_1^r \frac{\ln|f_0(t)|dt + ds(t)}{t^\rho(t - z)} + z\int_r^{+\infty}\frac{\ln|f_0(t)|dt + ds(t)}{t^{\rho+1}(t - z)}\right)\right\},$$

$$F_2(z) = \exp\left\{\frac{z^\rho}{\pi i}\left(\int_{-r}^{-1}\frac{\ln|f_0(t)|dt + ds(t)}{t^\rho(t - z)} + z\int_{-\infty}^{-r}\frac{\ln|f_0(t)|d + ds(t)}{t^{\rho+1}(t - z)}\right)\right\},$$

$$F_3(z) = \exp\left\{i\sum_{k=0}^{\rho} b_k z^k - \frac{z^\rho}{\pi i}\int_{1\le|t|\le r}\frac{\ln|f_0(t)|dt + ds(t)}{t^{\rho+1}}\right\}\prod_{j=1}^{m}\frac{L_j}{\widetilde{L}_j},$$

де

$$L_j(z) = \prod_{|\lambda_n|\ge 1, \arg\lambda_n = \psi_j} E(z/\lambda_n;\rho), \quad \widetilde{L_j}(z) = \prod_{|\lambda_n|\ge 1, \arg\lambda_n = \psi_j} E(z/\bar{\lambda}_n;\rho).$$

Тоді

$$f(z) = F_0(z)F_1(z)F_2(z)F_3(z). \tag{12}$$

Завдяки умові (7)

$$\ln|F_0(z)| = O(|z|^{\rho_2}), \quad \mathbb{C}^+ \ni z \to \infty, \tag{13}$$

для кожного $\rho_2 > 0$. Далі, враховуючи (4), за допомогою інтегрування частинами отримаємо

$$\begin{aligned}
\ln F_1(z) &= -2iz^{\rho}\left(\int\limits_1^r \frac{d\tau_1(t)}{t^{\rho-1}(t-z)} + z\int\limits_r^{+\infty} \frac{d\tau_1(t)}{t^{\rho}(t-z)}\right) = \\
&= -2iz^{\rho}\left(\frac{\tau_1(r)}{r^{\rho-1}(r-z)} - \frac{\tau_1(1)}{1-z} + \int\limits_1^r \frac{(t^{\rho-1}(t-z))'\,\tau_1(t)dt}{t^{2\rho-2}(t-z)^2}\right) - \\
&\quad -2iz^{\rho}\left(-\frac{z\tau_1(r)}{r^{\rho}(r-z)} + \int\limits_r^{+\infty} \frac{(t^{\rho}(t-z))'\,\tau_1(t)dt}{t^{2\rho}(t-z)^2}\right) = \\
&= -2iz^{\rho}\left(\frac{\tau_1(r)}{r^{\rho-1}(r-z)} - \frac{\tau_1(1)}{1-z} + \int\limits_1^r \frac{(t^{\rho-1}(t-z))'\,(l_1t^{\rho}+\chi(t))dt}{t^{2\rho-2}(t-z)^2}\right) - \\
&\quad -2iz^{\rho}\left(-\frac{z\tau_1(r)}{r^{\rho}(r-z)} + \int\limits_r^{+\infty} \frac{(t^{\rho}(t-z))'\,(l_1t^{\rho}+\chi(t))dt}{t^{2\rho}(t-z)^2}\right) = \\
&= -2iz^{\rho}\left(\frac{l_1-\tau_1(1)}{1-z} - l_1 + \frac{\tau_1(r)}{r^{\rho}} + \int\limits_1^r \frac{l_1\rho}{t-z}dt + z\int\limits_r^{+\infty} \frac{l_1\rho}{t(t-z)}dt\right) - \\
&\quad -2iz^{\rho}\left(\int\limits_1^r \frac{\chi(t)(\rho t-(\rho-1)z)}{t^{\rho}(t-z)^2}dt + z\int\limits_r^{+\infty} \frac{\chi(t)((\rho+1)t-\rho z)}{t^{\rho+1}(t-z)^2}dt\right) = \\
&= I_{1.1} + I_{1.2} + O(|z|^{\rho_2}), \quad \mathbb{C}^+ \ni z \to \infty,
\end{aligned} \tag{14}$$

де

$$I_{1.1} = -2iz^{\rho}l_1\rho\left(\int\limits_1^r \frac{dt}{t-z} + z\int\limits_r^{+\infty} \frac{dt}{t(t-z)}\right),$$

$$I_{1.2} = -2iz^{\rho}\left(\int\limits_1^r \frac{\chi(t)(\rho t-(\rho-1)z)}{t^{\rho}(t-z)^2}dt + z\int\limits_r^{+\infty} \frac{\chi(t)((\rho+1)t-\rho z)}{t^{\rho+1}(t-z)^2}dt\right),$$

$$\chi(t) = O(t^{\rho_1}), t \to +\infty.$$

Таким чином,

$$I_{1.1} = -2iz^{\rho}l_1\rho\left(\int\limits_1^r \frac{dt}{t-z} + z\int\limits_r^{+\infty}\frac{dt}{t(t-z)}\right) = -2il_1\rho z^{\rho}\ln\frac{r}{1-z}, \quad z\in\mathbb{C}^+,$$

і

$$\operatorname{Re} I_{1.1} = -2\rho l_1|z|^{\rho}(\varphi-\pi)\cos\rho\varphi, \quad z\in\mathbb{C}^+. \tag{15}$$

Оскільки $|\chi(t)|\le c_1t^{\rho_1}$, $t\in[0;+\infty)$, то

$$|I_{1.2}| \le 2r^{\rho}c_1\left(\int\limits_1^r \frac{|\rho t-(\rho-1)z|}{|t-z|^2}t^{\rho_1-\rho}dt + z\int\limits_r^{+\infty}\frac{|(\rho+1)t-\rho z|}{|t-z|^2}t^{\rho_1-\rho-1}dt\right) \le$$

$$\le 2c_1r^{\rho_1}\int\limits_0^1 \frac{(\rho u+(\rho+1))u^{\rho_1-\rho}}{u^2-2u\cos\varphi+1}du + 2c_1r^{\rho_1}\int\limits_1^{+\infty}\frac{((\rho+1)u+\rho)u^{\rho_1-\rho-1}}{u^2-2u\cos\varphi+1}du =$$

$$= 2c_1r^{\rho_1}\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{(\rho+1)u^{\rho_1-\rho}}{u^2-2u\cos\varphi+1}du + \int\limits_0^1\frac{\rho u^{\rho_1-\rho+1}}{u^2-2u\cos\varphi+1}du + \int\limits_1^{+\infty}\frac{\rho u^{\rho_1-\rho-1}}{u^2-2u\cos\varphi+1}du\right) \le$$

$$\le 2c_1r^{\rho_1}\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{(\rho+1)u^{\rho_1-\rho}}{u^2-2u\cos\varphi+1}du + \int\limits_0^{+\infty}\frac{\rho u^{\rho_1-\rho}}{u^2-2u\cos\varphi+1}du\right) \le \frac{c_2r^{\rho_1}}{\sin\varphi}, \tag{16}$$

бо [14, с. 311]

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{\mu-1}}{(u^2+2ua\cos\varphi+a^2)}du = -\pi a^{\mu-2}\frac{\sin(\mu-1)\varphi}{\sin\varphi\sin\mu\pi}, 0<\mu<2, a>0, -\pi<\varphi<\pi.$$

Тоді з (14)–(16) отримуємо

$$\ln|F_1(z)| = -2\rho l_1|z|^{\rho}(\varphi-\pi)\cos\rho\varphi + O\left(\frac{|z|^{\rho_1}}{\sin\varphi}\right), \quad \mathbb{C}^+\ni z\to+\infty. \tag{17}$$

Аналогічно,

$$\ln|F_2(z)| = (-1)^{\rho}2\rho l_2|z|^{\rho}\varphi\cos\rho\varphi + O\left(\frac{|z|^{\rho_1}}{\sin\varphi}\right), \quad \mathbb{C}^+\ni z\to+\infty. \tag{18}$$

Крім цього,

$$F_3(z) = \exp\left\{i\sum_{k=0}^{\rho}b_kz^k - \frac{z^{\rho}}{\pi i}\int\limits_{1\le|t|\le r}\frac{\ln|f_0(t)|dt+ds(t)}{t^{\rho+1}}\right\}\prod_{j=1}^m\frac{L_j}{\widetilde{L}_j}. \tag{19}$$

Оскільки $F_3(z)$ має вигляд (19), де L_j і $\widetilde{L_j}$ — канонічні добутки, побудовані за нулями функції f, які лежать на променях $\{z\colon \arg z=\psi_j\}$ і $\{z\colon \arg z=-\psi_j\}$ відповідно і виконується (5), то згідно з [2, с.22] для деякого $\rho_4 \in (0;\rho)$ маємо

$$\ln|L_j(z)| = \frac{1}{\rho}\operatorname{Re}\left\{e^{i\rho\varphi}\sum_{\substack{1<|\lambda_n|\le r,\\ \arg\lambda_n=\psi_j}}\left(\frac{r}{|\lambda_n|\,e^{i\psi_j}}\right)^{\rho}\right\} + |z|^{\rho}\,\widehat{h}_j(\varphi) + O\left(|z|^{\rho_4}\right),$$

$$\ln\left|\tilde{L}_j(z)\right| = \frac{1}{\rho}\operatorname{Re}\left\{e^{i\rho\varphi}\sum_{\substack{1<|\lambda_n|\le r,\\ \arg\lambda_n=\psi_j}}\left(\frac{r}{|\lambda_n|\,e^{-i\psi_j}}\right)^{\rho}\right\} + |z|^{\rho}\,\widetilde{h}_j(\varphi) + O\left(|z|^{\rho_4}\right),$$

якщо $\mathbb{C}^+\backslash U \ni z\to\infty$, де $\widehat{h}_j(\varphi)$ і $\widetilde{h}_j(\varphi)$ мають вигляд (11). Тому для деякого $\rho_2<\rho$

$$\ln|F_3(z)| = \operatorname{Re}\left\{i\sum_{k=0}^{\rho} b_k z^k - \frac{z^{\rho}}{\pi i}\int\limits_{1\le|t|\le r}\frac{\ln|f_0(t)|dt+ds(t)}{t^{\rho+1}}\right\} + \sum_{j=1}^{m}(\ln|L_j(z)| - \ln|\widetilde{L}_j(z)|)$$

$$= |z|^{\rho}\sum_{i=1}^{m}(\widehat{h}_i(\varphi)-\widetilde{h}_i(\varphi)) + O\left(|z|^{\rho_4}\right) +$$

$$+\operatorname{Re}\left\{ib_\rho z^{\rho} + \frac{e^{i\rho\varphi}}{\rho}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\substack{1<|\lambda_n|\le r,\\ \arg\lambda_n=\psi_j}}\left(\frac{r}{|\lambda_n|\,e^{i\psi_j}}\right)^{\rho} - \sum_{\substack{1<|\lambda_n|\le r,\\ \arg\lambda_n=\psi_j}}\left(\frac{r}{|\lambda_n|e^{-i\psi_j}}\right)^{\rho}\right)\right\} +$$

$$+\operatorname{Re}\left\{-\frac{z^{\rho}}{\pi i}\int\limits_{1\le|t|\le r}\frac{\ln|f_0(t)|dt+ds(t)}{t^{\rho+1}}\right\} = |z|^{\rho}\sum_{i=1}^{m}(\widehat{h}_i(\varphi)-\widetilde{h}_i(\varphi)) + O\left(|z|^{\rho_4}\right) +$$

$$+|z|^{\rho}\operatorname{Re}\left\{e^{i\rho\varphi}\left(ib_\rho + \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{1<|\lambda_n|\le r,\\ \arg\lambda_n=\psi_j}}\frac{1}{|\lambda_n|^{\rho}}\left(\frac{e^{-i\rho\psi_j}-e^{i\rho\psi_j}}{e^{-i\rho\psi_j}e^{i\rho\psi_j}}\right)\right)\right\} +$$

$$+|z|^{\rho}\operatorname{Re}\left\{-\frac{e^{i\rho\varphi}}{\pi i}\int\limits_{1\le|t|\le r}\frac{\ln|f_0(t)|dt+ds(t)}{t^{\rho+1}}\right\} = |z|^{\rho}\sum_{i=1}^{m}(\widehat{h}_i(\varphi)-\widetilde{h}_i(\varphi)) + O\left(|z|^{\rho_4}\right) +$$

$$+|z|^{\rho}\operatorname{Re}\left\{e^{i\rho\varphi}\left(ib_\rho - \frac{2i}{\rho}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{1<|\lambda_n|\le r,\\ \arg\lambda_n=\psi_j}}\frac{\sin\rho\psi_j}{|\lambda_n|^{\rho}} + \frac{i}{\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\frac{\ln|f_0(t)|dt+ds(t)}{t^{\rho+1}}\right)\right\} =$$

$$= |z|^{\rho}\sum_{i=1}^{m}(\widehat{h}_i(\varphi)-\widetilde{h}_i(\varphi)) + O\left(|z|^{\rho_4}\right) +$$

$$+|z|^{\rho}\sin\rho\varphi\left(-b_\rho + 2\left(\frac{1}{\rho}\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\frac{\sin\rho\varphi_n}{|\lambda_n|^{\rho}} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\frac{\ln|f_0(t)|dt+ds(t)}{t^{\rho+1}}\right)\right) =$$

$$= |z|^\rho \sum_{i=1}^{m}(\widehat{h}_i(\varphi) - \widetilde{h}_i(\varphi)) + O(|z|^{\rho_4}) + |z|^\rho \sin\rho\varphi(-b_\rho + 2\sigma_f) + O(|z|^{\rho_3}) =$$

$$= |z|^\rho \left(\sum_{i=1}^{m}(\widehat{h}_i(\varphi) - \widetilde{h}_i(\varphi)) + \sin\rho\varphi(-b_\rho + 2\sigma_f)\right) + O\left(\frac{|z|^{\rho_2}}{\sin\varphi}\right), \quad \mathbb{C}^+\backslash U \ni z \to \infty.$$

Таким чином, з (12), (13), (17), (18) і останньої рівності отримаємо (3). Крім цього, завдяки (4)–(8), з лем 1 і 2 випливає, що число ρ є формальним порядком функції f. Лему доведено. □

Лема 4. *Нехай $\rho \in (0; +\infty)$, $\rho_2 \in (0; \rho)$ і голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f є функцією покращеного регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$. Тоді існує послідовність (r_k), така що $0 < r_k \uparrow +\infty, r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = O(r_k^{\rho_2})$, $(k \to +\infty)$ і рівномірно за $\varphi \in (0; \pi)$ виконується*

$$\ln\left|f\left(r_k e^{i\varphi}\right)\right| = r_k^\rho h\left(\varphi\right) + O\left(\frac{r_k^{\rho_2}}{\sin\varphi}\right), \quad k \to +\infty. \tag{20}$$

Доведення леми міститься в доведенні леми 2 з [13].

Лема 5. *Якщо голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f цілого формального порядку $\rho \in (0; +\infty)$ є функцією покращеного регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$, то для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$ в кожному куті $\mathbb{C}\left[\varphi_j; \tilde{\varphi}_j\right] = \{z\colon \varphi_j \le \arg z \le \tilde{\varphi}_j\}$, $\psi_j < \varphi_j < \tilde{\varphi}_j < \psi_{j+1}$, $j \in \{1, ..., m\}$, $\psi_0 := 0$, $\psi_{m+1} := \pi$, справедлива асимптотична оцінка*

$$\ln\left|f\left(z\right)\right| \ge |z|^\rho h\left(\varphi\right) + O\left(|z|^{\rho_2}\right), \quad z \to \infty \tag{21}$$

Доведення. Нехай

$$\psi_{j+1} - \psi_j \le \min\left\{\pi, \pi/\rho\right\}. \tag{22}$$

Оскільки сума радіусів виняткових кругів U_s, $s \in \mathbb{N}$, які знаходяться в області $G_k = \{z\colon\ |z| > r_k\} \cap \{z\colon \psi_j < \arg z < \psi_{j+1}\}$, прямує до 0, коли $k \to +\infty$, де (r_k) — послідовність з леми 2, то можна провести два промені $\arg z = \varphi_j$ і $\arg z = \tilde{\varphi}_j$, $\psi_j < \varphi_j < \tilde{\varphi}_j < \psi_{j+1}$, які виняткові круги в розглядуваній області не будуть перетинати, причому для великих k числа φ_j і $\tilde{\varphi}_j$ можна вибрати довільно близько до ψ_j і ψ_{j+1} відповідно. Отже, за деякої сталої $c_6 > 0$ на півколах $\partial Q(0; r_k) = \{z\colon\ |z| = r_k, \operatorname{Im} z > 0\}$ і на променях $\arg z = \varphi_j$ і $\arg z = \tilde{\varphi}_j$ справедлива оцінка

$$|f\left(z\right)| \ge (1/c_6)\exp\left(|z|^\rho h\left(\varphi\right) - c_6\left|z\right|^{\rho_2}\right), \quad z \to \infty.$$

Далі, оскільки в кутах $\mathbb{C}\left[\varphi_j; \tilde{\varphi}_j\right]$, $j \in \{1, ..., m\}$, функція f не має нулів, то [6, c. 110] її індикатор в цих кутах є ρ- тригонометричним, тобто

$$h(\varphi) = A\cos\rho\varphi + B\sin\rho\varphi, \quad \varphi \in [\varphi_j; \widetilde{\varphi}_j], \quad j \in \{1, ..., m\},$$

де A і B — деякі сталі. Розглянемо функцію $\Psi(z) = V(z)/f(z)$,

$$V\left(z\right) = \exp\left\{\left(A - Bi\right)\left(z\right)_0^\rho - c_7\left(ze^{-i\tilde{\psi}}\right)_0^{\rho_2}\right\},$$

де c_7 — достатньо велика стала, $(z)_0^\rho = |z|^\rho\,(\cos\rho\varphi + i\sin\rho\varphi)$ — однозначна гілка функції z^ρ в куті $\{z\colon \varphi_j < \arg z = \varphi < \tilde{\varphi}_j\}$, $\left(ze^{-i\tilde{\psi}}\right)_0^{\rho_2} = |z|^{\rho_2}(\cos\rho_2(\varphi - \tilde{\psi}) + i\sin\rho_2(\varphi - \tilde{\psi}))$ — однозначна гілка функції $\left(ze^{-i\tilde{\psi}}\right)^{\rho_2}$ в цьому ж куті і $\tilde{\psi} = (\psi_{j+1} + \psi_j)/2$. Тоді

$$|V(z)| = \exp(|z|^\rho h(\varphi) - c_7|z|^{\rho_2}\cos\rho_2(\varphi - \tilde{\psi})).$$

Тому, взявши достатньо велику сталу c_7, переконуємось, що функція Ψ є обмеженою незалежною від k сталою c_6 на межі області $D_k = \{z\colon r_k < |z| < r_{k+1}, \operatorname{Im} z > 0\} \cap \{z\colon \varphi_j \le \arg z \le \tilde{\varphi}_j\}$. Звідси, застосовуючи принцип максимума до кожної області D_k, $k \in \mathbb{N}$, приходимо до висновку, що функція Ψ є обмеженою в кожному куті $\mathbb{C}\,[\varphi_j; \tilde{\varphi}_j]$, деякою сталою c_8. Отже, в таких кутах справедлива асимптотична оцінка

$$|f\,(z)| \ge (1/c_8)\exp\left(|z|^\rho\, h\,(\varphi) - c_7\,|z|^{\rho_2}\right), \quad z \to \infty.$$

Звідси отримуємо (21). Якщо умова (22) не виконується, то в куті $\{z\colon \psi_j < \arg z < \psi_{j+1}\}$ проведемо додаткові промені $\{z\colon \arg z = \psi_i\}$, $\psi_j < \psi_i < \psi_{j+1}$ так, щоб для нової сукупності променів $\{\psi_k\}$ виконувалась умова (22). Тоді, проводячи наведені вище міркування до кожного такого кута, прийдемо до потрібного твердження. Лему 5 доведено. □

Лема 6. *Нехай $\rho \in (0; +\infty)$. Якщо голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f цілого формального порядку $\rho \in (0; +\infty)$ задовольняє умову (3), то для деякого $\rho_4 \in (0; \rho)$ рівномірно за $\varphi \in (0; \pi)$ виконується:*

$$\int_1^r \ln\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right|\frac{dt}{t} \le \frac{r^\rho}{\rho}h\,(\varphi) + O\left(\frac{r^{\rho_4}}{\sin\varphi}\right), \quad r \to +\infty. \tag{23}$$

Доведення леми міститься в доведенні леми 4 з [13, с. 154].

З лем 5 і 6 випливає наступна

Лема 7. *Якщо голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f цілого формального порядку $\rho \in (0; +\infty)$ є функцією покращеного регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$, то для деякого $\rho_5 \in (0; \rho)$ і кожного $j \in \{1, ..., m\}$ рівномірно за $\varphi \in [\varphi_j, \tilde{\varphi}_j]$, $\psi_j < \varphi_j < \tilde{\varphi}_j < \psi_{j+1}$, виконується*

$$J_f^t(\varphi) = \int_1^t \ln\left|f\left(xe^{i\varphi}\right)\right|\frac{dx}{x} = \frac{t^\rho}{\rho}h\,(\varphi) + O\left(t^{\rho_5}\right), \quad t \to +\infty.$$

Лема 8. *Якщо голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f цілого формального порядку $\rho \in (0; +\infty)$ є функцією покращеного регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$, то для деякого $\rho_6 \in (0; \rho)$ і кожного $j \in \{1, ..., m\}$*

$$N_j\,(r) = \frac{\Delta_j}{\rho}r^\rho + O\left(r^{\rho_6}\right), \quad r \to +\infty, \quad \Delta_j \in [0; +\infty). \tag{24}$$

Доведення. Скористаємось узагальненою формулою Йєнсена [7, с.188]

$$N(r, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d}{d\varphi}\int_0^r J_f^t(\varphi)\frac{dt}{t}\right]_{\varphi=\beta} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d}{d\varphi}\int_0^r J_f^t(\varphi)\frac{dt}{t}\right]_{\varphi=\alpha} + \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \ln\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi, \tag{25}$$

де $N(r,\alpha,\beta)=\int\limits_0^r \frac{n(t,\alpha,\beta)dt}{t}$, $n\left(t,\alpha,\beta\right)$ — кількість нулів в секторі $\{z\colon\ |z|\le t, \alpha\le \arg z\le\beta\}$, $J_f^t\left(\varphi\right)$ — функція з леми 7. Нехай $\rho_5\in(0;\rho)$ — число з леми 7, $\mu=(\rho-\rho_5)/2$ і $q=r_k^{-\mu}$, де (r_k) — послідовність, яка фігурує в лемі 4. Для кожного $j\in\{1,...,m\}$ виберемо числа α і β так, щоб $\psi_{j-1}<\alpha<\psi_j<\beta<\psi_{j+1}$, де $\psi_0:=0,\psi_{m+1}:=\pi$. Тоді з (25), подібно як і в [7, с.199], [3, с.35] і [2, с.20], маємо, що для деякого $\rho_6\in(0;\rho)$ і кожного $j\in\{1,...,m\}$

$$N_j\left(r\right)=\frac{r^\rho}{2\pi\rho^2}\tilde{s}_f\left(\alpha,\beta\right)+O\left(r^{\rho_6}\right),\quad r\to+\infty, \tag{26}$$

де

$$\tilde{s}_f\left(\alpha,\beta\right)=h'\left(\beta\right)-h'\left(\alpha\right)+\rho^2\int\limits_\alpha^\beta h\left(\varphi\right)d\varphi. \tag{27}$$

Оскільки функції $N_j(r)$, $j\in\{1,...,m\}$, від $\alpha\in(\psi_{j-1};\psi_j)$ та $\beta\in(\psi_j;\psi_{j+1})$ не залежать, то з (26) випливає, що такою ж властивістю володіє функція $\tilde{s}_f\left(\alpha,\beta\right)$. Отже, $\tilde{s}_f\left(\alpha,\beta\right)=\tilde{s}_j$, і, враховуючи (9),

$$\tilde{s}_j=\lim_{\substack{\alpha\to\psi_{j-}\\ \beta\to\psi_{j+}}}\sum_{i=1}^m\left(h_i'\left(\beta\right)-h_i'\left(\alpha\right)+\rho^2\int\limits_\alpha^\beta h_i\left(\varphi\right)d\varphi\right), \tag{28}$$

де функції $h_i(\varphi)$ визначені рівностями (10)–(11). Нехай $i>j$. Тоді, якщо $\alpha\le\varphi\le\beta$, то $\psi_i\le\varphi+2\pi<\psi_i+2\pi$, і з (11) отримаємо

$$\widetilde{h}_i(\varphi)=\Delta_i(\pi-\varphi-\psi_i)\sin\rho(\varphi+\psi_i)-\frac{\Delta_i}{\rho}\cos\rho(\varphi+\psi_i), \tag{29}$$

$$\widehat{h}_i(\varphi)=\Delta_i(\psi_i-\varphi-\pi)\sin\rho(\varphi-\psi_i)-\frac{\Delta_i}{\rho}\cos\rho(\varphi-\psi_i). \tag{30}$$

Звідси і з (10)

$$\begin{gathered} h_i'\left(\beta\right)-h_i'\left(\alpha\right)+\rho^2\int\limits_\alpha^\beta h_i\left(\varphi\right)d\varphi= \\ =2\Delta_i(\sin\rho(\alpha-\psi_i)-\sin\rho(\beta-\psi_i)+\sin\rho(\beta+\psi_i)-\sin\rho(\alpha-\psi_i))= \\ =8\Delta_i\sin\rho\psi_i\sin\frac{\rho(\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{\rho(\alpha+\beta)}{2}. \end{gathered} \tag{31}$$

Якщо ж $i<j$ і $\alpha\le\varphi\le\beta$, то $\psi_i\le\varphi<\psi_i+2\pi$, $\tilde{h}_i(\varphi)$ має вигляд (29),

$$\widehat{h}_i(\varphi)=\Delta_i(\pi-\varphi+\psi_i)\sin\rho(\varphi-\psi_i)-\frac{\Delta_i}{\rho}\cos\rho(\varphi-\psi_i) \tag{32}$$

і виконується (31). Нехай $i=j$. Тоді, якщо $\alpha\le\varphi\le\psi_j$, то $\psi_j\le\varphi+2\pi<\psi_j+2\pi$ і $\tilde{h}_j(\varphi)$ та $\widehat{h}_j(\varphi)$ визначаються формулами (29)–(30) відповідно. Якщо ж $\psi_j\le\varphi\le\beta$, то

$\psi_j \le \varphi < \psi_j + 2\pi$ і $\tilde{h}_j(\varphi)$ та $\widehat{h}_j(\varphi)$ мають вигляд (29) та (32). Тому,

$$h_j'(\beta) - h_j'(\alpha) + \rho^2 \int\limits_{\alpha}^{\beta} h(\varphi)d\varphi = h_j'(\beta) - h_j'(\alpha) + \rho^2 \left(\int\limits_{\alpha}^{\psi_j} + \int\limits_{\psi_j}^{\beta} \right) h_j(\varphi)d\varphi =$$

$$= 2\pi\rho\Delta_j + 2\Delta_j(\sin\rho(\alpha - \psi_j) - \sin\rho(\beta - \psi_j) + \sin\rho(\beta + \psi_j) - \sin\rho(\alpha - \psi_j)). \qquad (33)$$

Таким чином, об'єднуючи (26), (28), (31) і (33), отримаємо (24). Лему 8 доведено. □

Лема 9. *Нехай $\rho \in (0; +\infty)$, $\Delta_j \in [0; +\infty)$, $j \in \{1, ..., m\}$. Для того, щоб для деякого $\rho_1 \in (0; \rho)$ і для кожного $j \in \{1, ..., m\}$ виконувалось (5), необхідно і достатньо, щоб для деякого $\rho_6 \in (0; \rho)$ і для кожного $j \in \{1, ..., m\}$ виконувалось (24).*

Доведення леми 9 міститься в доведенні леми 3 з [5, с.143].

Лема 10. *Нехай для голоморфної в $\mathbb{C}^+$ функції f скінченого формального порядку $\rho \in (0; 1)$ за деякої тригонометрично ρ-опуклої на $(0; \pi)$ функції $h\colon (0; \pi) \to \mathbb{R}$ існують $\rho_2 \in (0; \rho)$ і послідовність (r_k) такі, що $0 < r_k \uparrow +\infty$, $r_{k+1}^{\rho} - r_k^{\rho} = O\left(r_k^{\rho_2}\right)$, $k \to +\infty$ і рівномірно за $\varphi \in (0; \pi)$ виконується (20). Тоді знайдеться $\rho_7 \in (0; \rho)$ таке, що*

$$\sum_{1<|\lambda_n|\le r} \sin\varphi_n - \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^r \frac{\ln|f(t) f(-t)|}{t} dt - \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^r \frac{d\left[s(t) - s(-t)\right]}{t} =$$

$$= \frac{\rho^2 - 1}{2\pi\rho} r^{\rho} \int\limits_0^{\pi} h(\varphi) \sin\varphi d\varphi + O\left(r^{\rho_7}\right), \quad r \to +\infty. \qquad (34)$$

Доведення леми 10 міститься в доведенні теореми 1 з [12, с. 174].

Лема 11. *Якщо голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f цілого формального порядку $\rho \in (0; +\infty)$ задовольняє умови (4)–(6), то*

$$a := \sum_{j=1}^{m} \Delta_j \sin\rho\psi_j - \rho l_1 + (-1)^{\rho}\rho l_2 = 0. \qquad (35)$$

Доведення. Нехай

$$\upsilon(r) = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{1<|\lambda_n|\le r,\\ \arg\lambda_n = \psi_j}} \sin\rho\psi_j - \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^r \frac{\ln|f(t)|}{t} dt - \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^r \frac{ds(t)}{t} -$$

$$- \frac{(-1)^{\rho-1}}{2\pi} \int\limits_1^r \frac{\ln|f(-t)|}{t} dt - \frac{(-1)^{\rho-1}}{2\pi} \int\limits_1^r \frac{ds(-t)}{t}.$$

Завдяки (4) і (5)

$$\upsilon(r) = r^{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^{m} \Delta_j \sin\rho\psi_j - l_1 + (-1)^{\rho} l_2 \right) + O(r^{\rho_1}) = \frac{a}{\rho} r^{\rho} + O(r^{\rho_1}), \quad r \to +\infty. \qquad (36)$$

З іншого боку,

$$\frac{1}{\rho}\sum_{1\le|\lambda_n|\le r}\frac{\sin\rho\varphi_n}{|\lambda_n|^\rho}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\frac{\ln|f(t)|}{t^{\rho+1}}dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\frac{ds(t)}{t^{\rho+1}}=$$

$$=\frac{1}{\rho}\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\frac{\sin\rho\varphi_n}{|\lambda_n|^\rho}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{\ln|f(t)|}{t^{\rho+1}}dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{ds(t)}{t^{\rho+1}}-$$

$$-\frac{(-1)^{\rho-1}}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{\ln|f(-t)|}{t^{\rho+1}}dt-\frac{(-1)^{\rho-1}}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{ds(-t)}{t^{\rho+1}}=\int\limits_1^r\frac{d\upsilon(t)}{t^\rho}=\frac{\upsilon(r)}{r^\rho}+\rho\int\limits_1^r\frac{\upsilon(t)}{t^{\rho+1}}dt.$$

Тому на основі (36)

$$\frac{1}{\rho}\sum_{1\le|\lambda_n|\le r}\frac{\sin\rho\varphi_n}{|\lambda_n|^\rho}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\frac{\ln|f(t)|}{t^{\rho+1}}dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\frac{ds(t)}{t^{\rho+1}}=\frac{a}{\rho}+a\ln r+O(1), r\to+\infty.$$

Враховуючи умову (6), приходимо до висновку, що $a=0$, тобто виконується (35). □

Лема 12. *Якщо голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f цілого формального порядку $\rho\in(0;+\infty)$ є функцією покращеного регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$, то для деяких $l_1\in\mathbb{R}$, $l_2\in\mathbb{R}$ і $\rho_1\in(0;\rho)$ виконується (4).*

Доведення. Оскільки сума радіусів виняткових кругів U_s, $s\in\mathbb{N}$, які знаходяться в області $G_{r_0}=\{z\colon |z|>r_0\}\cap\{z\colon 0<\arg z<\psi_1\}$ прямує до 0, коли $r_0\to+\infty$, то для фіксованого $\delta\in(0,\min(\psi_1,\pi,\pi/\rho))$ можна знайти таке r_0, що промінь $\arg z=\delta$ не буде перетинати виняткові круги U_s, які мають непорожній перетин з G_{r_0}, і тому справедливою буде асимптотична оцінка

$$\int\limits_1^r\ln\left|f\left(te^{i\delta}\right)\right|\frac{dt}{t}=\frac{r^\rho}{\rho}h(\delta)+O\left(\frac{r^{\rho_2}}{\sin\delta}\right)=\frac{r^\rho}{\rho}h(\delta)+O\left(r^{\rho_2}\right),\quad r\to+\infty.\qquad(37)$$

За відповідного вибору голоморфної гілки степеня функція $g(\zeta)=f(\zeta^{\delta/\pi})$ є голоморфною в $\mathbb{C}^+$ і допускає голоморфне продовження в нижню півплощину через від'ємний дійсний промінь. Тому її сингулярна гранична функція $s_g(x)$ є сталою на цьому промені. Крім цього, число $\frac{\rho\delta}{\pi}\in(0;1)$ є формальним порядком функції g. Оскільки $\delta<\psi_1$, то функція g не має нулів у верхній півплощині. Далі, використовуючи лему 10, подібно до доведення теореми 1 із [13], для деякого $\rho_1<\rho$ отримаємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{\ln|f(t)|\,dt}{t}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{ds_f(t)}{t}=$$

$$=-\frac{r^\rho}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho^2\delta^2-\pi^2}{\pi^2}\int\limits_0^\pi h_f\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta d\theta+h_f(\delta)\right)+O\left(r^{\rho_1}\right),\quad r\to+\infty.\qquad(38)$$

Але

$$\int_0^\pi h_f\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta d\theta=\sum_{i=1}^m\int_0^\pi h_i\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta d\theta+2(\sigma_f-b_\rho/2)\int_0^\pi\sin\frac{\rho\theta\delta}{\pi}\sin\rho\theta d\theta+$$

$$+2\pi\rho l_1\int_0^\pi\cos\frac{\rho\theta\delta}{\pi}\sin\rho\theta d\theta-2\rho(l_1-(-1)^\rho l_2)\int_0^\pi\frac{\rho\theta\delta}{\pi}\cos\frac{\rho\theta\delta}{\pi}\sin\rho\theta d\theta=$$

$$=\frac{\pi^2}{\rho^2\delta^2-\pi^2}\sum_{i=1}^m(\Delta_i(\pi-\psi_i+\delta)\sin\rho(\delta-\psi_i)+\Delta_i(\pi-\psi_i-\delta)\sin\rho(\delta+\psi_i))+$$

$$+\frac{\pi^2}{\rho^2\delta^2-\pi^2}\left(\sum_{i=1}^m\frac{\Delta_i}{\rho}(\cos\rho(\delta-\psi_i)-\cos\rho(\delta+\psi_i))+\frac{4\delta^2\rho}{\rho^2\delta^2-\pi^2}\sin\rho\delta\sum_{i=1}^m\Delta_i\sin\rho\psi_i\right)+$$

$$+\frac{\pi^2}{\rho^2\delta^2-\pi^2}(-2(\sigma_f-b_\rho/2)\sin\rho\delta-2\pi\rho l_1\cos\rho\delta-2\pi\rho l_1)+$$

$$+\frac{\pi^2}{\rho^2\delta^2-\pi^2}2\rho(l_1-(-1)^\rho l_2)\left(\delta\cos\rho\delta-\frac{2\rho\delta^2}{\rho^2\delta^2-\pi^2}\sin\rho\delta\right),$$

$$h(\delta)=\sum_{i=1}^m(\Delta_i(\psi_i-\delta-\pi)\sin\rho(\delta-\psi_i)-\Delta_i(\pi-\psi_i-\delta)\sin\rho(\delta+\psi_i))-$$

$$-\sum_{i=1}^m\frac{\Delta_i}{\rho}(\cos\rho(\delta-\psi_i)-\cos\rho(\delta+\psi_i))+$$

$$+2(\sigma_f-b_\rho/2)\sin\rho\delta+2\pi\rho l_1\cos\rho\delta-2\rho(l_1-(-1)^\rho l_2)\delta\cos\rho\delta.$$

Отже, з (38) знаходимо, що

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^r\frac{\ln|f(t)|}{t}dt+\frac{1}{2\pi}\int_1^r\frac{ds(t)}{t}=l_1r^\rho-$$

$$-\frac{r^\rho}{2\pi\rho}\left(\frac{4\delta^2\rho}{\rho^2\delta^2-\pi^2}\sin\rho\delta\sum_{i=1}^m\Delta_i\sin\rho\psi_i-\frac{4\delta^2\rho}{\rho^2\delta^2-\pi^2}\sin\rho\delta(l_1-(-1)^\rho l_2)\right)+O(r^{\rho_1}),r\to+\infty$$

і завдяки (35) отримаємо

$$\tau_1(r)=l_1r^\rho+O(r^{\rho_1}),\quad r\to+\infty,$$

тобто вивиконується перша з рівностей (4), а виконання другої обґрунтовується аналогічно. □

Нехай $F_\nu(r,f)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi\ln|f(re^{i\varphi})|\sin\nu\varphi d\varphi\quad(\nu\in\mathbb{N},\quad r>0)$, — коефіцієнти Фур'є $\ln|f(re^{i\varphi})|$. Відомо[1, с.26], [9, с. 108], [10, с.26], що

$$F_\nu(r,f)=\frac{2}{\nu}\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|^\nu}-\frac{|\lambda_n|^\nu}{r^{2\nu}}\right)r^\nu\sin\nu\varphi_n-$$

$$-\frac{r^\nu}{\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^{\nu+1}}-\frac{t^{\nu-1}}{r^{2\nu}}\right)(\ln|f(t)|+(-1)^{\nu-1}\ln|f(-t)|)dt-$$

$$-\frac{r^{\nu}}{\pi}\int\limits_{1}^{r}\left(\frac{1}{t^{\nu+1}}-\frac{t^{\nu-1}}{r^{2\nu}}\right)(ds(t)+(-1)^{\nu-1}ds(-t))-b_{\nu}r^{\nu}-\frac{c_{13}}{r^{\nu}}, \tag{39}$$

де $\nu\leq\rho$, b_{ν} — коефіцієнт при z^{ν} полінома $\sum\limits_{k=1}^{\rho}b_kz^k$ із зображення (1) (вважаємо, що точки $t=1$ і $t=-1$ є точками неперервності функції s).

Лема 13. *Нехай голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f має цілий формальний порядок $\rho\in(0;+\infty)$ та індикатор $h(\varphi)$. Якщо для деякого $\rho_2\in(0;\rho)$ існує послідовність (r_k) така що*

$$r_{k+1}^{\rho}-r_k^{\rho}=O(r_k^{\rho_2}),\quad 0<r_k\uparrow+\infty,\quad k\to+\infty \tag{40}$$

і рівномірно за $\varphi\in(0;\pi)$ виконується (12), то для всіх $\nu\in\mathbb{Z}$

$$F_{\nu}(r_k,f)=\gamma_{\nu}r_k^{\rho}+O(r_k^{\rho_2}),\quad k\to+\infty$$

Ця лема випливає безпосередньо із означення $F_{\nu}(r,f)$.

Лема 14. *Нехай для голоморфної в $\mathbb{C}^+$ функції f цілого формального порядку $\rho\in(0;+\infty)$ за деякої тригонометрично ρ - опуклої на $(0;\pi)$ функції $h\colon(0;\pi)\to\mathbb{R}$ існують $\rho_2\in(0;\rho)$ і послідовність (r_k) такі, що виконується (40) і рівномірно за $\varphi\in(0;\pi)$ виконується (20), то для кожного $m\in\mathbb{N}$ знайдеться таке $\rho_8\in(0;\rho)$, що*

$$F_{\rho}(r,f)=\gamma_{\rho}r^{\rho}+O(r^{\rho_8}),\quad \gamma_{\rho}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}h(\varphi)\sin\rho\varphi d\varphi,\quad r\to+\infty. \tag{41}$$

Доведення. Доведемо спочатку, що

$$F_{\rho}(r,f)-F_{\rho}(r_k,f)=O(r^{\rho_8}),\quad r\to+\infty \tag{42}$$

З (39) отримаємо

$$F_{\rho}(r,f)-F_{\rho}(r_k,f)=\frac{2}{\rho}\sum_{r_k<|\lambda_n|\leq r}\left(\frac{r^{\rho}}{|\lambda_n|^{\rho}}-\frac{|\lambda_n|^{\rho}}{r^{\rho}}\right)\sin\rho\varphi_n+$$

$$+\frac{2}{\rho}(r^{\rho}-r_k^{\rho})\left(-\frac{\rho b_{\rho}}{2}+\sum_{1<|\lambda_n|\leq r_k}\left(\frac{1}{|\lambda_n|^{\rho}}+\frac{|\lambda_n|^{\rho}}{r^{\rho}r_k^{\rho}}\right)\sin\rho\varphi_n\right)-$$

$$-\frac{r^{\rho}}{\pi}\int\limits_{r_k}^{r}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}}-\frac{t^{\rho-1}}{r^{2\rho}}\right)(\ln|f(t)|+(-1)^{\rho-1}\ln|f(-t)|)\,dt-$$

$$-\frac{r^{\rho}}{\pi}\int\limits_{r_k}^{r}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}}-\frac{t^{\rho-1}}{r^{2\rho}}\right)(ds(t)+(-1)^{\rho-1}ds(-t))+\frac{r^{\rho}-r_k^{\rho}}{r^{\rho}r_k^{\rho}}c_{14}-$$

$$-\frac{r^{\rho}-r_k^{\rho}}{\pi}\int\limits_{1}^{r_k}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}}+\frac{t^{\rho-1}}{r^{\rho}r_k^{\rho}}\right)(\ln|f(t)|+(-1)^{\rho-1}\ln|f(-t)|)\,dt-$$

$$-\frac{r^\rho - r_k^\rho}{\pi}\int\limits_1^{r_k}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}}+\frac{t^{\rho-1}}{r^\rho r_k^\rho}\right)(ds(t)+(-1)^{\rho-1}ds(-t)).$$

Далі, завдяки нерівності $|\sin\rho\theta|\le\rho\sin\theta$ і незростанню функції s

$$|F_\rho(r,f)-F_\rho(r_k,f)|\le 2\sum_{r_k<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{|\lambda_n|^\rho}-\frac{|\lambda_n|^\rho}{r^\rho}\right)\sin\varphi_n+$$

$$+(r_{k+1}^\rho-r_k^\rho)\left(c_{15}+2\sum_{1<|\lambda_n|\le r_k}\left(\frac{1}{|\lambda_n|^\rho}+\frac{|\lambda_n|^\rho}{r^\rho r_k^\rho}\right)\sin\varphi_n\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{r_k}^{r}\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^\rho}-\frac{t^\rho}{r^\rho}\right)(|\ln|f(t)||+|\ln|f(-t)||)\frac{dt}{t}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{r_k}^{r}\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^\rho}-\frac{t^\rho}{r^\rho}\right)\frac{(|ds(t)|+ds(-t))}{t}+\frac{r_{k+1}^\rho-r_k^\rho}{r^\rho r_k^\rho}c_{14}+$$

$$+\frac{r_{k+1}^\rho-r_k^\rho}{\pi}\int\limits_1^{r_k}\left(\frac{1}{t^\rho}+\frac{t^\rho}{r^\rho r_k^\rho}\right)(|\ln|f(t)||+|\ln|f(-t)||)\frac{dt}{t}+$$

$$+\frac{r_{k+1}^\rho-r_k^\rho}{\pi}\int\limits_1^{r_k}\left(\frac{1}{t^\rho}+\frac{t^\rho}{r^\rho r_k^\rho}\right)\frac{(|ds(t)|+ds(-t))}{t}.$$

Звідси, використовуючи рівність $|\ln|f||=\ln^+|f|+\ln^+|1/f|$, маємо

$$|F_\rho(r,f)-F_\rho(r_k,f)|\le I_1+(r_{k+1}^\rho-r_k^\rho)I_2+I_3+I_4+I_5+(r_{k+1}^\rho-r_k^\rho)(I_6+I_7+I_8),\quad (43)$$

де

$$I_1=2\sum_{r_k<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{|\lambda_n|^\rho}-\frac{|\lambda_n|^\rho}{r^\rho}\right)\sin\varphi_n,\quad I_2=c_{15}+2\sum_{1<|\lambda_n|\le r_k}\left(\frac{1}{|\lambda_n|^\rho}+\frac{|\lambda_n|^\rho}{r^\rho r_k^\rho}\right)\sin\varphi_n,$$

$$I_3=\frac{1}{\pi}\int\limits_{r_k}^{r}\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^\rho}-\frac{t^\rho}{r^\rho}\right)(\ln^+|f(t)|+\ln^+|f(-t)|)\frac{dt}{t},$$

$$I_4=\frac{1}{\pi}\int\limits_{r_k}^{r}\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^\rho}-\frac{t^\rho}{r^\rho}\right)(\ln^+|1/f(t)|+\ln^+|1/f(-t)|)\frac{dt}{t},$$

$$I_5=\frac{1}{\pi}\int\limits_{r_k}^{r}\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^\rho}-\frac{t^\rho}{r^\rho}\right)\frac{(|ds(t)|+ds(-t))}{t}$$

$$I_6=\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{r_k}\left(\frac{1}{t^\rho}+\frac{t^\rho}{r^\rho r_k^\rho}\right)(\ln^+|f(t)|+\ln^+|f(-t)|)\frac{dt}{t},$$

$$I_7 = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{r_k}\left(\frac{1}{t^\rho}+\frac{t^\rho}{r^\rho r_k^\rho}\right)\left(\ln^+|1/f(t)|+\ln^+|1/f(-t)|\right)\frac{dt}{t},$$

$$I_8 = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{r_k}\left(\frac{1}{t^\rho}+\frac{t^\rho}{r^\rho r_k^\rho}\right)\frac{(|ds(t)|+ds(-t))}{t}.$$

Скористаємось узагальненою формулою Карлемана [1, с. 26], яку можна записати у вигляді

$$\sum_{1<|\lambda_n|<R}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{R^2}\right)\sin\varphi_n+\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^{R}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)\left(\ln^+|1/f(t)|+\ln^+|1/f(-t)|\right)dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^{R}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)(|ds(t)|+ds(-t))=\frac{1}{\pi R}\int\limits_0^{\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\sin\varphi\, d\varphi+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^{R}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)\left(\ln^+|f(t)|+\ln^+|f(-t)|\right)dt+c_{16}+\frac{c_{17}}{R^2}, \qquad (44)$$

Згідно означення формального порядку

$$\ln|f(z)|\le c_{11}(|z|^\rho+1), \quad z\in\mathbb{C}^+, \qquad (45)$$

права частина (44) менша за $c_{18}R^{\rho-1}$. Тому

$$\sum_{1<|\lambda_n|\le R/2}\sin\varphi_n\le\frac{R}{2}\sum_{1<|\lambda_n|\le R/2}\frac{\sin\varphi_n}{|\lambda_n|}\le\frac{R}{2}\frac{4}{3}\sum_{1<|\lambda_n|\le R}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{R^2}\right)\sin\varphi_n\le c_{19}R^\rho, \qquad (46)$$

$$\int\limits_1^{R/2}\left(\ln^+|1/f(t)|+\ln^+|1/f(-t)|\right)\frac{dt}{t}\le\frac{R}{2}\int\limits_1^{R/2}\frac{1}{t^2}(\ln^+|1/f(t)|+\ln^+|1/f(-t)|)dt\le$$
$$\le\frac{R}{2}\frac{4}{3}\int\limits_1^{R}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)(\ln^+|1/f(t)|+\ln^+|1/f(-t)|)dt\le c_{20}R^\rho \qquad (47)$$

$$\int\limits_1^{R/2}\frac{1}{t}(|ds(t)|+ds(-t))\le\frac{R}{2}\int\limits_1^{R/2}\frac{1}{t^2}(|ds(t)|+ds(-t))\le$$
$$\le\frac{R}{2}\frac{4}{3}\int\limits_1^{R}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)(|ds(t)|+ds(-t))\le c_{21}R^\rho \qquad (48)$$

Позначимо

$$\omega(r)=\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\sin\varphi_n, \quad \tilde\omega(r)=\int\limits_1^{r}\left(\ln^+|1/f(t)|+\ln^+|1/f(-t)|\right)\frac{dt}{t},$$

$$\hat{\omega}(r) = \int_1^r \frac{1}{t}(|ds(t)| + ds(-t)).$$

Тоді, використовуючи (46), подібно до [1, с.33] і [4, с. 100] при $k \to +\infty$ отримуємо

$$I_1 \le 2\int_{r_k}^r \left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^\rho} - \frac{t^\rho}{r_{k+1}^\rho}\right) d\omega(t) \le 2\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{r_k^\rho} - \frac{r_k^\rho}{r_{k+1}^\rho}\right)(\omega(r) - \omega(r_k)) +$$

$$+c_{22}\int_{r_k}^r \left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^{\rho+1}} + \frac{t^{\rho-1}}{r_{k+1}^\rho}\right) t^\rho dt \le c_{22} r_{k+1}^\rho \ln\left(1 + \frac{r - r_k}{r_k}\right) + O(r_k^{\rho_2}) = O(r_k^{\rho_8}), \quad \rho_8 < \rho,$$

$$I_2 = c_{15} + 2\int_1^{r_k} \left(\frac{1}{t^\rho} + \frac{t^\rho}{r^\rho r_k^\rho}\right) d\omega(t) = c_{15} + 2\left(\frac{1}{r_k^\rho} + \frac{1}{r^\rho}\right)\omega(r_k) + 2\rho\int_1^{r_k}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}} - \frac{t^{\rho-1}}{r^\rho r_k^\rho}\right)\omega(t)dt \le$$

$$\le c_{23} + c_{24}\int_1^{r_k}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}} - \frac{t^{\rho-1}}{r^\rho r_k^\rho}\right) t^\rho dt \le c_{25} + c_{24}\ln r_k.$$

Крім цього, за умови (47), при $k \to +\infty$

$$I_4 \le 2\int_{r_k}^r \left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^\rho} - \frac{t^\rho}{r_{k+1}^\rho}\right) d\tilde{\omega}(t) \le 2\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{r_k^\rho} - \frac{r_k^\rho}{r_{k+1}^\rho}\right)(\tilde{\omega}(r) - \tilde{\omega}(r_k)) +$$

$$+c_{26}\int_{r_k}^r \left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^{\rho+1}} + \frac{t^{\rho-1}}{r_{k+1}^\rho}\right) t^\rho dt \le c_{26} r_{k+1}^\rho \ln\left(1 + \frac{r - r_k}{r_k}\right) + O(r_k^{\rho_2}) = O(r_k^{\rho_8}), \quad \rho_8 < \rho,$$

$$I_7 = \frac{1}{\pi}\int_1^{r_k} \left(\frac{1}{t^\rho} + \frac{t^\rho}{r^\rho r_k^\rho}\right) d\tilde{\omega}(t) = \left(\frac{1}{r_k^\rho} + \frac{1}{r^\rho}\right)\frac{\tilde{\omega}(r_k)}{\pi} + \frac{\rho}{\pi}\int_1^{r_k}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}} - \frac{t^{\rho-1}}{r^\rho r_k^\rho}\right)\tilde{\omega}(t)dt \le$$

$$\le c_{27} + c_{28}\int_1^{r_k}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}} - \frac{t^{\rho-1}}{r^\rho r_k^\rho}\right) t^\rho dt \le c_{27} + c_{28}\ln r_k.$$

Подібно, завдяки (48), при $k \to +\infty$

$$I_5 \le 2\int_{r_k}^r \left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^\rho} - \frac{t^\rho}{r_{k+1}^\rho}\right) d\hat{\omega}(t) \le 2\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{r_k^\rho} - \frac{r_k^\rho}{r_{k+1}^\rho}\right)(\hat{\omega}(r) - \hat{\omega}(r_k)) +$$

$$+c_{29}\int_{r_k}^r \left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^{\rho+1}} + \frac{t^{\rho-1}}{r_{k+1}^\rho}\right) t^\rho dt \le c_{29} r_{k+1}^\rho \ln\left(1 + \frac{r - r_k}{r_k}\right) + O(r_k^{\rho_2}) = O(r_k^{\rho_8}), \quad \rho_8 < \rho,$$

$$I_8 = \frac{1}{\pi}\int_1^{r_k} \left(\frac{1}{t^\rho} + \frac{t^\rho}{r^\rho r_k^\rho}\right) d\hat{\omega}(t) = \left(\frac{1}{r_k^\rho} + \frac{1}{r^\rho}\right)\frac{\hat{\omega}(r_k)}{\pi} + \frac{\rho}{\pi}\int_1^{r_k}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}} - \frac{t^{\rho-1}}{r^\rho r_k^\rho}\right)\hat{\omega}(t)dt \le$$

$$\leq c_{30}+c_{31}\int\limits_{1}^{r_k}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}}-\frac{t^{\rho-1}}{r^\rho r_k^\rho}\right)t^\rho dt\leq c_{32}+c_{31}\ln r_k.$$

До того ж, використовуючи (45), маємо

$$I_3=\frac{1}{\pi}\int\limits_{r_k}^{r}\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^\rho}-\frac{t^\rho}{r^\rho}\right)(\ln^+|f(t)|+\ln^+|f(-t)|)\frac{dt}{t}\leq\frac{c_2}{\pi}\int\limits_{r_k}^{r}\left(\frac{r_{k+1}^\rho}{t^{\rho+1}}-\frac{t^{\rho-1}}{r^\rho}\right)t^\rho dt\leq$$

$$\leq c_{33}r_{k+1}^\rho\ln\left(1+\frac{r-r_k}{r_k}\right)+O(r_k^{\rho_2})=O(r_k^{\rho_8}),\quad \rho_8<\rho,$$

$$I_6\leq\frac{c_{11}}{\pi}\int\limits_{1}^{r_k}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}}+\frac{t^{\rho-1}}{r^\rho r_k^\rho}\right)t^\rho dt\leq c_{35}+c_{34}\ln r_k.$$

Отже, в (43) при $r\to+\infty$ отримаємо $|F_\rho(r,f)-F_\rho(r_k,f)|\leq(r_{k+1}^\rho-r_k^\rho)(c_{36}+c_{37}\ln r_k)+O(r_k^{\rho_8})=O(r_k^{\rho_8})$, звідки випливає (42). Оскільки $F_\rho(r,f)=F_\rho(r_k,f)+F_\rho(r,f)-F_\rho(r_k,f)$, то, завдяки рівності (42) і лемі 13, при деякому $\rho_8<\rho$ справедлива асимптотична оцінка $|F_\rho(r,f)-\gamma_\rho r^\rho|\leq|\gamma_\rho|\left(r_{k+1}^\rho-r_k^\rho\right)+O\left(r^{\rho_8}\right)=O\left(r^{\rho_8}\right)$, $r\to+\infty$. Звідси отримуємо (41). Лему 14 доведено. □

Доведення теореми 1. Достатність теореми є безпосереднім наслідком леми 3. Доведемо необхідність. З лем 8 та 9 безпосередньо випливає (5), а з леми 12 отримуємо (4). Доведемо тепер (6). Для $\nu=\rho$ з (39) маємо

$$F_\rho(r,f)=$$

$$=2r^\rho\left(\frac{1}{\rho}\sum_{1<|\lambda_n|\leq r}\frac{\sin\rho\varphi_n}{|\lambda_n|^\rho}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{\ln|f(t)|dt+ds(t)}{t^{\rho+1}}-\frac{(-1)^{\rho-1}}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{\ln|f(-t)|dt+ds(-t)}{t^{\rho+1}}\right)$$

$$-\frac{2}{r^\rho}\left(\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^m I(j)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^r t^{\rho-1}(\ln|f(t)|dt+ds(t))-\frac{(-1)^{\rho-1}}{2\pi}\int\limits_1^r t^{\rho-1}(\ln|f(-t)|dt+ds(-t))\right)$$

$$-b_\rho r^\rho-\frac{c_{13}}{r^\rho},\tag{49}$$

де

$$I(j)=\sum_{\substack{1<|\lambda_n|\leq r,\\ \arg\lambda_n=\psi_j}}|\lambda_n|^\rho\sin\rho\psi_j.$$

Завдяки лемам 8, 9 і (5) отримаємо

$$I(j)=\sin\rho\psi_j\int\limits_1^r t^\rho dn_j(t)=\frac{\Delta_j\sin\rho\psi_j}{2}r^{2\rho}+O(r^{\rho+\rho_1}),\quad r\to+\infty,\quad \rho_1<\rho,$$

і, скориставшись лемою 12, для деякого $\rho_1<\rho$ при $r\to+\infty$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^r t^{\rho-1}(\ln|f(t)|dt+ds(t))=\int\limits_1^r t^\rho d\tau_1(t)=r^\rho\tau_1(r)-\int\limits_1^r t^{\rho-1}\tau_1(t)dt=\frac{l_1}{2}r^{2\rho}+O(r^{\rho+\rho_1}),$$

$$\frac{(-1)^{\rho-1}}{2\pi}\int\limits_1^r t^{\rho-1}(\ln|f(-t)|dt+ds(-t))=(-1)^{\rho-1}\int\limits_1^r t^\rho d\tau_2(t)=\frac{(-1)^{\rho-1}l_2}{2}r^{2\rho}+O(r^{\rho+\rho_1}).$$

Тоді зі (49) випливає, що

$$F_\rho(r,f)=$$

$$=2r^\rho\left(\frac{1}{\rho}\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\frac{\sin\rho\varphi_n}{|\lambda_n|^\rho}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{\ln|f(t)|dt+ds(t)}{t^{\rho+1}}-\frac{(-1)^{\rho-1}}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{\ln|f(-t)|dt+ds(-t)}{t^{\rho+1}}\right)$$
$$-\frac{2}{r^\rho}\left(\frac{r^{2\rho}}{\rho}\sum_{j=1}^m\frac{\Delta_j\sin\rho\psi_j}{2}-\frac{l_1}{2}r^{2\rho}-\frac{(-1)^{\rho-1}l_2}{2}r^{2\rho}+O(r^{\rho+\rho_1})\right)-b_\rho r^\rho-\frac{c_{13}}{r^\rho},\quad r\to+\infty. \tag{50}$$

Далі, за лемою 14

$$F_\rho(r,f)=\frac{2r^\rho}{\pi}\int\limits_0^\pi h(\varphi)\sin\rho\varphi d\varphi+O(r^{\rho_8}),\quad r\to+\infty. \tag{51}$$

Таким чином, з (9)–(11), (50) і (51), знаходимо, що існує таке $\rho_3\in(0;\rho)$, що

$$\frac{1}{\rho}\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\frac{\sin\rho\varphi_n}{|\lambda_n|^\rho}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{\ln|f(t)|dt+ds(t)}{t^{\rho+1}}-\frac{(-1)^{\rho-1}}{2\pi}\int\limits_1^r\frac{\ln|f(-t)|dt+ds(-t)}{t^{\rho+1}}=$$

$$=\frac{1}{2r^\rho}F_\rho(r,f)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^m\Delta_j\sin\rho\psi_j-l_1-(-1)^{\rho-1}l_2\right)+\frac{b_\rho}{2}+O\left(r^{\rho_1-\rho}\right)=$$

$$=\frac{2\sigma_f-b_\rho}{\pi}\int\limits_0^\pi\sin^2\rho\varphi d\varphi+\rho l_1\int\limits_0^\pi\sin 2\rho\varphi d\varphi+\frac{\rho}{\pi}(-l_1+(-1)^\rho l_2)\int\limits_0^\pi\varphi\sin 2\rho\varphi d\varphi+O\left(r^{\rho_8-\rho}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^m\frac{\Delta_j}{\pi}\left(\int\limits_0^{\psi_j}(\psi_j-\varphi-\pi)\sin\rho(\varphi-\psi_j)\sin\rho\varphi d\varphi+\int\limits_{\psi_j}^\pi(\psi_j-\varphi+\pi)\sin\rho(\varphi-\psi_j)\sin\rho\varphi d\varphi\right)$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^m\Delta_j\int\limits_0^\pi(\pi-\psi_j-\varphi)\sin\rho(\varphi+\psi_j)\sin\rho\varphi d\varphi-\frac{2}{\pi\rho}\sum_{j=1}^m\Delta_j\sin\rho\psi_j\int\limits_0^\pi\sin^2\rho\varphi d\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^m\Delta_j\sin\rho\psi_j-l_1-(-1)^{\rho-1}l_2\right)+\frac{b_\rho}{2}+O\left(r^{\rho_1-\rho}\right)=\sigma_f+O\left(r^{\rho_3-\rho}\right),\quad r\to+\infty,$$

звідки випливає (6). Теорему 1 доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
2. Khats' R.V. *On entire functions of improved regular growth of integer order with zeroes on a finite system of rays*// Mat. Stud. – 2006. – V.26, № 1. – P. 17–24.
3. Винницький Б. В., Хаць Р. В. *Про регулярність зростання цілої функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів*// Мат. студ. – 2005. – Т.24, №1. – С. 31–38.
4. Хаць Р.В. *Про коефіцієнти Фур'є одного класу цілих функцій*// Матем. студ. – 2005. – Т. 23, № 1. – С. 99–102.
5. Винницький Б. В., Хаць Р. В. *Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку*// Мат. студії – 2004. – Т.21, №2. – С. 140–150.
6. Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Выща школа, 1988. – 196 с.
7. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
8. Гришин А. Ф. *О регулярности роста субгармонических функций*// Теор. функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). – 1968. – Вып.7. – С. 59–84.
9. Малютин К.Г., Коломиец С.В. *Ряды Фурье и истинно-субгармонические функции конечного γ-типа*// Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2000. – №475. – С. 105–112.
10. Grishin A.F., Malyutina T. I. *General properties of subharmonic functions of finite order in a complex halfe-plane* // Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2000. – №475. – С. 20–44.
11. Vynnyts'kyi B.V., Sharan V. L. *On factorization of one class of functions analytic in the half-plane* // Mat. Stud. – 2000. – V.14, No.1. – P. 41–48.
12. Vynnyts'kyi B.V., Yurkiv M.I. *Asymptotic properties of holomorphic functions in the half-plane of improved regular growth of order less than one* // Mat. Stud. – 2008. – V.30, No.2. – P. 173–176.
13. Винницький Б.В., Юрків М.І. *Про регулярність зростання голоморфної в півплощині функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів*// Мат. Студії. – 2009. – Т.32, №2. – С. 148–159.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
Інститут фізики, математики та інформатики
yurkiv.maryana@gmail.com

Надійшло 24.08.2009
Після переробки 22.04.2010