

УДК 512.4

Ю. ЛЕОНОВ

О СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ РОСТЕ САМОПОДОБНЫХ ГРУПП

Yu. Leonov. *On subexponential growth of self-similar groups*, Mat. Stud. **33** (2010), 22–28.

A sufficient condition for subexponential growth of some self-similar groups is obtained.

Ю. Леонов. *О субэкспоненциальном росте самоподобных групп* // Мат. Студії. – 2010. – Т.33, №1. – С.22–28.

Устанавливается достаточное условие субэкспоненциального роста самоподобных групп.

В 1968 году Дж. Милнор ([1]) поставил вопрос о существовании групп, у которых функция роста растет быстрее любой степенной функции и медленнее показательной. Такие группы называются группами промежуточного роста.

Функция роста конечно-порожденной группы G с системой порождающих S определяется соотношением

$$\gamma_{G,S}(n) = \#\{g \in G : l_S(g) \leq n\},$$

где $l_S(g)$ — длина элемента g относительно S . Будем говорить, что функция $f_1(n)$ растет не быстрее, чем $f_2(n)$: $f_1(n) \preceq f_2(n)$, если найдется $c > 0$, такое, что $f_1(n) \leq f_2(cn)$, для любых $n \in \mathbb{N}$. Если $f_1(n) \preceq f_2(n)$ и $f_2(n) \preceq f_1(n)$, то функции эквивалентны: $f_1(n) \sim f_2(n)$. Функции роста конечно порожденной группы при различных конечных системах порождающих эквивалентны. Поэтому далее мы будем рассматривать функции роста с точностью до эквивалентности $\gamma_G(n)$. В работе [2] Р. И. Григорчук показал, что группа Gr , построенная в [3], имеет промежуточный рост, тем самым ответив на вопрос Милнора.

Исследуя функции роста группы, мы часто можем узнать другие важнейшие ее характеристики. Так, если группа G растет медленнее, чем экспоненциальная функция (растет субэкспоненциально), то есть выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma_G(n)} = 1,$$

то G является аменабельной, а если медленнее какой-либо степенной функции, то G почти нильпотентна ([4]). Таким образом, при исследовании роста бесконечных не почти нильпотентных групп наиболее важным вопросом является следующий: растет ли группа экспоненциально или субэкспоненциально.

В данной работе мы устанавливаем условие субэкспоненциального роста самоподобных групп.

Группа G , действующая на бесконечном регулярном корневом d -дереве $T(d)$ (от каждой вершины вниз исходит ровно d ребер) называется самоподобной, если множество

2000 *Mathematics Subject Classification*: 20F69, 20E08, 20F65.

Keywords: subexponential growth, self-similar group, polynomial growth

doi:10.30970/ms.33.1.22-28

© Ю. Леонов, 2010

ограничений действий ее элементов на каждом поддереве совпадает с G . В классе самоподобных групп на сегодняшний день известно большое количество групп с уникальными свойствами. Например, среди таких групп находятся наиболее простые примеры групп Бернсайдова типа (периодических бесконечных конечно-порожденных групп). Таковыми являются и группа Григорчука Gr и известные p -группы Гупта-Сидки ([5]).

Будем говорить, что вершина v дерева $T = T(d)$ находится на уровне $m > 0$, если эта вершина удалена от корневой вершины на расстоянии m . Регулярное корневое дерево T_v с корневой вершиной v является поддеревом дерева T и совпадает с ним после отождествления корневых вершин этих деревьев. Ясно, что число деревьев с корневой вершиной уровня m равно d^m . Множество вершин уровня m обозначим $V^{(m)}$. Пусть $G \leq \text{Aut} T$ - самоподобная группа. Сужение действия элемента $g \in G$ на поддерево дерева T с корневой вершиной $v \in V^{(m)}$ (сужение вдоль v) назовем проекцией элемента g и обозначим $g|_v$. Будем также говорить, что $g|_v$ — это проекция элемента g на уровень m .

Рассмотрим самоподобную группу, для которой можно выбрать систему порождающих

$$S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{s_1}, \beta_1, \dots, \beta_{s_2}\}$$

со следующими свойствами. Элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_{s_1}$ переставляют только поддеревья с корневыми вершинами множества $V^{(m)}$, для $m \leq \text{const}(G) \in \mathbb{N}$. Такие элементы назовем финитарными. Как следствие, группа $A(G) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{s_1} \rangle$ — конечная. Элементы β_i , $i = 1, \dots, s_2$ обладают таким свойством, что $\beta_i|_{v_j} \in A$ — финитарный элемент для всех j , за исключением некоторого $j = j(i)$ для которого сужение $\beta_i|_{v_{j(i)}}$ лежит во множестве $\{\beta_1, \dots, \beta_{s_2}\}$. Из определений следует, что элемент $g \in G$ может быть представлен в виде

$$g = (\beta_{i_1}^{a_1})^{n_1} \dots (\beta_{i_k}^{a_k})^{n_k} \cdot a_{k+1}, \quad (1)$$

где $a_1, \dots, a_{k+1} \in A(G)$. Порождающие элементы β_i , $i = 1, \dots, s_2$ назовем активными и длину элемента g будем вычислять в терминах длин активных порождающих. Обозначим

$$B(G) = \{\beta_i^a : i = 1, \dots, s_2; a \text{ пробегает множество } A\}.$$

Таким образом, *длиной элемента g* назовем число

$$l_S(g) = \sum_{j=1}^k n_j + \lambda(a_{k+1}),$$

для наименьшего возможного представления элемента g вида (1), где $\lambda(a) = 1$, если $a \in A(G)$, $a \neq 1_G$ и $\lambda(1_G) = 0$. Такому определению длины соответствует конечная система порождающих

$$S = S(G) = A(G) \cup B(G) \cup B(G)^{-1}$$

группы G , поэтому определение корректное. Самоподобные группы, допускающие указанное выше задание в виде порождающих элементов, назовем плоскими самоподобными группами. Класс плоских самоподобных групп достаточно большой. Так, плоскими самоподобными группами являются группы итерированных монодромий квадратичных многочленов (определение см. [6]).

Говорят, что конечно-порожденная самоподобная группа G не имеет растягивания, если для некоторой системы порождающих S выполняется неравенство

$$l_S(g) \geq \sum_{v \in V^{(1)}} l_S(g|_v), \quad (2)$$

для всех $g \in G$. Из определений видно, что плоские самоподобные группы не имеют растягивания при $S = S(G)$.

Будем говорить, что конечно-порожденная самоподобная группа G имеет стягивание уровня N , если для некоторой системы порождающих S и для некоторых $N, M \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda < 1$, выполняется неравенство

$$\lambda \cdot l_S(g) \geq \sum_{v \in V(N)} l_S(g|_v),$$

для всех $g \in \Gamma_G(n)$, $n \geq M$. Ярким представителем групп, имеющих стягивание, является первая группа Григорчука Gr .

Пусть G — конечно-порожденная самоподобная группа, которая не имеет растягивания для системы порождающих S . Предметом нашего исследования является рост множества

$$\Gamma_G(n) = \{g: l_S(g) \leq n\}.$$

Для некоторого натурального N , рассмотрим множество элементов длины $\leq n$ у которых нет сокращений длин слов при проекциях до уровня N

$$\bar{\Gamma}_G^{\{N\}}(n) = \{g \in \Gamma_G(n): l_S(g) = \sum_{v \in V(N)} l_S(g|_v)\}.$$

Такое множество назовем *граничным множеством множества* $\Gamma_G(n)$.

Множество $M \subseteq G$ называется N -зависимым мощности K_N для некоторого натурального N в группе G , если найдется такое $K_N \geq 1$, что для любых $g \in M$ с последовательностью проекций $\varphi_N(g) = (g|_{v_1}, \dots, g|_{v_{d^N}})$ множество

$$H_{j,N}(g, M) = \{h \in M: h|_{v_i} = g|_{v_i} \text{ для всех } i \neq j\}$$

имеет ограниченную мощность $|H_{j,N}(g, M)| \leq K_N$ для всех $j \in \{1, \dots, d^N\}$.

Легко видеть, что если группа имеет стягивание уровня N , то ее граничное множество $\bar{\Gamma}_G^{\{N\}}(n)$ конечно. Следовательно, такое множество N -зависимо.

Следующая теорема обобщает ситуацию на класс групп с неограниченно растущими граничными множествами. А именно, мы покажем, что рост плоской самоподобной группы G тесно связан со свойствами граничного множества. Метод доказательства представляет собой существенное обобщение доказательства оценки сверху роста группы Григорчука, предложенное автором в работе [7].

Теорема 1. Пусть $G \leq \text{Aut } T_d$ — плоская самоподобная группа, порождаемая множеством

$$S = A(G) \cup B(G) \cup B(G)^{-1}.$$

Тогда, если множество $\bar{\Gamma}_G^{\{N\}}(n)$ является N -зависимым для некоторого натурального N , то группа G имеет субэкспоненциальный рост. Более того, верна оценка

$$\gamma_G(n) \preceq e^{\psi(n)}, \quad \psi(n) = \frac{n}{\log n}. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть G — группа, указанная в условии теоремы, и S — система порождающих G . Пусть также для некоторого натурального N , множество $\bar{\Gamma}_G^{\{N\}}(n)$ является N -зависимым мощности K_N . Покажем оценку (3) для $R(n) = |\Gamma_G(n)|$.

Оценивать рост функции $R(n)$ будем по индукции. Так как оценка дается с точностью до эквивалентности, то основание X показательной функции и основание логарифма в формуле (3) можно выбрать любыми. Пусть, $\bar{S} = |S| + 1$, $\log$ — натуральный логарифм. Обозначим,

$$D = \log(2d^N + 1), \quad \bar{N} = d^{25Nd^N}.$$

Упорядочим вершины уровня N : $v_1, \dots, v_{d^N}$ и рассмотрим для некоторого элемента $g \in G$ последовательность проекций $\varphi_N(g) = (g|_{v_1}, \dots, g|_{v_{d^N}})$. По определению группы $G \leq$

$\text{Aut } T_d$, существует конечное число элементов h с условием $\varphi_N(g) = \varphi_N(h)$. Пусть I_N — максимально возможное число элементов с одинаковой последовательностью проекций на уровень N (оно ограничено порядком группы автоморфизмов конечного дерева). Положим, $X = \max\{\bar{S}^{\log \bar{N}}, I_N \cdot \bar{N}, (d^N \cdot I_N)^{d^N}, K_N^{3Dd^N}\}$.

Докажем неравенство

$$R(n) \leq X^{\frac{n}{\log n}} \quad (4)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу $X > 1$ и определения эквивалентности роста функций, мы таким образом докажем оценку (3).

В силу неравенства $\bar{S}^{\log \bar{N}} \leq X$, имеем

$$R(\bar{N}) \leq \bar{S}^{\bar{N}} = (\bar{S}^{\log \bar{N}})^{\bar{N}/\log \bar{N}} \leq X^{\bar{N}/\log \bar{N}}.$$

Аналогично проверяется оценка (4) для всех $n \leq \bar{N}$.

Считая выполненной базу индукции, предположим верность нашей оценки для всех множеств $R(x)$, $\bar{N} \leq x < n$. Докажем неравенство при $x = n$.

Зафиксируем последовательность $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n = \frac{D}{\log n}$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим разбиение множества $\Gamma_G(n)$ на два дизъюнктных подмножества

$$\Gamma_1^{\{N\}}(\alpha_n, n) = \{g \in \Gamma_G(n) : (1 - \alpha_n) \cdot l_S(g) \geq \sum_{v \in V(n)} l_S(g_v)\}$$

и

$$\Gamma_2^{\{N\}}(\alpha_n, n) = \Gamma_G(n) \setminus \Gamma_1^{\{N\}}(\alpha_n, n).$$

Первое множество характеризует элементы группы G со сравнительно большими сокращениями слов при проектировании, второе множество характеризуется малыми сокращениями. Очевидно, что $\bar{\Gamma}_G^{\{N\}}(n) \subseteq \Gamma_2^{\{N\}}(\alpha_n, n)$.

Оценим мощность множеств $\Gamma_1^{\{N\}}(\alpha_n, n)$ и $\Gamma_2^{\{N\}}(\alpha_n, n)$ с ростом n . Будем оценивать количество элементов указанных нами множеств по индукции по количеству элементов на проекциях уровня N .

1. Докажем неравенство $|\Gamma_1^{\{N\}}(\alpha_n, n)| < X^{\psi(n)}/2$. Пусть, $\psi'(n)$ — функция, удовлетворяющая равенству $|\Gamma_1^{\{N\}}(\alpha_n, n)| = X^{\psi'(n)}$. Допустим, что $g \in \Gamma_1^{\{N\}}(\alpha_n, n)$, $l_S(g|_{v_i}) = n_i$. Тогда, числа n_i удовлетворяют соотношению $\sum_{i=1}^{d^N} n_i \leq (1 - \alpha_n)n$.

Пусть $L(m, n)$ — число всевозможных (упорядоченных) сумм представления числа n неотрицательными целыми слагаемыми в количестве m . Ясно, что $L(1, n) = 1$, для $n \geq 0$ и $L(m, n) = \sum_{k=0}^n L(m-1, k)$. Отсюда по индукции следует, что $L(m, n) \leq (n+1)^{m-1}$.

Для фиксированного разбиения $\{n_1, \dots, n_{d^N}\}$ числа $(1 - \alpha_n) \cdot n$ мощность множества

$$\{g \in \Gamma_1^{\{N\}}(\alpha_n, n) : l_S(g|_{v_i}) \leq n_i\}$$

оценивается сверху (при помощи индукции по количеству элементов на проекциях) числом $I_N \cdot \prod_{n_i} X^{\psi(n_i)}$. Следовательно,

$$X^{\psi'(n)} \leq I_N \cdot L(d^N, (1 - \alpha_n)n) \cdot \max \left\{ \prod_{n_i} X^{\psi(n_i)} : n_1, \dots, n_{d^N} \right\}.$$

Максимум произведения справа достигается, в силу свойств функции $X^{\psi(n)}$, при всех одинаковых (и максимальных) значениях $n_1, \dots, n_{d^N}$. Отсюда,

$$\psi'(n) \leq \log_X(I_N) + (d^N - 1) \cdot \log_X((1 - \alpha_n)n + 1) + d^N \cdot \psi\left(\frac{1 - \alpha_n}{d^N}n\right).$$

Из индуктивного предположения о функции $\psi(x)$ при $x < n$, следует

$$d^N \cdot \psi\left(\frac{1 - \alpha_n}{d^N}n\right) \leq \frac{(1 - \alpha_n)n}{\log\left(\frac{1 - \alpha_n}{d^N}n\right)} = \frac{n(\log n - D)}{\log n(\log n - c_n)},$$

для $c_n = \log \log n - \log(\log n - D) + N \log d$.

Заметим теперь, что c_n убывающая последовательность, имеющая предел $\log d^N$. Причем, для $n \geq \bar{N}$ верно неравенство $c_n \leq \log(1.5d^N) < D$. Обозначим, $c'_n = D - c_n$. Имеем, (заменяя в последней оценке c_n на минимально возможное значение $\log d^N$)

$$\begin{aligned} \psi'(n) &\leq d^N \cdot \log_X(I_N \cdot n) + \frac{n(\log n - D)}{\log n(\log n - c_n)} \leq \frac{n}{\log n} + \\ &+ \frac{n}{\log n} \cdot \left(\frac{d^N \cdot \log_X(I_N \cdot n) \cdot \log n}{n} - \frac{c'_n}{\log n - \log d^N} \right). \end{aligned}$$

Покажем, что последнее слагаемое отрицательное при $n \geq \bar{N}$. Действительно, выражение в скобках $A(n, d, N)$ убывает с ростом n . Поэтому для $n \geq \bar{N}$, мы получаем

$$A(n, d, N) \leq \frac{d^N \cdot \log_X(I_N \cdot \bar{N}) \cdot \log(\bar{N})}{\bar{N}} - \frac{\log(2d^N + 1) - \log(1.5d^N)}{25Nd^N \log d - \log d^N}$$

и в силу $X \geq I_N \cdot \bar{N}$

$$A(n, d, N) \leq \frac{d^N \cdot 25Nd^N \log d}{d^{25Nd^N}} - \frac{\log(4/3)}{N \log d(25d^N - 1)}.$$

Максимум $A(\bar{N}, d, N)$ достигается при минимально возможных значениях d и N . Простой подсчет при $d = 2$ и $N = 1$ показывает, что $A(n, d, N) < 2^{-43} - \frac{\log(4/3)}{49} < -0.005$.

Учитывая, что $n \geq \bar{N} > 2^{12}$ и $X > 2$, мы можем утверждать также, что

$$\psi'(n) \leq \frac{n}{\log n} - \log_X 2$$

для всех $n \geq \bar{N}$ и $|\Gamma_1^{\{N\}}(\alpha_n, n)| \leq X^{\psi(n)}/2$ что доказывает первый случай.

2. Оценим теперь мощность множества $\Gamma_2^{\{N\}}(\alpha_n, n)$. Пусть $T(n) = |\bar{\Gamma}^{\{N\}}(n)|$. Из условия теоремы следует, что в последовательности проекций $\varphi_N(g) = (g|_{v_1}, \dots, g|_{v_{d^N}})$ уровня N элемента $g \in \bar{\Gamma}^{\{N\}}(n)$ любые $d^N - 1$ элемент определяют некоторое множество, ограниченное по мощности числом K_N , в котором находится оставшийся элемент. Пусть

$$g = (\beta_{i_1}^{a_1})^{n_1} \dots (\beta_{i_k}^{a_k})^{n_k} \cdot a_{k+1}$$

элемент, представленный в несократимом виде. Заметим, что $\beta_i^a|_v = \beta_i|_w$, где w — вершина, в которую элемент $a \in A$ перевел вершину v . Рассмотрим в графическом виде все проекции элемента g на уровень N , записывая сокращения порождающих лишь в группе A

$$g|_{v_i} = h_{i,1}h_{i,2} \dots,$$

где $h_{i,j} \in B(G) \cup B(G)^{-1}$. Будем читать слово g (с буквами из множества $B(G) \cup B(G)^{-1}$) слева направо до тех пор пока ни одну из проекций уровня N читаемого фрагмента нельзя переписать в группе G на слово меньшей длины (то есть, до тех пор пока на каждой проекции фрагмент слова является наименьшим по длине в группе G). Максимально возможное такое слово назовем блоком и обозначим $B(g)_1$. Получив такое слово мы далее можем продолжить чтение слова g (начиная с буквы, не вошедшей в предыдущий блок) и аналогичными рассуждениями получить второе слово $B(g)_2$ и так далее. Число таких блоков не превосходит количество сокращений (в группе G) в словах-проекциях на уровень N , то есть числа $\alpha_n n$, так как каждая буква слова g по своему определению не может давать более одного сокращения среди всех слов-проекций одного уровня (каждая буква множества $B(G)$ имеет лишь один активный

элемент на проекции, в силу того, что G — плоская группа). По определению, каждое слово $B(g)_s \in \bar{\Gamma}^{\{N\}}(n)$ и $g = B(g)_1 B(g)_2 \dots$.

Оценим количество элементов множества $\Gamma_2^{\{N\}}(\alpha_n, n)$ при помощи $d^N - 1$ -ого множества элементов проекций на уровень N . Зафиксируем j , $1 \leq j \leq d^N$ и рассмотрим множество $B(j)$ таких элементов $g \in \Gamma_2^{\{N\}}(\alpha_n, n)$ у которых проекция на вершину v_j имеет (после сокращения в группе G) максимальную длину по сравнению с другими проекциями. Обозначим, $\tau = \frac{d^N - 1}{d^N}$. Ясно, что сумма длин оставшихся проекций не более τn . Воспользуемся условием N -зависимости каждого блока. Оценим мощность множества $B(j)$. Так как число блоков $\leq \alpha_n n$, то количество элементов множества $B(j)$ можно оценить с учетом зависимой проекции на вершине v_j через число элементов на остальных проекциях, умноженное на $K_N^{\alpha_n n}$. Число элементов на остальных проекциях оценивается по аналогии с оценкой мощности множества $\Gamma_1^{\{N\}}(\alpha_n, n)$, а именно:

$$|B(j)| \leq I_N \cdot K_N^{\alpha_n n} \cdot L(d^N - 1, \tau n) \cdot \max_{n_1, \dots, n_{d^N}} \prod_{n_i, i \neq j} R(n_i),$$

и максимум берется по всем разбиениям $\{n_1, \dots, n_{j-1}, n_{j+1}, \dots, n_{d^N}\}$ числа τn . Пусть $\psi''(n)$ такая функция, что $|\Gamma_2^{\{N\}}(\alpha_n, n)| = X^{\psi''(n)}$. Таким образом,

$$X^{\psi''(n)} \leq C_N \cdot K_N^{\alpha_n n} \cdot (\tau n + 1)^{d^N - 2} \cdot \prod_{n_i, i \neq j} R(n_i),$$

где $C_N = d^N \cdot I_N$ и числа n_i удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{d^N} n_i \leq \tau n.$$

Как и в случае оценки первого множества, максимум произведения по индукции достигается в случае $n_i = \frac{\tau n}{d^N - 1}$. Следовательно, имеем

$$X^{\psi''(n)} \leq C_N \cdot K_N^{\alpha_n n} \cdot (\tau n + 1)^{d^N - 2} \cdot \left(X^{\psi\left(\frac{n}{d^N}\right)} \right)^{d^N - 1}$$

Учитывая неравенства,

$$d^N - 2 < d^N, \tau n + 1 < n \text{ и } \psi\left(\frac{n}{d^N}\right) \leq \frac{n}{d^N \log \frac{n}{d^N}},$$

получаем оценку

$$\psi''(n) \leq \log_X C_N + \alpha_n n \log_X K_N + d^N \log_X n + \frac{\tau n}{\log n - \log d^N} = \frac{n}{\log n} \cdot A'(n, N, X),$$

где

$$A'(n, N, X) = \log_X C_N \cdot \frac{\log n}{n} + D \cdot \log_X K_N + d^N \log_X n \cdot \frac{\log n}{n} + \tau \cdot \frac{\log n}{\log n - \log d^N}. \quad (5)$$

Оценим каждое слагаемое суммы $A'(n, N, X)$ при $n \geq \bar{N}$ и выбранном X . Так как $n \geq \bar{N} > e^{5D}$, то

$$\frac{\log n}{n} < \frac{5 \cdot \log(2d^N + 1)}{(2d^N + 1)^5} < \frac{5}{(2d^N)^4}.$$

Последнее число можно грубо оценить числом $\frac{1}{24}$ в силу $d \geq 2$, $N \geq 1$. С другой стороны, в силу неравенства $X \geq C_N^{d^N}$, имеем $\log_X C_N \leq \frac{1}{d^N}$ и первое слагаемое в $A'(n, N, X)$ можно оценить сверху числом $\frac{1}{24d^N}$.

Из неравенства $X \geq K_N^{3Dd^N}$ следует оценка второго слагаемого

$$D \cdot \log_X K_N \leq \frac{1}{3d^N}.$$

Рассмотрим слагаемое $A_3 = d^N \log_X n \cdot \frac{\log n}{n}$. Из неравенств $n \geq \bar{N} > e^{5D}$ следует

$$A_3 < d^N \frac{5D \log_X e \cdot 5D}{(2d^N + 1)^5} < \frac{25D^2}{2 \cdot (2d^N + 1)^4 \log X} < \frac{25}{2 \cdot (2d^N + 1)^2 \log X}.$$

Так как $2d^N + 1 \geq 5$, то $A_3 \leq \frac{25}{20 \cdot d^N \log X}$. По условию, $X \geq \bar{S}^{\log \bar{N}} > 3^{25} > e^{15}$, поэтому выполняется $A_3 < \frac{1}{12 \cdot d^N}$.

Рассмотрим последнее слагаемое $\tau + \tau \cdot \frac{\log d^N}{\log n - \log d^N}$. В силу $n \geq d^{25Nd^N}$, имеем

$$\tau \cdot \frac{\log d^N}{\log n - \log d^N} \leq \frac{d^N - 1}{d^N} \cdot \frac{\log d^N}{25 \log d^N \cdot d^N - \log d^N} < \frac{1}{24d^N}.$$

В итоге, получаем следующую оценку

$$\psi''(n) < \frac{n}{\log n} \cdot \left(\frac{1}{24d^N} + \frac{1}{3d^N} + \frac{1}{12d^N} + 1 - \frac{1}{d^N} + \frac{1}{24d^N} \right) = \frac{n}{\log n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2d^N} \right).$$

Заметим теперь, что $\log_X 2 \leq \frac{n}{2d^N \cdot \log n}$, для $n \geq \bar{N}$. Отсюда,

$$\psi''(n) \leq \frac{n}{\log n} - \log_X 2.$$

Таким образом, мы показали что

$$R(n) \leq X^{\psi'(n)} + X^{\psi''(n)} \leq 2 \cdot X^{\psi(n)} / 2 = X^{\frac{n}{\log n}}.$$

Следовательно, оценка (3) доказана с точностью до эквивалентности. Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Milnor J. *Problem 5603*// Amer. Math. Monthly. – 1968. – V. 75, №6. – P.685–686.
2. Григорчук Р. И. *Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних*// Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1984. – №5. – С.939–985.
3. Григорчук Р. И. *К проблеме Бернсайда о периодических группах*// Функци. анализ и его прилож. – 1980. – Т.14, вып.1. – С.53–54.
4. Gromov M. *Groups of polynomial growth and expanding maps*// Publ. Math. IHES. – 1981. – V.53. – P.53–73.
5. Гупта Н., Сидки С. *Some infinite p-groups*// Алгебра и логика. – 1983. – V.22, №5. – С.584–589.
6. Некрашевич В. В. *Групи ітерованих монодромій*// Докл. АН Украины. – 2003. – №4. – С.18–20.
7. Леонов Ю. Г. *Про оцінку функції росту для деяких самоподібних груп*// Вісник Київського Ун-ту. С-я фізико-матем. науки. – 2004. – №3. – С.32–34.

Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова
65000, Кузнечная 1, Одесса
кафедра информационных технологий
leonov_yu@yahoo.com

Поступило 7.06.2009