УДК 517.76

О. Б. Скасків, Я. З. Стасюк

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ І ЦЕНТРАЛЬНОГО ПОКАЗНИКА РЯДУ ДІРІХЛЕ

O. B. Skaskiv, Ya. Z. Stasyuk. *On equivalence of the logarithmic derivative and the central exponent of the Dirichlet series*, Mat. Stud. **33** (2010), 49–55.

For Dirichlet series absolutely convergent in the half-plane $\Pi_0 = \{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ a new description of exceptional set for the asymptotic equality between its logarithmic derivative and central exponent is found.

О. Б. Скаскив, Я. З. Стасюк. *Об эквивалентности логарифмической производной и центрального показателя ряда Дирихле* // Мат. Студії. – 2010. – Т.33, №1. – С.49–55.

Для абсолютно сходящегося в полуплоскости $\Pi_0 = \{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ ряда Дирихле найдено новое описание исключительного множества в асимптотическом равенстве между его логарифмической производной и центральным показателем.

1. Вступ. Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ — фіксована послідовність така, що $0 = \lambda_0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty$ $(1 \leq n \uparrow +\infty)$. Через $S_0(\lambda)$ позначимо клас абсолютно збіжних у півплощині $\Pi_0 = \{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}. \tag{1}$$

Для $x < 0$ і $F \in S_0(\lambda)$ визначимо $M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(x, F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n \geq 0\}$ — максимальний член ряду (1), $\Lambda(x) = \Lambda(x, F) = \lambda_{\nu(x,F)}$ — його центральний показник, де $\nu(x, F) = \max\{n : |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x, F)\}$ – його центральний індекс, а через $L(x) = L(x, F) = (\ln M(x, F))'_+$ — правосторонню похідну, яка, як відомо [1, с.145, с.266], існує і є неспадною функцією на $(-\infty, 0)$.

Через L позначимо клас додатних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій, через L_1 — клас функцій $\varphi \in L$, для яких $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$ $(t \to +\infty)$, а через L_2 — клас неперервних функцій $\varphi_1 \in L_1$ таких, що

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{\varphi_1(x)} = O\Big(\frac{t}{\varphi_1(t)}\Big) \quad (t \to +\infty). \tag{2}$$

Нехай φ_1 — обернена функція до функції $\Phi_1 \in L$. Зауважимо, що умова (2) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\Phi_1(x)}{x^2} dx = O\Big(\frac{\Phi_1(x)}{x}\Big) \quad (x \to +\infty).$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B50.

© О. Б. Скасків, Я. З. Стасюк, 2010

Через $S_0^*(\lambda, \Phi_1)$ позначимо клас рядів Діріхле $F \in S_0(\lambda)$ таких, що

$$(\exists b_1 > 0)(\exists b > 0)\colon\ \Lambda(x, F) \geq b_1 \Phi_1(b/|x|) \quad (x \in [x_1, 0),\ x_1 < 0).$$

В [2] доведено (див. також [3]) таку теорему.

Теорема А (Теорема 4 [2]). *Нехай $\varphi_1 \in L_2$. Якщо $F \in S_0^*(\lambda, \Phi_1)$ і виконуються умови*

$$\lim_{t \to +\infty} t \sum_{\lambda_n \geq \Phi_1(t)} \frac{1}{n\lambda_n} = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln n(t)}{t}\ \varphi_1(t) = 0, \quad n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1, \tag{4}$$

$$\varliminf_{x \to -0} \frac{\ln L(x, F)}{\ln (1/|x|)} > 1, \tag{5}$$

то співвідношення

$$L(x, F) = (1 + o(1))\Lambda(x, F) \tag{6}$$

справджується при $x \to -0$ зовні деякої множини $E \subset [-1; 0)$ такої, що

$$DE \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma \to -0} \frac{1}{|\sigma|} \mathrm{meas}(E \cap [\sigma, 0)) = 0. \tag{7}$$

При цьому теорема 4 з [2] є прямим наслідком теореми 3 ([2]) та теореми 2.2.25 ([1, с.274]), в яких встановлюються асимптотичні рівності зовні виняткових множин для логарифмічної похідної $F'(z)/F(z)$, відповідно, в термінах центрального показника $\Lambda(x)$ ([2]) та логарифмічної похідної від максимума модуля $L(x)$ ([1]).

Власне, з теореми 2.2.25 випливає, що за умови (5) існує така множина $E \subset [-1; 0)$ скінченної логарифмічної міри, тобто $\displaystyle\int_E \frac{dx}{|x|} < +\infty$, що при $x \to -0$ $(x \notin E)$ для всіх z таких, що $\operatorname{Re} z = x$ і

$$|F(z)| = (1 + o(1))M(x, F), \tag{8}$$

виконується

$$F'(z) = (1 + o(1))L(x, F)F(z). \tag{9}$$

В [4] (див. також [5]) співвідношення (9) отримано за дещо слабших умов, при цьому для опису величини виняткової множини $E \subset [-1; 0)$ ми використовуємо поняття h-щільності в точці $x = 0$

$$D_h E \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{x \to -0} h(x)\mathrm{meas}(E \cap [x, 0)),$$

де h — додатна неспадна на $(-1; 0)$ функція. Власне, теорема 2.2.25 з [1] та теорема 1 з [4] встановлені у класі $S(-1; 0)$ — аналітичних у смузі $\{z : -1 < \operatorname{Re} z < 0\}$ функцій F таких, що для кожного $x \in (-1; 0)$ функція F — обмежена у смузі $\{z : -1 < \operatorname{Re} z < x\}$.

Теорема В ([4, 5]). *Нехай Φ_0 — додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[-1; 0)$ функція така, що $|x|\Phi_0(x) \to +\infty$ $(x \to -0)$. Якщо $F \in S(-1; 0)$ і*

$$L(x, F) \geq \Phi_0(x) \quad (x_0 \leq x < 0), \tag{10}$$

то співвідношення (9) виконується при $x \to -0$ зовні деякої множини $E \subset [-1;0)$ для всіх z, $\operatorname{Re} z = x$, таких, що виконується (8), при цьому $D_h E = 0$ для кожної функції h такої, що $h(x) = o(\Phi_0(x))$ $(x \to -0)$ і

$$h\Big(x + o\Big(\frac{1}{h(x)}\Big)\Big) = O(h(x)) \quad (x \to -0). \tag{11}$$

Вибираючи в теоремі B $\Phi_0(x) = L(x,F)$ і $h(x) = \frac{1}{|x|}$, ми отримуємо такий наслідок.

Теорема C. *Якщо $F \in S(-1;0)$ і*

$$|x| L(x,F) \to +\infty \quad (x \to -0), \tag{12}$$

то співвідношення (9) виконується при $x \to -0$ зовні деякої множини $E \subset [-1;0)$ такої, що $DE = 0$.

Використовуючи тепер теорему 3 ([2]) і теорему C, отримуємо негайно наступний наслідок.

Теорема D. *Нехай $\varphi_1 \in L_2$. Якщо $F \in S_0^*(\Lambda, \Phi_1)$ і виконуються умови (3), (4), (12), то співвідношення (6) справджується при $x \to -0$ зовні деякої множини $E \subset [-1;0)$ такої, що $DE = 0$.*

На відміну від теорем A, C, D, у теоремі B є можливість отримувати оцінку величини виняткової множини в залежності від функції Φ_0, тобто отримувати гнучку шкалу таких тверджень, що може виявитись важливим для застосувань.

Разом з цим відновлення функції F (тим паче, обчислення $L(x,F)$ за $\ln M(x,F)$) за її рядом Діріхле (тобто, за заданими (a_n) і (λ_n)) є, як правило, складною задачею. Тому, природно, викликає інтерес задача встановлення гнучкої шкали оцінок величини виняткової множини у співвідношенні (6).

У цій статті ми отримаємо теорему, подібну до теореми 3 ([4]), з новим описом величини виняткової множини, таким, як у теоремі B, а потім, як наслідок, отримаємо нові оцінки величини виняткової множини у співвідношенні (6).

2. Теорема про оцінку загального члена. Нова оцінка виняткової множини. Доведемо спочатку таку теорему, яка доповнює наслідок 1 з [2] у частині опису виняткової множини.

Теорема 1. *Нехай функція $h_0 \in L$ така, що $h_0(t) \ge t$ $(t > 0)$, $\varphi_1 \in L_2$, $F \in S_0^*(\lambda, \Phi_1)$ і виконуються умови*

$$(\exists c > 1/b)\colon \quad \frac{\ln n(t)}{t}\, h_0(c\varphi_1(t)) = o(1) \quad (t \to +\infty), \tag{13}$$

$$h_0(ct) \sum\nolimits_{\lambda_k \ge \Phi_1(t)} \frac{1}{k\lambda_k} = o(1) \quad (t \to +\infty), \tag{14}$$

де $b > 0$ — з умови $F \in S_0^*(\lambda, \Phi_1)$. Тоді знайдуться неперервна функція $c(x) \uparrow +\infty$ $(x \to +\infty)$ і множина E_1, $D_h(E_1) = 0$ з $h(x) = h_0(\frac{1}{|x|})$ такі, що для всіх $n \ge 0$ і всіх $x \in [-1;0) \setminus E_1$ виконується нерівність

$$|a_n| e^{x\lambda_n} \le \mu(x,F) \exp\left\{ - \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2}\, c(4t) \ln n(4t) dt \right\}, \quad \nu = \nu(x,F). \tag{15}$$

Доведення. За умовою $F \in S_0^*(\lambda, \Phi_1)$

$$\Lambda(x-0) \geq b_1 \Phi_1\left(\frac{b}{|x|}\right) \quad (x \in [x_1, 0)) \tag{16}$$

з деякими $b > 0$ і $b_1 > 0$. Оскільки $0 \leq \ln \mu(x, F) = \ln |a_{\nu(x,F)}| - |x|\Lambda(x)$ для $x \in [x_0, 0)$, тобто $|x|\Lambda(x) \leq \ln |a_{\nu(x,F)}|$, то з (16) для $x \in [x_0, 0)$ отримаємо

$$\ln |a_{\nu(x,F)}| \geq |x|\Lambda(x) \geq b\Lambda(x)/\varphi_1(\Lambda(x)/b_1). \tag{17}$$

Позаяк (див. [2], співвідношення (13) і (14) на с.218–219)

$$\int_A^{+\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2} dt = \frac{\ln n(A)}{A} + (1 + o(1)) \sum_{\lambda_k \geq A} \frac{1}{k\lambda_k} \quad (A \to +\infty),$$

то з умов (13) і (14) випливає, що

$$h_0(c\varphi_1(t)) \int_t^{+\infty} \frac{\ln n(u)}{u^2} du = o(1) \quad (t \to +\infty). \tag{18}$$

Нехай $l(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^{+\infty} u^{-2} \ln n(u) du$, $l_1(t) = \sup\{h_0(c\varphi_1(x))l(x) : x \geq t\}$. Виберемо $c(t)$ — неперервну зростаючу до $+\infty$ на $(0, +\infty)$ так, щоб виконувалась умова $c(t) \leq (l_1(t))^{-1/2}$. Оскільки $l_1(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$, то зрозуміло, що такий вибір функції $c(t)$ є можливий. Зауважимо, що $dl(u/b_1) \leq 0$, тому для $t > 0$

$$\begin{aligned}
\int_t^{+\infty} u^{-2} c\left(u/b_1\right) \ln n\left(u/b_1\right) du &= -\frac{1}{b_1} \int_t^{+\infty} c\left(u/b_1\right) dl\left(u/b_1\right) \leq \\
&\leq -\frac{1}{b_1} \int_t^{+\infty} \frac{dl\left(u/b_1\right)}{\left(h_0\left(c\varphi_1\left(u/b_1\right)\right) l\left(u/b_1\right)\right)^{1/2}} \leq \\
&\leq -\frac{1}{b_1 \sqrt{h_0\left(c\varphi_1\left(t/b_1\right)\right)}} \int_t^{+\infty} \frac{dl\left(u/b_1\right)}{\sqrt{l\left(u/b_1\right)}} = \frac{2\sqrt{l\left(t/b_1\right)}}{b_1 \sqrt{h_0\left(c\varphi_1\left(t/b_1\right)\right)}}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Приймемо тепер

$$\alpha(t) = -\int_t^{+\infty} u^{-2} c(u/b_1) \ln n(u/b_1) du, \ \alpha_n = \exp\Big\{-\int_0^{\lambda_n} \alpha(t) dt\Big\}, \ \tau_n = \alpha(\lambda_n) \ (n \geq 0),$$

і розглянемо ряд "порівняння"

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{z\lambda_n}. \tag{20}$$

Оскільки $\alpha(t) \uparrow 0$ $(t \to +\infty)$, то (τ_n) — неспадна і $|\tau_n| \leq \ln \alpha_n \ /\lambda_n$ $(n \geq 0)$, а оскільки з умови (13) випливає, що $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$, то з умови $F \in S_0(\lambda)$ для абсциси абсолютної збіжності ряду (20) отримуємо ([6, с.85], [7, с.10])

$$\sigma_a(f) = \varliminf_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{|a_n|}{\alpha_n}\right) = \varliminf_{n \to +\infty} \left(-\frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} + \frac{\ln \alpha_n}{\lambda_n}\right) = 0,$$

тобто $f \in S_0(\lambda)$. Доведемо тепер, що $\varlimsup_{x \to -0} \nu(x, f) = +\infty$. Для цього досить встановити, що $\varlimsup_{n \to +\infty} |a_n|/\alpha_n = +\infty$. Зауважимо, що за співвідношеннями (18) і (19)

$$h_0\big(c\varphi_1(t/b_1)\big) \int_t^{+\infty} u^{-2} c(u/b_1) \ln n(u/b_1) du \leq \frac{2}{b_1} \sqrt{l(t/b_1) h_0\big(c\varphi_1(t/b_1)\big)} = o(1) \ (t \to +\infty). \tag{21}$$

Звідси, зокрема, за умовою $h_0(t) \geq t$ $(t > 0)$, маємо, що

$$\varphi_1(t/b_1) \int_t^{+\infty} u^{-2} c\,(u/b_1) \ln n\,(u/b_1)\, du = o(1) \quad (t \to +\infty), \tag{22}$$

що тепер дає

$$\ln \alpha_n = \int_0^{\lambda_n} \Big(\int_t^{+\infty} u^{-2} c\left(u/b_1\right) \ln n\,(u/b_1)\, du \Big)\, dt = o\Big(\int_0^{\lambda_n} \frac{dt}{\varphi_1(t/b_1)} \Big) \quad (n \to +\infty).$$

Звідси, за умовою $\varphi_1 \in L_2$, отримуємо, що $\ln \alpha_n = o(\lambda_n/\varphi(\lambda_n/b_1))$ $(n \to +\infty)$. З нерівності (17) негайно тепер отримуємо, що при $x \to -0$

$$\ln\left(|a_{\nu(x,F)}|/\alpha_{\nu(x,F)}\right) \geq b \frac{\lambda_{\nu(x,F)}}{\varphi_1(\lambda_{\nu(x,F)}/b_1)} - \ln \alpha_{\nu(x,F)} = b \frac{\lambda_{\nu(x,F)}}{\varphi_1(\lambda_{\nu(x,F)}/b_1)}\,(1 + o(1)).$$

Позаяк з умови (13) випливає, що $\frac{t}{\varphi_1(t)} = \frac{\Phi_1(u)}{u}\big|_{u=\varphi_1(t)} \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, звідси отримуємо, що $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |a_n|/\alpha_n = +\infty$, тому $\mu(x, f) \to +\infty$ $(x \to -0)$, а, отже, $\nu(x, f) \to +\infty$ $(x \to -0)$.

Далі міркуємо подібно, як і в [2]. Нехай (R_j) — послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(x, f)$, занумерована так, що $\nu(x, f) = j$ для $x \in [R_j, R_{j+1})$ і, тому, якщо $\nu(R_{j+1} - 0, f) = j$, а $\nu(R_{j+1}, f) = j + p$, то вважаємо, що $R_{j+1} = R_{j+2} = \ldots = R_{j+p} < R_{j+p+1}$. Нехай $E_1 = \bigcup_{j=0}^{+\infty} [R_{j+1} + \tau_j; R_{j+1} + \tau_{j+1})$. В [2, с.217] доведено, що для $\sigma \in [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_j)$ і $n \neq j$

$$\frac{|a_n| e^{\sigma\lambda_n}}{|a_j| e^{\sigma\lambda_j}} \leq \frac{\alpha_n}{\alpha_j} \exp\{\tau_j(\lambda_n - \lambda_j)\} = \exp\left\{ - \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_\nu)) dt \right\} < 1,$$

тому $\nu(\sigma, F) = j$ для $\sigma \in [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_j)$. З останньої нерівності, інтегруючи частинами в останній експоненті, отримуємо, що нерівність (15) виконується, принаймні для всіх $\sigma \in [-1; 0) \setminus E_1$ і для всіх $n \geq 0$.

В [2, с.217] для оцінки міри виняткової множини E_1 доведено: якщо $R_j < R_{j+1} = \ldots = R_{j+p} < R_{j+p+1}$ $(p \geq 1)$ і $R \in [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_j)$, то $\operatorname{meas}(E_1 \cap [R, 0)) = |\tau_j|$; якщо $R \in [R_{j+1} + \tau_j, R_{j+1} + \tau_{j+p})$, то також $\operatorname{meas}(E_1 \cap [R, 0)) \leq |\tau_j|$. Отже, якщо $R \in [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_j)$, то, оскільки $\nu(R, F) = j$, з нерівності (16) отримаємо $|R| \geq b/\varphi_1\left(\lambda_{\nu(R-0,F)}/b_1\right)$ і

$$h(R) \operatorname{meas}(E_1 \cap [R, 0)) \leq h_0\Big(\frac{1}{|R|}\Big)|\tau_j| \leq h_0\Big(\frac{1}{b}\varphi_1(\lambda_j/b_1)\Big)|\tau_j|.$$

З (21), оскільки $c > 1/b$, отримуємо, що $h(R) \operatorname{meas}(E_1 \cap [R, 0)) = o(1)$, $R \to -0$ $(R \in [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_j))$. Якщо ж $R \in [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_{j+p})$, $p \geq 1$, то

$$|R| \geq |R_{j+1}| + |\tau_{j+p}| \geq |R_{j+1}| = |R_{j+1} + \tau_j| - |\tau_j|.$$

Оскільки $\nu(R_{j+1} + \tau_j - 0, F) = j$, то знову $|R_{j+1} + \tau_j| \geq \frac{b}{\varphi_1(\lambda_j/b_1)}$, і, отже, при $R \to -0$ $(R \in [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_{j+p}))$

$$h(R) \operatorname{meas}(E_1 \cap [R, 0)) \leq h_0\Big(\frac{1}{|R|}\Big)|\tau_j| \leq |\tau_j| h_0\left(\frac{\frac{1}{b}\varphi_1(\lambda_j/b_1)}{1 - |\tau_j| b \varphi_1(\lambda_j/b_1)}\right).$$

Враховуючи, що за (22) $|\tau_j|\varphi_1(\lambda_j/b_1)\to 0$ $(j\to+\infty)$, то у цьому випадку отримуємо

$$h(R)\ \mathrm{meas}(E_1\cap[R,0))\le|\tau_j|h_0\Big(\big(\frac{1}{b}+o(1)\big)\varphi_1\big(\lambda_j/b_1\big)\Big).$$

З (21), оскільки $c>1/b$, отримуємо, що $h(R)\mathrm{meas}(E_1\cap[R,0))=o(1)$, $R\to-0$ $(R\in[R_j+\tau_j,R_{j+1}+\tau_{j+p}))$, що завершує доведення теореми 1. □

3. Зв'язок центрального показника з поводженням похідних в околі максимума модуля. Для $F\in S_0(\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$, $\tau\in\mathbb{R}$ подібно, як і в [2, 8], визначимо

$$T(x)=x\sqrt{44/c(x)},\quad \mu(\sigma,\tau,F)=|a_\nu|e^{\tau\lambda_\nu},\quad \nu=\nu(\sigma,F),$$
$$S_m(\sigma,\tau,F)=\sum_{n:\ |\lambda_n-\lambda_\nu|\ge T(\lambda_\nu)}\lambda_n^m|a_n|e^{\tau\lambda_n},\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

де $c(x)$ — функція з теореми 1, тобто додатна неспадна на $[0,+\infty)$ і така, що $c(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$. В [2] доведено таку лему.

Лема 1 (Лема 1 [2]). *Для всіх $m\in\mathbb{Z}_+$, $\tau\in\mathbb{R}$, $|\tau-\sigma|\le 1/T(\lambda_\nu)$ при $\nu\to+\infty$*

$$\sum\nolimits_0\overset{\mathrm{def}}{=}\sum\nolimits_{n:\ |\lambda_n-\lambda_\nu|\ge T(\lambda_\nu)}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}\right)^m\exp\{-I(\lambda_\nu,\lambda_n)+(\lambda_n-\lambda_\nu)(\tau-\sigma)\}\le(n(2\lambda_\nu))^{-9},$$

де $I(\lambda_\nu,y)=\int_{\lambda_\nu}^{y}t^{-2}(y-t)c(4t)\ln n(4t)dt$.

За допомогою леми 1 з теореми 1 отримуємо таке твердження.

Лема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, то при $\sigma\to-0$ $(\sigma\in[-1;0)\backslash E_1$, $D_hE_1=0$, $h(x)=h_0(\frac{1}{|x|}))$ для всіх $m\in\mathbb{Z}_+$ і $\tau\in\mathbb{R}$ таких, що $|\tau-\sigma|<1/T(\lambda_\nu)$, $\nu=\nu(\sigma,F)$, правильна нерівність $S_m(\sigma,\tau,F)\le\lambda_\nu^m\mu(\sigma,\tau,F)(n(2\lambda_\nu))^{-9}$, де E_1 — множина з теореми 1.*

Аналіз доведень теорем 2 і 3 з [2] показує, що для їх проведення достатньо лише твердження леми 2, а також таких лем 3 і 4 (див. [2, 9]).

Лема 3. *Нехай $0\le\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_m<+\infty$, $P(z)=\sum_{n=0}^m a_ne^{z\lambda_n}$. Тоді нерівність $M(\tau,P')\le eM(\sigma,P)\lambda_me^{(\tau-\sigma)\lambda_m}$ виконується для всіх $\tau,\sigma\in\mathbb{R}$.*

Лема 4. *Нехай функція $P(z)$ — така, як в лемі 3, і для деякої точки z_0, $\mathrm{Re}\,z_0=\sigma$, виконується $|P(z_0)|\ge\theta M(\sigma,P)$, $0<\theta\le1$. Тоді для всіх z таких, що $|z-z_0|\le\theta/(7\lambda_m)$ виконуються нерівності $\frac12|P(z_0)|\le|P(z)|\le\frac32|P(z_0)|$.*

А оскільки лема 1 безпосередньо виводиться з нерівності (15), то, насправді, аналіз доведень з [2] дає, що правильне таке твердження.

Твердження. *Нехай $F\in S_0(\lambda)$, $\sup\{|a_n|:n\ge0\}=+\infty$ та існують такі множина $E_2\subset[-1;0)$ і функція $c(x)\uparrow+\infty$ $(x\to+\infty)$, що для всіх $\sigma\in E_2$ і всіх $n\ge0$ виконується нерівність (15). Тоді:*

(I) Для всіх близьких до нуля $\sigma\in E_2$, $\theta=\theta(\sigma)\in\left[\frac{1}{\nu(\sigma,F)},1\right]$ і z_0 таких, що $|F(z_0)|\ge\theta M(\sigma,F)$, $\mathrm{Re}\,z_0=\sigma$, а також для всіх $z=z_0+s$, $|s|\le r_0$, правильна рівність

$$F(z)=F(z_0)\exp\{(\lambda_\nu+\delta_1)s+\textstyle\sum_{n=2}^{+\infty}\delta_ns^n\},\quad \nu=\nu(\sigma,F),$$

де $\delta \le a(r_0)^{-j}$, $j \ge 1$, a *— деяка абсолютна стала,* $r_0 = \min\{\theta/(29T(\lambda_\nu)); |\sigma|(1-\varepsilon(\sigma))\}$, $\varepsilon(\sigma) \to +0$ $(\sigma \to -0)$ *— довільна функція.*

(II) Для всіх $k \in \mathbb{N}$, $z : \operatorname{Re} z = \tau, |\tau - \sigma| < r_1/2$ *при* $\sigma \to -0$ $(\sigma \in E_2)$ *правильні рівності*

$$F^{(k)}(z) = \lambda^k_{\nu(\sigma,F)}(F(z) + O(\beta(\sigma)M(\tau,F))), \quad M(\tau,F^{(k)}) = (1+o(1))\lambda^k_{\nu(\sigma,F)}M(\tau,F),$$

де $r_1 = \min\{1/(30T(\lambda_{\nu(\sigma,F)})), |\sigma|(1-\varepsilon_1(\sigma))\}$, *а* $\varepsilon_1(\sigma) \to +0$ $(\sigma \to -0)$ *— довільна функція,* $\beta(\sigma) = \max\{(n(2\lambda_{\nu(\sigma,F)}))^{-9}; T(\lambda_{\nu(\sigma,F)})/\lambda_{\nu(\sigma,F)}\}$. *Зауважимо, що* $\beta(\sigma) \to 0$ $(\sigma \to -0)$.

З огляду на сказане вище можна вважати доведеною таку теорему.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для кожного* $k \in \mathbb{N}$, *кожної точки* z_0, $\operatorname{Re} z_0 = \sigma$, *і такої, що* $\beta(\sigma)M(\sigma,F)/|F(z_0)| = o(1)$ $(\sigma \to -0)$ *при* $\sigma \to -0$ $(\sigma \in [-1;0) \setminus E_1,\ D_h E_1 = 0,\ h(x) = h_0(1/|x|))$, *виконується співвідношення*

$$F^{(k)}(z_0) = \lambda^k_{\nu(\sigma,F)}(1+o(1))F(z_0), \quad M(\sigma,F^{(k)}) = (1+o(1))\lambda^k_{\nu(\sigma,F)}M(\sigma,F).$$

Теорему 2 отримуємо з п.(II) твердження, вибираючи $\tau = \sigma$ і $E_2 = [-1;0) \setminus E_1$, де E_1 — множина з теореми 1.

З теореми 2 отримаємо наступний наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* $\varphi_1 \in L_2$, *а функція* $h_0 \in L$ *така, що* $h_0(t) \ge t$ $(t > 0)$ *і для функції* $h(x) = h_0(1/|x|)$ *виконується умова (11). Якщо для функції* $F \in S_0(\lambda)$ *виконуються умови (13), (14) і*

$$(\exists b_1 > 0)(\exists b > 0): \ \ \ln \mu(x,F) \ge b_1 \Phi_1(b/|x|) \quad (x \in [x_2, 0),\ x_2 < 0),$$

то співвідношення (6) справджується при $x \to -0$ *зовні деякої множини* $E \subset [-1;0)$ *такої, що* $D_h(E) = 0$.

Для доведення наслідку 1 достатньо скористатися теоремою 2 з $k = 1$ і теоремою B.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стрелиц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. – 468 с.
2. Скасків О.Б. *Про логарифмічну похідну і центральний показник ряду Діріхле* // Матем. вісник НТШ. – 2005. – Т.2. – С.213–230.
3. Скасків О.Б. *Про центральний показник абсолютно збіжних рядів Діріхле* // Доп. НАН України. – 2000. – №10. – С.27–30.
4. Скасків О.Б., Стасюк Я.З. *Про похідні абсолютно збіжних рядів Діріхле* // Наук. вісник Чернів. на. ун-ту. – 2005. – Вип.239. – С.107–111.
5. Скасків О.Б., Стасюк Я.З. *Про похідні рядів Діріхле* // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С.258–265.
6. *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды експонент. – М.: Наука, 1983. – С.176.
7. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993. – 168 с.
8. Шеремета М.Н. *О производной целого ряда Дирихле* // Матем. сб. – 1988. – Т.137 (179), №1 (9). – С.128–139.
9. Шеремета М.Н. *Асимптотические свойства целых функций, заданных рядами Дирихле, и их производных* // Укр. мат. журн. – 1979. – Т.31, №6. – С.723–730.

Львівський національний університет імені Івана Франка
механіко-математичний факультет
matstud@franko.lviv.ua
yaroslav_stasyuk@yahoo.com

Надійшло 30.05.2009
Після переробки 29.11.2009