Математичні Студії. Т.32, №2 Matematychni Studii. V.32, No.2

УДК 517.956

В. М. Кирилич

# ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

V. M. Kyrylych. *Hyperbolic Stefan problem with nonlocal boundary conditions for the system of quasilinear equations*, Mat. Stud. **32** (2009), 216–221.

The problem with unknown boundaries in the domain when the line of the initialization is degenerated in the point (the angular domain) for hyperbolic system of quasilinear first order partial equations in the invariant form is considered. The boundary conditions are defined in the nonlocal nonlinear form. We obtain the theorem of local with respect to time correct generalized continuous solvability of the problem.

В. М. Кирилич. *Гиперболическая задача Стефана с нелокальными граничными условиями для системы квазилинейных уравнений* // Мат. Студії. – 2009. – Т.32, №2. – С.216–221.

Для гиперболической системы квазилинейных уравнений первого порядка с частными производными в инвариантах рассматривается задача с неизвестными границами в области в случае, когда линия задания начальных условий вырождается в точку (криволинейный сектор). Краевые условия заданы в нелинейном нелокальном виде. Получена теорема о локальной по времени корректной обобщенной непрерывной разрешимости задачи.

**Вступ.** У цій статті розглянуто задачу з невідомими межами для гіперболічної квазілінійної системи диференційних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними, коли лінія задання початкових умов вироджується в точку, а крайові умови є нелокальними і нелінійними. Крім того, характеристики системи, що виходять із точки перетину меж, потрапляють в область відшукання розв'язку задачі. Подібну задачу для лінійної гіперболічної системи та лінійних нелокальних умов досліджено в [1], а деякий варіант квазілінійного випадку — в [2].

Для сформульованої тут задачі доведено теорему про існування і єдиність локального за часовою змінною узагальненого розв'язку.

Задачі Стефана (задачі з невідомими межами) пов'язують, насамперед, з параболічними та еліптичними рівняннями і вони виникають в багатьох областях науки і техніки ([3]). Проте, якщо, наприклад, класичну модель закону Фур'є поширення тепла в середовищі $q(x,t) = -kT_x(x,t)$ замінити релаксійним співвідношенням $q(x,t+\tau) = -kT_x(x,t)$, де $q, k, T$ — відповідно тепловий потік, коефіцієнт теплопровідності та температура, а $\tau$ — час релаксації теплового потоку, то приходимо до гіперболічної системи рівнянь першого порядку або відповідного телеграфного рівняння

$$\tau T_{tt} + T_t = a^2 T_{xx},$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35L50.

яке називають гіперболічним рівнянням теплопровідності ([4]).

Врахування часу релаксації $\tau$ в момент розповсюдження тепла в середовищі означає, що швидкість поширення тепла є скінченною ([5]), а “природа” температури є хвильовою ([6]). Після праць про гіперболічні рівняння теплопровідності [5, 7, 8] з'явилися публікації, присвячені задачам з невідомими межами для гіперболічних рівнянь і систем, які отримали назву гіперболічні задачі Стефана ([8-16]).

Також відмітимо, що задачі з нелокальними крайовими умовами лежать в основі багатьох математичних моделей прикладних проблем ([17, 18]).

**Постановка задачі.** Нехай $n$ — натуральне число, $T > 0$, $s_0 \in \mathbb{R}$ — дійсні числа, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ — дійсний вектор. Позначимо $V_T := \{x, t\colon -\infty < x < +\infty,\ 0 < t \le T\}$ .

Нехай $\lambda_i(x,t,v), f_i(x,t,v)$ $(i \in \{1,...,n\})$ — функції від змінних $(x,t) \in \overline{V}_T, v \in \mathbb{R}^n$, а $g_j(y,t,\hat{v})$ $(j \in \{1,2\})$ — функції від змінних $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0,T]$, $\hat{v} \in \mathbb{R}^{2n}$ і вони є неперервними. Припустимо, що $g_1(\hat{s}_0, 0, \hat{\alpha}) < g_2(\hat{s}_0, 0, \hat{\alpha})$, де $\hat{s}_0 := (s_0, s_0)$, $\hat{\alpha} := (\alpha, \alpha)$, і $\lambda_i(s_0, 0, \alpha) \ne g_j(\hat{s}_0, 0, \hat{\alpha})$ для всіх $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1,2\}$.

Покладемо

$$I_1 := \Big\{ i \in \{1,...,n\}\colon \lambda_i(s_0,0,\alpha) > g_2(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha}) \Big\},$$
$$I_2 := \Big\{ i \in \{1,...,n\}\colon \lambda_i(s_0,0,\alpha) < g_1(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha}) \Big\},$$
$$I_3 := \Big\{ i \in \{1,...,n\}\colon g_1(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha}) < \lambda_i(s_0,0,\alpha) < g_2(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha}) \Big\}.$$

Нехай $\beta_{ij}(y,t,\hat{v},z)$ $(j \in \{1,2\},\ i \in I_j \cup I_3)$ — функції від змінних $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0,T]$, $\hat{v} \in \mathbb{R}^{2n}$, $z \in \mathbb{R}$, а $\gamma_{ij}(\xi,t,v)$ $(j \in \{1,2\},\ i \in I_j \cup I_3)$ — функції від змінних $\xi \in \mathbb{R}, t \in [0,T], v \in \mathbb{R}^n$ і вони є неперервними.

Позначимо через $\mathfrak{U}_{T_0}$ для довільного $T_0 \in (0,T_0]$ множину наборів функцій $(s,u)$, в кожному з яких $s = (s_1,s_2)$ — пара функцій з простору $C^1([0,T_0])$, що задовольняє умови: $s_1(t) < s_2(t)$, $t \in (0,T_0]$, $s_1(0) = s_2(0)$, а $u$ — вектор-функція з простору $\Big[\mathrm{Lip}(\overline{V^s_{T_0}})\Big]^n$, де $V^s_{T_0} := \{(x,t):\ 0 < t \le T_0,\ s_1(t) < x < s_2(t)\}$ ($\overline{V^s_{T_0}}$ — замикання $V^s_{T_0}$). Під $\mathfrak{U}^1_{T_0}$ розумітимемо підмножину $\mathfrak{U}_{T_0}$, складену з наборів функцій $(s,u)$, в яких $u \in \Big[C^1(\overline{V^s_{T_0}})\Big]^n$.

Розглянемо задачу: знайти набір функцій $(s,u) \in \mathfrak{U}^1_{T_0}$, який задовольняє системи рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u), \quad (x,t) \in V^s_{T_0}, \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{1}$$

$$\frac{ds_j}{dt} = g_j(s,t,\hat{u}(s,t)), \quad t \in [0,T_0], \quad j \in \{1,2\}, \tag{2}$$

початкові умови

$$s_1(0) = s_2(0) = s_0, \tag{3}$$

$$u(s_0,0) = \alpha \tag{4}$$

та крайові умови

$$u_i(s_j(t),t) = \beta_{ij}\left( s(t), t, \hat{u}(s(t),t), \int\limits_{s_1(t)}^{s_2(t)} \gamma_{ij}(\xi,t,u(\xi,t))d\xi \right), \quad j \in \{1,2\}, \quad i \in I_j \cup I_3, \tag{5}$$

де $\hat{u}(y,t) := (u(y_1,t), u(y_2,t))$, $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0,T]$.

Дану задачу далі називатимемо задачею (1)-(5), а набір функцій $(s,u) \in \mathfrak{U}^1_{T_0}$, про який говорилося, — класичним розв'язком задачі (1)-(5).

**Узагальнений розв'язок задачі (1)–(5).** Додатково припустимо, що для кожного $i \in \{1,...,n\}$ звуження функції $\lambda_i(x,t,v), (x,t,v) \in \overline{V_T} \times \mathbb{R}^n$, на довільну обмежену підмножину $\overline{V_T} \times \mathbb{R}^n$ задовольняє умову Ліпшиця за змінними $x$ та $v$.

Нехай $(s,u) \in \mathfrak{U}_{T_0}$ для деякого $T_0 \in (0,T]$. Для кожних точки $(x_0,t_0) \in V^s_{T_0}$ і числа $i \in \{1,\dots,n\}$ розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x,t,u(x,t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{6}$$

при умові, що значення змінних $(x,t)$ пробігають замикання $\overline{V^s_{t_0}} := \{(x,t)\colon t \in [0,t_0], s_1(t) \le x \le s_2(t)\}$ множини $V^s_{t_0}$.

Розв'язок задачі (6) позначимо через

$$x = \varphi_i[u](t;x_0,t_0), \quad t \in [\chi_i[s,u](x_0,t_0),t_0],$$

де $\chi_i[s,u](x_0,t_0) = \max\Big\{t \in [0,t_0] : \ \varphi_i[u](t;x_0,t_0) \in \{s_1(t),s_2(t)\}\Big\}$ — координата (за змінною $t$) першої з точок перетину графіка розв'язку з межею множини $\overline{V^s_{t_0}}$, коли $t$ змінюється від $t_0$ до 0.

Нехай $(s,u) \in \mathfrak{U}^1_{T_0}$ — класичний розв'язок задачі (1)-(5), $(x_0,t_0) \in V^s_{T_0}$ і $x = \varphi_i[u](t;x_0,t_0)$, $t \in [\chi_i[s,u](x_0,t_0),t_0]$, — розв'язок задачі (6), $i \in \{1,...,n\}$. Підставимо $u$ в систему (1), і, врахувавши (6), перепишемо отримані тотожності у вигляді

$$\frac{du_i(\varphi_i[u](t;x_0,t_0),t)}{dt} = f_i(\varphi_i[u](t;x_0,t_0),t,u(\varphi_i[u](t;x_0,t_0),t)), \quad i \in \{1,\dots,n\}.$$

Проінтегрувавши $i$-ту з отриманих рівностей в межах від $\chi_i[s,u](x_0,t_0)$ до $t_0$ для кожного $i \in \{1,\dots,n\}$, отримаємо після відповідних спрощень систему рівностей

$$\begin{aligned} u_i(x,t) &= u_i(\varphi_i[u](\chi_i[s,u](x,t);x,t),\chi_i[s,u](x,t)) + \\ &+ \int\limits_{\chi_i[s,u](x,t)}^{t} f_i(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau,u(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau))\,d\tau, \quad (x,t) \in V^s_{T_0}, \quad i \in \{1,\dots,n\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Можна показати, що на множині $\mathfrak{U}^1_{T_0}$ система диференціальних рівнянь (1) еквівалентна системі інтегро-функціональних рівнянь (7), але розв'язки системи (7) можна також шукати серед елементів простору $\mathfrak{U}_{T_0}$( $0 < T_0 \le T$).

**Означення.** *Узагальненим ров'язком задачі (1)–(5) на часовому відрізку* $[0,T_0]$, де $0 < T_0 \le T$, назвемо набір функцій $(s,u) \in \mathfrak{U}_{T_0}$, який задовольняє системи (2), (7) та умови (3)–(5). Якщо $T_0 < T$, то розв'язок цієї задачі називається локальним, а якщо ж $T_0 = T$, то глобальним.

**Розв'язність задачі в узагальненому сенсі.** Нехай

$$U = |\alpha| + 1, \qquad S = \max_{j\in\{1,2\}} |g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})| + 1.$$

Визначимо такі множини

$$D_T^1(U,S) = \{(x,t,v) \in \mathbb{R}^{n+2} :\ 0 \le t \le T,\ s_0 - St \le x \le s_0 + St,\ |v| \le U\},$$
$$D_T^2(U,S) = \{(y,t,\hat{v}) \in \mathbb{R}^{2n+3} :\ 0 \le t \le T,\ s_0 - St \le y_j \le s_0 + St,\ (j \in \{1,2\}),\ |\hat{v}| \le U\},$$

де $|\cdot|$ — норма в просторі $\mathbb{R}^N$ в сенсі максимуму модулів (розмірність $N$ у кожному випадку буде зрозумілою з контексту).

Введемо позначення

$$S_0 := \min\left\{\frac{1}{3}(g_2(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha}) - g_1(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})),\ 1\right\}, \qquad \Gamma := \max_{\substack{j\in\{1,2\},\, i\in I_j\cup I_3\\ (x,t,v)\in D_T^1(U,S)}} |\gamma_{ij}(x,t,v)|,$$

$$\Lambda := \max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t,v)\in D_T^1(U,S)}} |\lambda_i(x,t,v)|, \qquad F := \max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t,v)\in D_T^1(U,S)}} |f_i(x,t,v)|, \qquad V := 2ST\Gamma,$$

$$\delta := \frac{1}{2}\min_{i\in\{1,\dots,n\},\, j\in\{1,2\}} |\lambda_i(s_0,0,\alpha) - g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})|$$

Нехай $\lambda_0$ — стала Ліпшиця звужень функцій $\lambda_i$ на множину $D_T^1(U,S)$, а $\beta_0^{\hat{v}}$ — стала Ліпшиця за змінною $\hat{v}$ звужень функцій $\beta_{ij}$ на множину $D_T^2(U,S) \times [-V,V]$.

**Теорема.** *Нехай виконуються такі умови:*

1) $\lambda_i,\ f_i \in Lip_{x,v}(D_T^1(U,S)), \quad i \in \{1,\dots,n\}$;
2) $g_j \in Lip_{y,\hat{v}}(D_T^2(U,S)), \quad j \in \{1,2\}$;
3) $\beta_{ij} \in Lip(D_T^2(U,S) \times [-V,V]), \quad j \in \{1,2\},\ \ i \in I_j \cup I_3$;
4) $\gamma_{ij} \in Lip_{t,v}(D_T^1(U,S)), \quad j \in \{1,2\},\ \ i \in I_j \cup I_3$;
5) $\alpha_i = \beta_{ij}(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha},0), \quad j \in \{1,2\},\ \ i \in I_j \cup I_3$ *(умови узгодження);*
6) $\beta_0^v < 1,\ \ \beta_0^v(S+\Lambda)\dfrac{2}{\delta}e^{\lambda_0} < 1.$

*Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(5) на часовому відрізку* $[0,T_0]$, *де* $T_0$ *визначається вихідними даними задачі.*

*Доведення теореми* проводиться за методикою статті [19] шляхом введення метричного простору $(\mathcal{M},\rho)$, де $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T_0,U_0,L_x,L_t)$ — множина наборів функцій $(s,v)$, де $s \in [C[0,T_0]]^2$, $v \in [C(\overline{V_{T_0}^s})]^n$, $0 < T_0 \le T$, що задовольняють такі обмеження:

**i**) $s_j(t) - g_j(\hat{s}_0,0,\hat{\alpha})t \in \mathrm{Lip}([0,T_0],\ S_0)$, а також $s_j(0) = s_0,\ j \in \{1,2\}$ ($S_0$ — стала, що обмежує зверху сталі Ліпшиця відповідних функцій);

**ii**) $|u_i(x,t) - \alpha_i| \le U_0 \le 1,\ (x,t) \in \overline{V_{T_0}^s}$, а також $u_i(s_0,0) = \alpha_i,\ i \in \{1,\dots,n\}$;

**iii**) $u_i \in \mathrm{Lip}(\overline{V_{T_0}^s},\ L_x, L_t),\ L_x \ge 1,\ i \in \{1,\dots,n\},\ L_x,\ L_t$ — сталі, що обмежують зверху сталі Ліпшиця функцій $u_i$ за змінними $x$ та $t$ відповідно.

Відстань між елементами простору $\mathcal{M}$ визначаємо співвідношенням

$$\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)) = \max\left\{\max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t)\in\overline{V_{T_0}^{s^1}}\cap\overline{V_{T_0}^{s^2}}}} |u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)|,\ \max_{\substack{j\in\{1,2\}\\ t\in[0,T_0]}} |s_j^1(t) - s_j^2(t)|\right\},$$

а пара функцій $(s,u)$ задовольняє систему інтегро-операторних рівнянь

$$s_j(t) = s_0 + \int\limits_0^t g_j(s(\tau),\tau,\hat{u}(s(\tau),\tau))\,d\tau, \quad j\in\{1,2\},$$

$$u_i(x,t) = B_i[u,s](x,t) + \int\limits_{\chi_i[u,s](x,t)}^{t} f_i(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau,u(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau))\,d\tau, \quad i\in\{1,\dots,n\}, \tag{8}$$

де $B_i$ — оператор, визначений на елементах простору $\mathcal{M}$ (тут використано позначення $\chi_i^{s,u} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_i[s,u](x,t)$)

$$B_i[s,u](x,t) = \beta_{ij}\left(s(\chi_i^{s,u}),\chi_i^{s,u},\hat{u}(s(\chi_i^{s,u}),\chi_i^{s,u}),\int\limits_{s_1(\chi_i^{s,u})}^{s_2(\chi_i^{s,u})}\gamma_{ij}(y,\chi_i^{s,u},u(y,\chi_i^{s,u}))dy\right),$$
$$\text{якщо}\ \ \varphi_i[u](\chi_i^{s,u};x,t) = s_j(\chi_i^{s,u}),\ j\in\{1,2\}.$$

Еквівалентність задачі (1)–(5) та системи інтегро-операторних рівнянь (8) дозволяє звести відшукання узагальненого розв'язку задачі до знаходження нерухомої точки оператора, визначеного правою частиною інтегральних рівнянь системи (8).

**Наслідок.** *Подібна теорема є правильна для відповідної задачі , якщо замість системи (1) розглядати систему, записану в "другій" канонічній формі (формі Шаудера) ([20])*

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(x,t,u)\Big\{\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big\} = F_i(x,t,u), \quad i\in\{1,...,n\}.$$

## ЛІТЕРАТУРА


1. Кирилич В. М. *Нелокальна задача типу Стефана для гіперболічної системи першого порядку*// Укр. мат. журн. – 1988. – Т.40, №1. – С. 121-124.
2. Андрусяк Р.В., Кирилич В.М. *Задача для квазілінійної системи гіперболічного типу у криволінійному секторі з вільними межами*// Наук. вісн. Черн. ун-ту. Матем. – 2008. – Вип. 421. – С. 5–12.
3. Данилюк И. И. *Задача Стефана*// Успехи мат. наук. – 1985. – Т.4, №5. – С. 133–185.
4. Gupta S.C. The classical Stefan problem: basic concepts, modeling and analysis – Amsterdam: Elsevier, 2003. – 385 p.
5. Cattaneo C. *Sulla conduzione del calore*// Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1948/49. – V.3. – P.3–21.
6. Харитонов В. В. *К вопросу о теплопроводности при конечной скорости распространения тепла*// ИФЖ. – 1969. – Т.16, №4. – С. 737–742.
7. Goldstein S. *On diffusion by discontinuous movements, and on the telegraph equation*// Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1951. – V.4, №2. – P. 129–156.
8. Chester M. *Second sound in solids*// Phys. Rev. – 1963. – V.131. – P. 2013–2015.
9. De Socio L., Gualtieri G. *A hyperbolic Stefan problem*// Quart. Appl. Math. – 1983. – V.41, №2. – P. 253–259.
10. Solomon A. D., Alexiades V., Wilson D. G., Drake Y. *On the formulation of hyperbolic Stefan problems* // Quart. Appl. Math. – 1985. – V.43, №3. – P. 295–304.

11. Showalter R. E., Walkington N. J. *A hyperbolic Stefan problem*// Quart. Appl. Math. – 1987. – V.45, №4. – P. 768–788.
12. Li Dening. *A one-phase hyperbolic Stefan problem in multidimensional space*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – V.318, №1. – P. 401-415.
13. Шеметов Н. В. *Гиперболическая задача Стефана*// Некоторые прилож. функ. анал. к задачам мат. физики. – Новосибирск: АН СССР, Ин-т мат, 1990. – С. 127–144.
14. Кирилич В. М., Мышкис А. Д. *Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой*// Диф. уравн. – 1991. – Т.27, №3. – С. 497–503.
15. Джураєв Т. Д., Тахиров Ж. О. *Гиперболическая задача Стефана*// Диф. уравн. – 1994. – Т.30, №5. – С. 821–831.
16. Nastaj J. *A hyperbolic Stefan problem in vacuum freeze drying of disordered porous media* // Bull. Pol. Acad. Sci. Tech. Sci. – 2000. – V.48, №3. – P.357–368.
17. Самарский А. А. *О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений*// Диф. уравн. – 1980. – Т.16, №11. – С. 1925–1935.
18. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними – К.: Наук. думка, 2002. – 415 с.
19. Андрусяк Р. В., Кирилич В. М., Мышкис А. Д. *Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой*// Диф. уравн. – 2006. – Т.42, №4. – С. 489-503.
20. Cesari L. *A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in the Schauder canonic form*// Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1974. – V.4, №1. – P. 311-358.

Львівський національний університет імені Івана Франка
vkyrylych@ukr.net

*Надійшло 15.11.2008*
*Після переробки 26.11.2009*