

УДК 517.9

Л. В. МАТВИЮК, З. М. ЛЫСЕНКО, А. П. НЕЧАЕВ

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРЫ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ

L. V. Matviyuk, Z. M. Lysenko, A. P. Nechayev. *On boundary value problems for a pair of polyanalytic functions*, Mat. Stud. **33** (2010), 101–106.

We establish necessary and sufficient conditions of Noetherness and the formula for calculation of the index of some boundary value problems containing differential operator Δ , shift operator and the operator of conjugation for a pair of polyanalytic functions.

Л. В. Матвиюк, З. М. Лысенко, А. П. Нечаев. *О краевых задачах для пары полианалитических функций* // Мат. Студії. – 2010. – Т.33, №1. – С.101–106.

Найдены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также формула для вычисления индекса некоторых краевых задач, содержащих дифференциальный оператор Δ , операторы сдвига и сопряжения, для пары полианалитических функций.

Постановка краевых задач. Пусть замкнутая кривая Ляпунова Γ ограничивает конечную односвязную область G , $0 \in G$. Дополнительно потребуем, чтобы контур Γ имел гладкость порядка $n - 1$. Задан также диффеоморфизм $\alpha(t)$, переводящий Γ в себя с сохранением ориентации ($\alpha = \alpha_+(t)$) или с изменением ориентации ($\alpha = \alpha_-(t)$). Предполагаем, что $\inf_{t \in \Gamma} |\alpha'(t)| > 0$ и $\alpha'(t) \in H_\lambda(\Gamma)$, $0 < \lambda \leq 1$, где $H_\lambda(\Gamma)$ — банахово пространство функций, удовлетворяющих на Γ условию Гёльдера с показателем λ .

Через $E_p(G)$ ($1 < p < \infty$) обозначим класс Смирнова аналитических в G функций, представимых интегралами типа Коши с плотностями из $L_p(\Gamma)$. Пусть также $W_p^{(r)}(\Gamma)$ — пространство Соболева функций $\varphi \in L_p(\Gamma)$, имеющих обобщенные производные $\varphi^{(k)} \in L_p(\Gamma)$ ($k \in \{1, 2, \dots, r\}$), при этом $W_p^{(0)}(\Gamma) = L_p(\Gamma)$. Введем операторы:

$$\begin{aligned} (I_\varphi)(t) &= \varphi(t), \quad (\mathbb{C}\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}, \quad (V_{\alpha_\pm}\varphi)(t) = \varphi[\alpha_\pm(t)], \\ (S_\Gamma\varphi)(t) &= \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (t \in \Gamma), \quad P_\Gamma = (I + S_\Gamma)/2, \\ Q_\Gamma &= I - P_\Gamma, \quad \Delta = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \bar{t}}. \end{aligned}$$

Оператор сингулярного интегрирования S_Γ порождает пространства

$$L_p^+(\Gamma) = \text{Im } P_\Gamma|_{L_p(\Gamma)},$$

где “ $|$ ” — сужение оператора, и $W_p^{(r)+}(\Gamma) = W_p^{(r)}(\Gamma) \cap L_p^+(\Gamma)$.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 58J32.

Keywords: Noetherness, differential operator, shift operator, conjugation operator, polyanalytic function
doi:10.30970/ms.33.1.101-106

© Л. В. Матвиюк, З. М. Лысенко, А. П. Нечаев, 2010

Оператор Δ порождает две совокупности дифференциальных операторов

$$D_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(t) \Delta^j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (1)$$

$$\tilde{D}_i = \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij}(t) \Delta^j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2)$$

где $a_{ij}(t)$ и $b_{ij}(t)$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$), заданные и непрерывные на контуре Γ функции.

Рассматривается задача ([1]) об отыскании пары полианалитических в области G и H -непрерывных на $G \cup \Gamma$ функций вида

$$F_1(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(z) \bar{z}^k, \quad (3)$$

$$F_2(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(z) \bar{z}^k, \quad (4)$$

$\varphi_k, \psi_k \in E_p(G)$ ($k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$), угловые предельные значения которых $F_1(t, \bar{t})$ и $F_2(t, \bar{t})$ почти всюду на Γ удовлетворяют одному из следующих краевых условий:

$$D_i F_1(t, \bar{t}) = \overline{\tilde{D}_i F_2(t, \bar{t})} + h_i(t), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (5)$$

$$D_i F_1[\alpha_+(t), \overline{\alpha_+(t)}] = \overline{\tilde{D}_i F_2(t, \bar{t})} + h_i(t), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (6)$$

$$D_i F_1[\alpha_-(t), \overline{\alpha_-(t)}] = \tilde{D}_i F_2(t, \bar{t}) + h_i(t), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (7)$$

где выражения в левых и правых частях задач (6) и (7) будем понимать следующим образом ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$)

$$D_i F_j[\alpha(t), \overline{\alpha(t)}] = D_i F_j(\tau, \bar{\tau})|_{\tau=\alpha(t)}, \quad \tilde{D}_i F_j[\alpha(t), \overline{\alpha(t)}] = \tilde{D}_i F_j(\tau, \bar{\tau})|_{\tau=\alpha(t)}.$$

Граничные задачи (5)–(7) рассматриваем в W_p -постановке. Это значит, что граничные значения функций (3) и (4) рассматриваются в классе функций, удовлетворяющих условиям $\varphi_k, \psi_k \in W_p^{(k)+}(\Gamma)$ ($k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$), а правые части $h_i(t)$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) — заданные функции из $L_p(\Gamma)$.

Напомним ([2]), что линейный ограниченный оператор U называется нётеровым, если его образ замкнут, а дефектные числа $\alpha = \dim \ker U$ и $\beta = \dim \operatorname{coker} U$ конечны, при этом целое число $\operatorname{ind} U = \alpha - \beta$ называется индексом оператора U . Под нётеровостью и индексом краевой задачи $Uf = h$ будем понимать, соответственно, нётеровость и индекс оператора U . В данной работе с помощью операторного подхода, идея которого изложена, например, в [3], найдены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также формула для нахождения индекса задач (5)–(7). При этом существенно используются результаты работы [4], касающиеся некоторых вспомогательных операторов. Отметим, что данная статья является естественным продолжением работы [5].

2. Краевые задачи для аналитических вектор-функций. Пусть $\mathcal{L}(X, Y)$ — пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y , $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$, X^n — пространство n -мерных векторов с элементами из X , $X^{n \times n}$ — пространство $n \times n$ матриц с элементами из X .

Пусть

$$F(t, \bar{t}) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t) \bar{t}^k, \quad f_k \in W_p^{(k)+}(\Gamma), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Непосредственно находим

$$\Delta^k F(t, \bar{t}) = \sum_{i=k}^{n-1} \frac{i(i-1) \dots (i-k+1)}{4^k} f_i^{(k)}(t) \bar{t}^{i-k},$$

где $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\Delta^0 F(t, \bar{t}) = F(t, \bar{t})$.

Полагая $i-k = j$, получим

$$\Delta^k F(t, \bar{t}) = \frac{1}{4^k} \sum_{j=0}^{n-k-1} (j+k)(j+k-1) \dots (j+1) f_{k+j}^{(j)}(t) \bar{t}^j \quad (k \in \{1, 2, \dots, n-1\}).$$

Пусть

$$r_j^{(k)} = \begin{cases} (j+k)(j+k-1) \dots (j+1) & , \quad 0 \leq j \leq n-k-1, \\ 0 & , \quad n-k \leq j \leq n-1, \end{cases}$$

($k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $r_j^{(0)} = 1$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$). Тогда имеет место представление

$$\Delta^k F(t, \bar{t}) = \frac{1}{4^k} \sum_{j=0}^{n-1} r_j^{(k)} f_{k+j}^{(k)}(t) \bar{t}^j \quad (k \in \{0, 1, \dots, n-1\}). \quad (8)$$

Введем матрицы-функции размера $n \times n$

$$A(t) = \|a_{ij}(t)\|_{\substack{i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ j \in \{0, 1, \dots, n-1\}}}, \quad B(t) = \|b_{ij}(t)\|_{\substack{i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ j \in \{0, 1, \dots, n-1\}}},$$

принадлежащие пространству $C^{n \times n}(\Gamma)$. Ясно, что эти матрицы однозначно определяют совокупности дифференциальных операторов (1) и (2).

Введем также $n \times n$ матрицы-функции

$$R_s(t) = \frac{\bar{t}^s}{4^s} \text{diag} \{r_s^{(k)}\}_{k=0}^{n-1}, \quad A_s(t) = A(t)R_s(t), \quad B_s(t) = B(t)R_s(t), \quad (s \in \{0, 1, \dots, n-1\}).$$

Рассмотрим нильпотентные матрицы

$$U_1 = \|u_{ks}\|_{k,s=1}^n, \quad \text{где } u_{ks} = \begin{cases} 1, & s = k+1, \\ 0, & s \neq k+1, \end{cases} \quad U_j = U_{j-1}^2 = U_1^{2^{j-1}} \quad (j \in \{2, 3, \dots, n\}).$$

Пусть $\mathcal{D}$ — оператор обобщенного дифференцирования, рассматриваемый в пространстве $\mathcal{L}(W_p^{(r)+}, W_p^{(r-1)+})$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}} &= \text{diag} \{\mathcal{D}^0, \mathcal{D}, \dots, \mathcal{D}^{n-1}\}, \quad \tilde{A}(t) = A_0(t)\tilde{\mathcal{D}} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(t)\tilde{\mathcal{D}}U_k, \\ \tilde{B}(t) &= B_0(t)\tilde{\mathcal{D}} + \sum_{k=1}^{n-1} B_k(t)\tilde{\mathcal{D}}U_k. \end{aligned}$$

Используя (8), получим следующие представления

$$\begin{aligned} A(t)(F(t, \bar{t}), \Delta F(t, \bar{t}), \dots, \Delta^{n-1} F(t, \bar{t}))^T &= \tilde{A}(t)(f_0(t), f_1(t), \dots, f_{n-1}(t))^T, \\ B(t)(F(t, \bar{t}), \Delta F(t, \bar{t}), \dots, \Delta^{n-1} F(t, \bar{t}))^T &= \tilde{B}(t)(f_0(t), f_1(t), \dots, f_{n-1}(t))^T, \end{aligned}$$

где “ T ” — транспонирование.

Введем вектор–столбцы

$$\Phi(z) = (\varphi_0(z), \dots, \varphi_{n-1}(z))^T \in E_p^n(G), \quad \Psi(z) = (\psi_0(z), \dots, \psi_{n-1}(z))^T \in E_p^n(G),$$

$$H(t) = (h_0(t), \dots, h_{n-1}(t))^T \in L_p^n(G).$$

Тогда краевые задачи (5)–(7) примут, соответственно, вид

$$\tilde{A}(t)\Phi(t) - \mathbb{C}\tilde{B}(t)\Psi(t) = H(t), \quad (9)$$

$$V_{\alpha_+}\tilde{A}(t)\Phi(t) - \mathbb{C}\tilde{B}(t)\Psi(t) = H(t), \quad (10)$$

$$V_{\alpha_-}\tilde{A}(t)\Phi(t) - \tilde{B}(t)\Psi(t) = H(t) \quad (t \in \Gamma). \quad (11)$$

Введем операторные $n \times 2n$ матрицы

$$T_0 = (\tilde{A}(t), -\mathbb{C}\tilde{B}(t)), \quad T_1 = (V_{\alpha_+}\tilde{A}(t), -\mathbb{C}\tilde{B}(t)), \quad T_2 = (V_{\alpha_-}\tilde{A}(t), -\tilde{B}(t)) \quad (t \in \Gamma),$$

в терминах которых задачи (9)–(11) примут вид операторных уравнений

$$T_j(\Phi^T(t), \Psi^T(t))^T = H(t),$$

соответственно, при $j \in \{0, 1, 2\}$, $t \in \Gamma$.

3. Теория Нётера операторов T_j ($j \in \{0, 1, 2\}$). Введем $n \times 2n$ операторные матрицы

$$K_0(t) = (A_0(t), -\mathbb{C}B_0(t)), \quad K_1(t) = (V_{\alpha_+}A_0(t), -\mathbb{C}B_0(t)), \quad K_2(t) = (V_{\alpha_-}A_0(t), -B_0(t)).$$

Пусть $\widetilde{W}_p(\Gamma) = (W_p^{(k)+}(\Gamma))^n$. Имеет место

Теорема 1. Оператор $T_j \in \mathcal{L}(\widetilde{W}_p^2(\Gamma), L_p^n(\Gamma))$ нётеров тогда и только тогда, когда нётеров оператор $K_j \in \mathcal{L}(L_p^{2n}(\Gamma), L_p^n(\Gamma))$ ($j \in \{0, 1, 2\}$). В случае нётеровости, индексы операторов T_j и K_j связаны формулой

$$\text{ind } T_j = \text{ind } K_j + n(n-1) \quad (j \in \{0, 1, 2\}). \quad (12)$$

Доведения. Известно ([6]), что оператор $\mathcal{D}^s$ является вполне непрерывным оператором в пространстве $\mathcal{L}(W_p^{(s)}(\Gamma), L_p(\Gamma))$ ($s \in \{1, 2, \dots\}$). Отсюда, а также из свойств вполне непрерывных операторов, следует, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k \tilde{D} U_k \simeq \sum_{k=1}^n B_k \tilde{D} U_k \simeq 0.$$

Поэтому

$$T_j \simeq K_j \text{diag} \{\tilde{D}, \tilde{D}\}. \quad (13)$$

Согласно [4], оператор $D \in \mathcal{L}(W_p^{(r)+}(\Gamma), W_p^{(r-1)+}(\Gamma))$ ($r \in \{1, 2, \dots\}$) нётеров и его индекс (над полем комплексных чисел) вычисляется по формуле $\text{ind } D = 1$. Следовательно, оператор $\text{diag} \{\tilde{D}, \tilde{D}\}$ нётеров и его индекс равен $2 \text{ind } \tilde{D} = n(n-1)$. Отсюда, а также из (13) и свойств нётеровых операторов, получаем, что операторы T_j и K_j ($j \in \{0, 1, 2\}$) могут быть нётеровыми лишь одновременно и, в случае их нётеровости, имеет место (12). $\square$

Введём принадлежащие $\mathcal{L}((L_p^+(\Gamma))^{2n}, L_p^n(\Gamma))$ операторы

$$G_0 = (\nu(t), \mathbb{C}\mu(t)), \quad G_1 = (V_{\alpha+}\nu(t), \mathbb{C}\mu(t)), \quad G_2 = (V_{\alpha-}\nu(t), \mu(t)),$$

где $\nu(t), \mu(t) \in C^{n \times n}(\Gamma)$. Введем также, действующие в $L_p^n(\Gamma)$, операторы

$$\begin{aligned} M_0 &= \nu(t)P_\Gamma + \overline{\mu(t)}Q_\Gamma, & M_1 &= \nu[\alpha_+(t)]P_\Gamma + \overline{\mu(t)}Q_\Gamma, \\ M_2 &= \mu(t)P_\Gamma + \nu[\alpha_-(t)]Q_\Gamma, & M_3 &= \overline{\nu[\alpha_-(t)]}P_\Gamma + \overline{\mu(t)}Q_\Gamma. \end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (теорема 3.1 [5]). Операторы G_0, G_1, G_2 , принадлежащие пространству $\mathcal{L}((L_p^+(\Gamma))^{2n}, L_p^n(\Gamma))$, нётеровы тогда и только тогда, когда нётеровы, соответственно, операторы M_0, M_1 и пара операторов M_2, M_3 в пространстве $\mathcal{L}(L_p^n(\Gamma))$. В случае нётеровости указанных операторов

$$\operatorname{ind} G_j = \operatorname{ind} M_j + 2n \quad (j \in \{0, 1\}), \quad \operatorname{ind} G_2 = \frac{1}{2} \operatorname{ind} M_2 + \frac{1}{2} \operatorname{ind} M_3 + 2n.$$

Теорема 3. Операторы K_j ($j \in \{0, 1, 2\}$) нётеровы тогда и только тогда, когда

$$\det A(t) \neq 0, \quad \det B(t) \neq 0 \quad (t \in \Gamma). \quad (14)$$

Если эти условия выполнены, то

$$\operatorname{ind} K_0 = \operatorname{ind} K_1 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\det \overline{B(t)}}{\det A(t)} \right\}_{t \in \Gamma} + 2n, \quad \operatorname{ind} K_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\det A(t)}{\det B(t)} \right\}_{t \in \Gamma} + 2n.$$

Доказательство. Положим $\nu(t) = A_0(t)$, $\mu(t) = -B_0(t)$. Тогда операторы K_j являются операторами типа G_j ($j \in \{0, 1, 2\}$). Учитывая, что

$$\det A_0(t) = \det A(t) \det w(t) \quad \text{и} \quad \det B_0(t) = \det B(t) \det w(t),$$

на основании теоремы 2 получаем утверждение теоремы. $\square$

Простым следствием теорем 1 и 2 является

Теорема 4. Операторы T_j ($j \in \{0, 1, 2\}$) нётеровы тогда и только тогда, когда выполняется (14). В случае нётеровости

$$\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind} T_1 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\det \overline{B(t)}}{\det A(t)} \right\}_{t \in \Gamma} + n^2 + n, \quad \operatorname{ind} T_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\det A(t)}{\det B(t)} \right\}_{t \in \Gamma} + n^2 + n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балк М.Б. *Полианалитические функции и их обобщение* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – ВИНТИ, 1991. Т. 85. – С.187–254.
2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.

3. Литвинчук Г.С. Об операторном подходе к теории краевых задач со сдвигом для функций, аналитических в области. – Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. – Минск: Изд-во "Университетское", 1985. – С.69–76.
4. Лисовец Н.И. *Исследование некоторых смешанных краевых задач теории аналитических функций*. – Диссертация ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, ОГУ, 1984. – 149 с.
5. Матвиюк Л.В., Лысенко З.М., Нечаев А.П. *Теоремы Нётера некоторых краевых задач, порожденных оператором $\frac{\partial}{\partial t}$, для пары полианалитических функций* // Укр. матем. вісник. – 2008. – Т.5, №3. – С.327–335.
6. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в физике*. – Новосибирск, 1962.

Институт математики, экономики и механики
Одесского национального университета им. И.И. Мечникова
lmatviyk@odessa.net
ivanpribegin@rambler.ru
nvalentina@rambler.ru

Поступило 27.02.2009
После переработки 15.12.2009