УДК 512.546

Н. М. Пирч

ВІЛЬНІ ДОБУТКИ ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП

N. M. Pyrch. *Free products of paratopological groups*, Mat. Stud. **33** (2010), 139–146.

In the paper we prove existence of the free product for the arbitrary family of the paratopological groups. We consider topologically algebraic properties of free products. The free products of paratopological groups being topological groups are investigated.

Н. М. Пирч. *Свободные произведения паратопологических групп* // Мат. Студії. – 2010. – Т.33, №2. – С.139–146.

В работе доказывается существование свободного произведения для произвольной семьи паратопологических групп. Устанавливаются тополого-алгебраические свойства свободных произведений. Исследуются свободные произведения паратопологических групп являющиеся топологическими группами.

Вступ. Нагадаємо, що паратопологічною групою називається пара (G,τ), де G — група, τ — топологія на G, причому відображення множення $m\colon G\times G\to G$, $m(x,y)\mapsto xy$ є неперервним (топологія τ називається при цьому напівгруповою).

Топологічною групою називається пара (G,τ), де G — група, τ — топологія на G, причому відображення множення $m\colon G\times G\to G$, $m(x,y)\mapsto xy$ та інверсії $i\colon G\to G$, $i(x)\mapsto x^{-1}$ є неперервними (топологія τ називається при цьому груповою).

Вивчення вільних добутків топологічних груп бере свій початок з роботи М. І. Граєва [1]. Подальше дослідження вільних добутків топологічних груп пов'язане головним чином з школою професора С. А. Морріса.

Означення 1. Нехай $\{G_i\colon i\in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Паратопологічну групу G ми будемо називати *вільним топологічним добутком груп* G_i (позн. $\prod^*_{i\in I}G_i$), якщо виконано умови:

1) група G містить групи G_i в якості свої підгруп;

2) мінімальна підгрупа групи G, що містить в собі всі підгрупи G_i співпадає з G;

3) якщо для кожного $i\in I$ існує неперервний гомоморфізм $f_i\colon G_i\to H$ з паратопологічної групи G_i у паратопологічну групу H, то існує неперервний гомоморфізм $f\colon G\to H$ з паратопологічної групи G у H такий, що $f|G_i=f_i$ для всіх $i\in I$.

Означення 2. Нехай $\{G_i\colon i\in I\}$ — сім'я абелевих паратопологічних груп. Абелеву паратопологічну групу G ми будемо називати *вільним абелевим топологічним добутком груп* G_i (позн. $\prod^{A*}_{i\in I}G_i$), якщо виконано умови:

1) група G містить групи G_i в якості свої підгруп;

2) мінімальна підгрупа групи G, що містить в собі всі підгрупи G_i співпадає з G;

3) якщо для кожного $i\in I$ існує неперервний гомоморфізм $f_i\colon G_i\to H$ з паратопологічної групи G_i у абелеву паратопологічну групу H, то існує неперервний гомоморфізм $f\colon G\to H$ з паратопологічної групи G у H такий, що $f|G_i=f_i$ для всіх $i\in I$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 22A05.

Означення 3. Підгрупу H паратопологічної групи G назвемо *гомоморфним ретрактом групи* G, якщо існує гомоморфізм $p\colon G \to H$ такий, що $p(h) = h$ для всіх $h \in H$. Гомоморфізм p назвемо гомоморфною ретракцією з G на H.

Оскільки кожна ретракція є факторним відображенням, то кожен гомоморфний ретракт паратопологічної групи G є фактор-групою цієї групи.

У другому розділі ми подаємо теореми існування та єдиності для вільних добутків паратопологічних груп. Ми також встановлюємо тополого-алгебраїчні властивості вільних добутків паратопологічних груп більшість з яких мають свої аналоги у теорії топологічних груп (див. [1], [4]). У третьому розділі досліджуються вільні добутки паратопологічних груп, що є топологічними групами.

1. Вільні добутки та їхні властивості.

Теорема 1. *Нехай* $\{G_i\colon i \in I\}$ *— сім'я паратопологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток* $\prod^*_{i\in I} G_i$ *існує.*

Доведення. Нехай τ — нескінченний кардинал, такий, що $\left|\bigcup_{i\in I} G_i\right| \leq \tau$. Нехай $\{H_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — сім'я всіх попарно топологічно неізоморфних паратопологічних груп таких, що $|H_\alpha| \leq \tau$. Позначимо через β систему неперервних гомоморфізмів $f_i^{\alpha\beta}$ з G_i у фіксовану групу H_α. Множину всіх таких систем позначимо через N_α. Нехай $G = \prod_{\alpha,\beta} H_{\alpha,\beta}$, де $H_{\alpha\beta} = H_\alpha$ для $\beta \in N_\alpha$.

Для кожного $i \in I$ означимо відображення σ_i з G_i у G поклавши $\sigma_i(x) = \{f_i^{\alpha\beta}(x)\}$. Кожне відображення σ_i є топологічним ізоморфізмом з G_i на $\sigma_i(G_i)$. Утотожнимо G_i з $\sigma_i(G_i)$.

Нехай F — підгрупа групи G породжена алгебраїчно множиною $\bigcup_{i\in I} G_i$. Покажемо, що група F є вільним топологічним добутком сім'ї груп $\{G_i\colon i \in I\}$. Легко бачити, що F задовольняє властивості 1 і 2 з означення вільного добутку паратопологічних груп.

Нехай $\phi_i\colon i \in I$ — неперервний гомоморфізм з паратопологічної групи G_i у паратопологічну групу H. Не втрачаючи загальності, припустимо, що $|H| \leq \tau$. Тоді для деяких α і β ми можемо утотожнити групу H з групою $G_{\alpha\beta}$ і гомоморфізм ϕ_i з гомоморфізмом $f_i^{\alpha\beta}$ для кожного $i \in I$. Тому, якщо ми означимо Φ як проекцію F на співмножники відповідні індексам α, β, то ми отримаємо, що $\Phi|_{G_i} = \phi_i$ для кожного $i \in I$. Теорема доведена. □

Теорема 2. *Нехай* $\{G_i\colon i \in I\}$ *— сім'я паратопологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток* $\prod^*_{i\in I} G_i$ *єдиний з точністю до ізоморфізму, тотожнього на підгрупах* G_i.

Доведення. Нехай H_1, H_2 — дві паратопологічні групи, що задовольняють властивості 1, 2 і 3 з означення 1. За властивістю 3 існують неперервні гомоморфізми $\phi_1\colon H_1 \to H_2$ і $\phi_2\colon H_2 \to H_1$, що переводять всі елементи підгруп G_i в себе. Відображення $\phi_2 \circ \phi_1$ є неперервним ендоморфізмом групи H_1, що залишає на місці всі елементи груп G_i. За властивістю 2 вільного добутку паратопологічних груп відображення $\phi_2 \circ \phi_1$ є тотожнім автоморфізмом групи H_1. Тобто відображення ϕ_1 є топологічним ізоморфізмом груп G_1 і G_2. □

Твердження 1. *Нехай* $\{G_i\colon i \in I\}$ *— сім'я паратопологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток* $\prod^*_{i\in I} G_i$ *алгебраїчно ізоморфний вільному добутку абстрактних груп* G_i.

Доведення. Нехай для кожного $i \in I$, ϕ_i — гомоморфізм (необов'язково неперервний) з G_i в довільну групу H. Для доведення теореми нам достатньо показати, що існує гомоморфізм Φ з $\prod^*_{i\in I} G_i$ у H такий, що $\Phi_i|_{G_i} = \phi_i$ для всіх $i \in I$.

Нехай A — антидискретна паратопологічна група алгебраїчно ізоморфна H. Нехай θ — ізоморфізм з H на A. Тоді для кожного $i \in I$ відображення $\theta \circ \phi_i$ є неперервним гомоморфізмом з G_i у A. Тому існує неперервний гомоморфізм δ з $\prod^*_{i\in I} G_i$ у A такий, що $\delta|_{G_i} = \theta \circ \phi_i$ для всіх $i \in I$. Означимо відображення Φ з $\prod^*_{i\in I} G_i$ у H поклавши $\Phi = \theta^{-1} \circ \delta$. Очевидно Φ є гомоморфізмом і $\Phi|_{G_i} = \phi_i$ для всіх $i \in I$. □

Безпосередньо з означення вільного добутку випливає наступна теорема

Теорема 3. *Операція вільного топологічного добутку паратопологічних груп є цілком асоціативною: якщо група G є вільним добутком сім'ї паратопологічних груп $\{G_\alpha \colon \alpha \in I\}$, а кожна група G_α є вільним добутком сім'ї паратопологічних груп $\{G_{\alpha\beta} \colon \beta \in I_\alpha\}$, то група G є вільним топологічним добутком сім'ї паратопологічних груп $\{G_{\alpha\beta} \colon \beta \in I_\alpha, \alpha \in I\}$.*

Теорема 4. *Нехай $\{G_i \colon i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп, $J \subseteq I$ — підмножина в I. Тоді підгрупа паратопологічної групи $\prod^*_{i\in I} G_i$ породжена алгебраїчно множиною $\bigcup_{i\in J} G_i$ є топологічно ізоморфною вільному топологічному добутку $\prod^*_{i\in J} G_i$.*

Доведення. Оскільки вільний топологічний добуток є єдиним, то нам достатньо показати, що для підгрупи в $\prod^*_{i\in I} G_i$ породженої множиною $\prod^*_{i\in J} G_i$ виконуються всі властивості вільного добутку $\prod^*_{i\in J} G_i$. Виконання перших двох властивостей є очевидним. Перевіримо третю властивість. Нехай H — топологічна група і для кожного $i \in J$ існує неперервний гомоморфізм $f_i \colon G_i \to H$. Для кожного $i \in I \setminus J$ означимо гомоморфізм $f_i \colon G_i \to H$ поклавши $f_i(G_i) = e$. Тоді існує гомоморфізм $f \colon \prod^*_{i\in I} G_i \to H$ з паратопологічної групи $\prod^*_{i\in I} G_i$ у H такий, що $f|G_i = f_i$ для всіх $i \in I$. Звуження h гомоморфізму f на підгрупу породжену множиною $\cup_{i\in J} G_i$ має ту властивість, що $h|G_i = f_i$ для всіх $i \in J$. □

Твердження 2. *Нехай $\{G_i \colon i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Тоді кожна підгрупа G_i є гомоморфним ретрактом вільного топологічного добутку $\prod^*_{i\in I} G_i$.*

Доведення. Нехай j — деякий елемент з I. Для кожного $i \in I \setminus \{j\}$ означимо гомоморфізм f_i з топологічної групи G_i у G_j, поклавши $f_i(G_i) = e$. Нехай f_j — тотожній гомоморфізм паратопологічної групи G_j. Тоді для кожного $i \in I$ гомоморфізм f_i є неперервним. Отже, існує неперервний гомоморфізм $f \colon \prod^*_{i\in I} G_i \to G_j$ такий, що $f|G_i = f_i$ для кожного $i \in I$. Зокрема $f|G_j$ є тотожнім відображенням. Іншими словами гомоморфізм f є гомоморфною ретракцією з паратопологічної групи $\prod^*_{i\in I} G_i$ на її підгрупу G_j. Оскільки кожна ретракція є факторним відображенням, то гомоморфізм f є факторним і група G_j є факторгрупою паратопологічної групи $\prod^*_{i\in I} G_i$. □

Наслідок 1. *Нехай $\{G_i \colon i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп, $J \subseteq I$ — підмножина в I. Тоді підгрупа паратопологічної групи $\prod^*_{i\in I} G_i$ породжена алгебраїчно множиною $\bigcup_{i\in J} G_i$ є гомоморфним ретрактом цієї групи.*

Доведення. З асоціативності вільного добутку отримаємо, що $\prod^*_{i\in I} G_i \simeq (\prod^*_{i\in J} G_i) * (\prod^*_{k\in I\setminus J} G_k)$. Тепер застосуємо твердження 2 до вільного добутку сім'ї паратопологічних груп $\{(\prod^*_{i\in J} G_i), G_k \colon k \in I \setminus J\}$. □

Для топологічного простору X через $F_p(X)$ будемо позначати вільну паратопологічну групу простору X (див. [7]).

Твердження 3. *Нехай $\{X_i\colon i \in I\}$ — сім'я топологічних просторів, $F_p(X_i)$ — вільна паратопологічна група простору X_i. Тоді вільний топологічний добуток $\prod^*_{i\in I} F_p(X_i)$ є топологічно ізоморфний вільній паратопологічній групі $F_p(\oplus_{i\in I} X_i)$.*

Доведення. Оскільки вільний топологічний добуток є єдиним, то нам достатньо показати, що для групи $F_p(\oplus_{i\in I} X_i)$ виконуються всі властивості вільного добутку сім'ї паратопологічних груп $\{F_p(X_i)\colon i \in I\}$. Дійсно, за твердженням 2.12 з роботи [7] паратопологічна група $F_p(\oplus_{i\in I} X_i)$ містить $F_p(X_i)$ як підгрупи; паратопологічна підгрупа в $F_p(\oplus_{i\in I} X_i)$, що містить всі групи $F_p(X_i)$ містить $\oplus_{i\in I} X_i$, а отже співпадає з $F_p(\oplus_{i\in I} X_i)$. Нехай $f_i\colon F_p(X_i) \to G$ — неперервні гомоморфізми з $F_p(X_i)$ у паратопологічну групу G. Тоді звуження $h_i = f_i|X_i$ є неперервними, а отже неперервним є відображення $h\colon \oplus_{i\in I} X_i \to G$, де $h(x) = h_i(x)$, якщо $x \in X_i$. Продовження відображення h до групового гомоморфізму $H\colon F_p(\oplus_{i\in I} X_i) \to G$ є неперервним і оскільки $H|X_i = h|X_i = h_i = f_i|X_i$, то $H|F_p(X_i) = f_i|F_p(X_i)$ для всіх $i \in I$. □

Твердження 4. *Нехай $\{G_i\colon i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток $\prod^*_{i\in I} G_i$ є зв'язною паратопологічною групою тоді і тільки тоді, коли усі співмножники є зв'язними паратопологічними групами.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\prod^*_{i\in I} G_i$ є зв'язною паратопологічною групою. Оскільки кожен співмножник G_i є фактор групою групи $\prod^*_{i\in I} G_i$, то G_i є зв'язною паратопологічною групою для всіх $i \in I$.

Достатність. Нехай усі паратопологічні групи G_i є зв'язними. Тоді підмножина $\bigcup_{i\in I} G_i$ паратопологічної групи $\prod^*_{i\in I} G_i$ є зв'язною і породжує цю групу. Оскільки компонента зв'язності паратопологічної групи є її нормальною підгрупою [3], то група $\prod^*_{i\in I} G_i$ є зв'язною. □

Нехай H_i — підгрупа паратопологічної групи G_i. Тоді підгрупа паратопологічної групи $\prod^*_{i\in I} G_i$ породжена алгебраїчно множиною $\bigcup_{i\in I} H_i$ є алгебраїчно ізоморфною вільному добутку $\prod^*_{i\in I} H_i$. Постає питання чи ця підгрупа є вільним топологічним добутком сім'ї паратопологічних груп $\prod^*_{i\in I} H_i$. Для топологічних груп це питання було частково розв'язане у [5].

Твердження 5. *Нехай підгрупа H_i є гомоморфним ретрактом паратопологічної групи G_i. Тоді підгрупа паратопологічної групи $\prod^*_{i\in I} G_i$ породжена алгебраїчно множиною $\bigcup_{i\in I} H_i$ є топологічно ізоморфною вільному топологічному добутку $\prod^*_{i\in I} H_i$.*

Доведення. Нехай $t_i\colon H_i \to G_i$ — гомоморфне вкладення паратопологічних груп, $r_i\colon G_i \to H_i$ — гомоморфна ретракція, $id_i\colon H_i \to H_i$ — тотожнє відображення на H_i. Позначимо $H = \prod^*_{i\in I} H_i$, $G = \prod^*_{i\in I} G_i$, $t = \prod^*_{i\in I} t_i$, $r = \prod^*_{i\in I} r_i$. Тоді

$$r \circ t = (\prod^*_{i\in I} r_i) \circ (\prod^*_{i\in I} t_i) = (\prod^*_{i\in I} r_i \circ t_i) = (\prod^*_{i\in I} id_i) = id_H.$$

Отже, гомоморфізм t має правий обернений гомоморфізм, тобто образ $r(H)$ топологічно ізоморфний H. □

Зауваження 1. Всі твердження даного розділу, а також їхні доведення легко модифікуються для випадку вільних абелевих топологічних добутків абелевих паратопологічних груп.

2. Вільні добутки, що є топологічними групами. Нехай G — група з одиницею e, бінарною операцією $m\colon (x,y)\mapsto xy$, унарною операцією $i\colon x\to x^{-1}$. Тоді множина G з бінарною операцією $m_2\colon (x,y)\mapsto yx$, унарною операцією $i\colon x\to x^{-1}$ і одиницею e буде також групою. Позначимо цю групу через G^s.

Наведемо наступні очевидні властивості групи G^s

Твердження 6. *1) Пара (G,τ), де G — група, τ — топологія на G є (пара)топологічною групою тоді і тільки тоді, коли пара (G^s,τ) є (пара)топологічною групою;*

2) відображення $i\colon x\mapsto x^{-1}$ задає ізоморфізм абстрактних груп G і G^s;

3) паратопологічна група (G,τ) є топологічною групою тоді і тільки тоді коли відображення $i\colon x\mapsto x^{-1}$ є топологічним ізоморфізмом паратопологічних груп (G,τ) і (G^s,τ);

4) якщо $\{G_i\colon i\in I\}$ — сім'я абстрактних груп, то $\prod^*_{i\in I}G_i^s\simeq(\prod^*_{i\in I}G_i)^s$.

Теорема 5. *Нехай $\{G_i\colon i\in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток $\prod^*_{i\in I}G_i$ є топологічною групою тоді і тільки тоді, коли усі співмножники G_i є топологічними групами.*

Доведення. Достатність випливає з того, що підгрупа топологічної групи є топологічною групою.

Необхідність. Для кожного $i\in I$ розглянемо гомоморфізм $f_i\colon G_i\to G_i^s\subseteq\prod^*_{i\in I}G_i^s\simeq(\prod^*_{i\in I}G_i)^s$ означений формулою $f_i(x)=x^{-1}$. Тоді існує неперервний гомоморфізм $f\colon \prod^*_{i\in I}G_i\to(\prod^*_{i\in I}G_i)^s$, що продовжує відображення f_i. Нехай $i\colon \prod^*_{i\in I}G_i\to(\prod^*_{i\in I}G_i)^s$ — гомоморфізм такий, що $i(x)=x^{-1}$. Оскільки $f|X_i=i|X_i$ для всіх $i\in I$, то $i=f$. Тобто гомоморфізм i є неперервним і група $\prod^*_{i\in I}G_i$ є топологічною групою. □

Теорема 6. *Нехай $\{G_i\colon i\in I\}$ — сім'я топологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток $\prod^*_{i\in I}G_i$ в категорії паратопологічних груп і вільний топологічний добуток ${\prod^t_{i\in I}}^*G_i$ в категорії топологічних груп є топологічно ізоморфними топологічними групами.*

Доведення. Паратопологічна група $\prod^*_{i\in I}G_i$ є топологічною групою, для якої виконуються всі умови з означення вільного добутку сім'ї $\{G_i\colon i\in I\}$ в категорії топологічних груп. Отже, з єдиності вільного добутку сім'ї топологічних груп, маємо, що групи $\prod^*_{i\in I}G_i$ і ${\prod^t_{i\in I}}^*G_i$ є топологічно ізоморфними. □

Твердження 7. *Нехай $\{G_i\colon i\in I\}$ — сім'я топологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток $\prod^*_{i\in I}G_i$ є гаусдорфовою топологічною групою тоді і тільки тоді, коли усі співмножники є гаусдорфовими топологічними групами.*

Доведення. Необхідність випливає з того, що підгрупа гаусдорфової топологічної групи є гаусдорфовою топологічною групою. Достатність була встановлена у [4]. □

Для паратопологічної групи (G,τ) через $(G,\tau^\flat)$ (або скорочено $G^\flat$) позначається найсильніша групова топологія на G, що мажорується топологією τ. Позначимо через $i\colon G\to G^\flat$ — ізоморфне ущільнення. Група $G^\flat$ має універсальну властивість: якщо $h\colon G\to H$ — неперервний гомоморфізм паратопологічної групи G у топологічну групу

H, то існує неперервний гомоморфізм $h'\colon G^\flat \to H$ такий, що $h = h' \circ i$ (див. [3]). Паратопологічна група G називається $\flat$-віддільною, якщо група $G^\flat$ є гаусдорфовою. Очевидно, що паратопологічна група (G, τ) є $\flat$-віддільною, як тільки на групі G існує гаусдорфова групова топологія слабша ніж τ.

Теорема 7. *Нехай $\{G_i\colon i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Тоді $\prod^*_{i\in I} G_i^\flat \simeq (\prod^*_{i\in I} G_i)^\flat$.*

Доведення. Нехай $\{(G_i, \tau_i)\colon i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Група $(\prod^*_{i\in I} G_i)^\flat$ є топологічною групою, отже підгрупа (G_i, τ_i') в топології індукованій з $(\prod^*_{i\in I} G_i)^\flat$ є топологічною групою. Тотожній ізоморфізм $\prod^*_{i\in I} G_i \to (\prod^*_{i\in I} G_i)^\flat$ є неперервним, отже неперервними є його звуження $(G_i, \tau_i) \to (G_i, \tau_i')$. За універсальною властивістю групи $G_i^\flat$ тотожній ізомоморфізм $t_i\colon (G_i, \tau_i^\flat) \to (G_i, \tau_i')$ є неперервним. Отже, існує неперервне продовження гомоморфізмів t_i до гомоморфізму $t\colon \prod^*_{i\in I} G_i^\flat \to (\prod^*_{i\in I} G_i)^\flat$. Тотожні ізоморфізми $h_i\colon (G_i, \tau_i) \to (G_i, \tau_i^\flat)$ є неперервними. Отже, існує неперервний ізомоморфізм $h\colon \prod^*_{i\in I} G_i \to \prod^*_{i\in I} G_i^\flat$, що їх продовжує. Оскільки група $\prod^*_{i\in I} G^\flat$ є топологічною групою, то за універсальною властивістю групи $G^\flat$ існує неперервний ізоморфізм $h'\colon (\prod^*_{i\in I} G_i)^\flat \to \prod^*_{i\in I} G_i^\flat$. □

З твердження 7 і теореми 7 випливає наступний наслідок

Наслідок 2. *Нехай $\{G_i\colon i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток $\prod^*_{i\in I} G_i$ є $\flat$-віддільною групою тоді і тільки тоді, коли усі співмножники G_i є $\flat$-віддільними групами.*

Твердження 8. *а) Вільний добуток $\prod^*_{i\in I} G_i$ довільної сім'ї $\{G_i\colon i \in I\}$ дискретних паратопологічних груп є дискретною паратопологічною групою;*

б) вільний добуток $\prod^*_{i\in I} G_i$ довільної сім'ї $\{G_i\colon i \in I\}$ антидискретних паратопологічних груп є антидискретною паратопологічною групою.

Доведення. а) Доведення випливає з того факту, що топологія вільного добутку — це найсильніша групова на $\prod^*_{i\in I} G_i$, що індукує на групах G_i вихідні топології.

б) Нехай G — паратопологічна група, S — найбільша антидискретна підмножина в G, що містить одиницю групи G, або іншими словами, множина елементів групи G, що не відокремлюються відкритими множинами від одиниці групи G. Тоді множина S є нормальною підгрупою в G (див. [2]). Отже, якщо паратопологічна група G породжується алгебраїчно своїм антидискретним підпростором S, то група G є антидискретною. Залишається зауважити, що група $\prod^*_{i\in I} G_i$ породжується своїм антидискретним підпростором $\bigcup_{i\in I} G_i$. □

Твердження 9. *Нехай $G \neq \{e\}$ і $H \neq \{e\}$ — паратопологічні T_0-групи. Тоді вільний топологічний добуток $G * H$ є локально компактним тоді і тільки тоді, коли групи G і H дискретні.*

Доведення. Необхідність. Вільний добуток $G * H$ є дискретною, зокрема і локально компактною паратопологічною групою для дискретних груп G і H.

Достатність. Оскільки кожна локально компактна паратопологічна група є топологічною групою [3], то група $G * H$ є топологічною групою. Зокрема топологічними групами є також і співмножники G і H. З теореми 6 випливає, що вільний добуток груп G і H у категорії паратопологічних груп — $G * H$ та вільний добуток груп G і H у категорії топологічних груп $G *_t H$ є топологічно ізоморфними топологічними групами. Як було встановлено у [5] вільний добуток двох нетривіальних гаусдорфових топологічних груп є локально компактним тоді і тільки тоді, коли обидва співмножники мають дискретну топологію. □

Нагадаємо, що метрика d на групі G називається лівоінваріатною, якщо $d(ax, ay) = d(x, y)$ для всіх $x, y, a \in G$.

Твердження 10. *Нехай $G \neq \{e\}$ і $H \neq \{e\}$ — паратопологічні групи. Тоді вільний топологічний добуток $G * H$ є метризованим лівоінваріантною метрикою тоді і тільки тоді, коли групи G і H дискретні.*

Доведення. Необхідність. Вільний добуток $G * H$ є дискретною групою, зокрема метризованою лівоінваріантною метрикою паратопологічною групою для дискретних груп G і H.

Достатність. Оскільки кожна метризована лівоінваріантною метрикою паратопологічна група є топологічною групою [3], то група $G * H$ є метризованою топологічною групою. Зокрема співмножники G і H є гаусдорфовими топологічними групами. З теореми 6 випливає, що вільний добуток груп G і H у категорії паратопологічних груп — $G*H$ та вільний добуток груп G і H у категорії топологічних груп — $G*_t H$ є топологічно ізоморфними топологічними групами. Як було встановлено Моріссом та Томпсоном у [6] вільний добуток двох нетривіальних гаусдорфових топологічних груп є метризованим тоді і тільки тоді, коли обидва співмножники мають дискретну топологію. □

По аналогії до випадку топологічних груп (див. [4]) скажемо, що паратопологічна група G є MAP–групою (maximally almost periodic), якщо G допускає неперервний гомоморфізм в компактну гаусдорфову групу.

Твердження 11. *Нехай $\{G_i \colon i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Тоді вільний топологічний добуток $\prod^*_{i \in I} G_i$ є MAP-групою тоді і тільки тоді, коли усі співмножники G_i є MAP–групами.*

Доведення. Необхідність випливає з того, що підгрупа MAP–групи є MAP–групою.

Достатність. Нехай усі паратопологічні групи G_i є MAP–групами. Нехай $f_i \colon G_i \to K_i$ — гомоморфізм з G_i у компактну гаусдорфову групу K_i. Нехай $G = \prod^*_{i\in I} G_i$, $K = \prod^*_{i\in I} K_i$, $f = \prod^*_{i\in I} f_i \colon G \to H$. Група K є MAP–групою [4, Corrigendum], отже існує неперервний гомоморфізм $h \colon K \to K'$ з K у компактну гаусдорфову групу K'. Тому $h \circ f \colon G \to K'$ — неперервний гомоморфізм з G у компактну гаусдорфову групу K', тобто G є MAP–групою. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Граев М.И. *О свободных произведениях топологических групп*// Изв. АН СССР. Сер. матем.– 1950. – №14. – С. 343–350.
2. Пирч Н.М. *Рефлексії паратопологічних груп* // Наукові записки. Українська академія друкарства. – 2007. – №11. – С. 94–97.
3. Равський О.В. *Тополого-алгебраїчні властивості паратопологічних груп*, Дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.06. – К.: 2004. – 140 с.
4. Morris S.A. *Free products of topological groups* // Bull. Austral. Math. Soc. – 1971. – №4. – P. 17–29. Corrigendum. Bull. Austral. Math. Soc. – 1975. – №12. – P.480.

5. Morris S.A., Ordman E.T., Thompson H.B. *The topology of free products of topological groups* // Proc. Second Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra, Springer Lecture Notes – 1973.– №372. – P. 220–227.
6. Morris S.A., Thompson H.B. *Sequential conditions and free products of topological groups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – №103 – P. 633–638.
7. Pyrch N.M., Ravsky O.V. *On free paratopological groups* // Mat. Stud. – 2006. – V. 25, №2. – P. 115–125.

Українська академія друкарства

Надійшло 17.06.2008
Після переробки 03.12.2009