УДК 515.124.62

З. Н. Силаева

ТЕОРЕМА О СКЛЕЙКЕ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ

Z. N. Silayeva. *Adjunction Theorem for spaces with filtration*, Mat. Stud. **32** (2009), 185–197.

In the category of filtered metric spaces we get analogues of adjunction theorem and homotopic characterization theorem for spaces with the absolute extension property.

З. Н. Силаева. *Теорема о склейке для пространств с фильтрацией* // Мат. Студії. – 2009. – Т.32, №2. – С.185–197.

Для категории профильтрованных метрических пространств установлены аналоги теорем о склейке и о гомотопической характеризации пространств, обладающих свойством абсолютной продолжимости отображений.

1. Введение. Основной целью работы является исследование задачи продолжения отображений в категории метрических профильтрованных пространств. В частности, особый интерес будут представлять профильтрованные абсолютные (окрестностные) экстензоры ($\mathcal{N}$-A(N)E), то есть профильтрованные пространства, обладающие безусловным свойством (окрестностного) продолжения (в другой терминологии, инъективные объекты категории метрических профильтрованных пространств).

Пространства с фильтрациями, или профильтрованные пространства, так же, как и отображения, сохраняющие фильтрации (профильтрованные отображения), давно и плодотворно изучаются в топологии, являются действенным средством для решения многих проблем. Классическим примером здесь служат клеточные комплексы с остовной фильтрацией и клеточные отображения. Потребность максимально развить теорию клеточных пространств, возникшая в проблеме характеризации кратных пространств петель (Бордман Дж.), привела к рассмотрению профильтрованных пространств с произвольными элементами фильтрации и слабой топологией, порожденной этой фильтрацией. Для таких пространств получен ряд результатов, в частности, характеризация профильтрованных абсолютных экстензоров, теорема Милнора о характеризации профильтрованной гомотопической эквивалентности через топологические свойства элементов фильтрации ([1, 2]).

Для метрического профильтрованного пространства с нигде не плотными элементами фильтрации (например, метрического полиэдра с остовной фильтрацией) топология не является слабой относительно элементов фильтрации. В этом случае использование индуктивных рассуждений, являвшихся основным инструментом в категории клеточных пространств с остовной фильтрацией, уже не всегда возможно. Действительно, если $Z \supset A \xrightarrow{f} X$ — профильтрованное частичное отображение метрических пространств и все элементы фильтрации X являются абсолютными экстензорами, то

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C55, 54E35 2000.

продолжения, последовательно построенные для частичных отображений, заданных на элементах фильтрации Z, определяют профильтрованное продолжение $\widehat{f}$ отображения f. Если топология Z слабая относительно элементов фильтрации, то $\widehat{f}$ непрерывно и задача продолжения тем самым решена. Однако, как правило, метрическая топология сильнее слабой, поэтому $\widehat{f}$ может оказаться разрывным. Следовательно, нужно искать другие способы продолжения.

Некоторые результаты о профильтрованных метрических экстензорах установлены в [3, 4]. Оказалось, что в категории профильтрованных метрических пространств классы абсолютных ретрактов и абсолютных экстензоров совпадают. Этот факт установлен с помощью профильтрованных аналогов теоремы Дугунджи о принадлежности линейного нормированного пространства классу AE и теоремы Куратовского-Войдыславского о вложении метрического пространства в линейное топологическое пространство. Также установлено, что метрический полиэдр с остовной фильтрацией является $\mathcal{N}$-ANE-пространством, а поэтому класс $\mathcal{N}$-ANE-пространств можно рассматривать как топологическое обобщение этого класса.

Большое значение имеет характеризация $\mathcal{N}$-AE-пространств через топологические свойства элементов фильтрации. Наиболее простыми необходимыми условиями $\mathcal{N}$-A(N)E-пространств являются следующие:

1) каждый элемент фильтрации является A(N)E-пространством;

2) для любого $k \geq 0$ совокупность всех элементов фильтрации пространства является equi–LC^k-семейством.

Оказывается, условие 1) является характеристическим для $\mathcal{N}$-A(N)E-пространств с конечной фильтрацией, а условие 2) — для конечномерных $\mathcal{N}$-A(N)E-пространств ([4]).

Теорема 1. *Профильтрованное метрическое пространство Y, $\dim Y < \infty$, принадлежит классу $\mathcal{N}$-A(N)E тогда и только тогда, когда его фильтрация $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in$ equi-LC^k для любого $k \geq 0$.*

Так как $\mathcal{N}$-AE-пространства с конечной фильтрацией характеризуются свойством 1, то понятие $\mathcal{N}$-AE можно рассматривать как обобщение абсолютного экстензора (ретракта). В связи с этим, естественно было бы перенести те или иные результаты об экстензорах в категорию профильтрованных метрических пространств, в частности, установить аналоги теорем о гомотопической характеризации ANE-пространств и о склейке.

Основные результаты статьи сформулируем в виде следующих теорем.

Теорема 2 (Характеризация $\mathcal{N}$-ANE-пространств через малые деформации). *Профильтрованное метрическое пространство X есть $\mathcal{N}$-ANE тогда и только тогда, когда существует $\mathcal{N}$-AE-пространство C, содержащее X в качестве замкнутого подмножества, и для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такая профильтрованная 2^{-n}-деформация $H\colon X \times I \to X$(где $I = [0,1]$), что H_1 допускает профильтрованное продолжение на окрестность U множества X в C.*

Теорема 3 (Гомотопическая характеризация $\mathcal{N}$-ANE-пространств). *Профильтрованное метрическое пространство X является $\mathcal{N}$-ANE тогда и только тогда, когда для любого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства X ($\mathcal{U} \in \operatorname{cov} X$) существует профильтрованный полиэдр P со слабой топологией и профильтрованные отображения $g\colon X \to P$ и $f\colon P \to X$, композиция $f \circ g\colon X \to X$ которых $\mathcal{N}$-$\mathcal{U}$-гомотопна id_X.*

Теорема 4 (**Уайтхеда-Борсука-Ханнера [5, 6]**). *Если $\mathcal{N}$-ANE-пространство F является замкнутым подпространством метрического профильтрованного пространства X, причем $X \setminus F$ есть $\mathcal{N}$-ANE, а F является строгим деформационным окрестностным профильтрованным ретрактом X (то есть существует профильтрованная гомотопия $H\colon U \times I \to X$, где U — окрестность F в X, удовлетворяющая условиям: $H_0 = \mathrm{id}_U$; $H_1\colon U \to F$ есть профильтрованная ретракция; $H_t \restriction_F = \mathrm{id}_F$ для любого $t \in I$), то X есть $\mathcal{N}$-ANE.*

Теорема 5 (**О склейке**). *Если метрические пространства X, Y и подпространство A, замкнутое в X, являются $\mathcal{N}$-A(N)E-пространствами, $f\colon A \to Y$ — совершенное (непрерывное замкнутое отображение, такое, что все прообразы $f^{-1}(y)$ компактны в A) профильтрованное отображение, то склейка $S = X \cup_f Y$ является $\mathcal{N}$-A(N)E- пространством.*

2. Предварительные сведения. *Пространством с фильтрацией (профильтрованным пространством*, или *$\mathcal{N}$- пространством)*, назовем топологическое пространство X, в котором выделена последовательность замкнутых (возможно, пустых) подмножеств $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ *(фильтрация)*, такая, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$. Непрерывное *отображение* $f\colon X \to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств X и Y будем называть *профильтрованным*, или *$\mathcal{N}$-отображением*, если $f(X_i) \subseteq Y_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$ (*f сохраняет фильтрацию* пространства X) ([1, с.253]).

Поскольку композиция двух $\mathcal{N}$-отображений снова является $\mathcal{N}$-отображением, то профильтрованные пространства образуют категорию, в которой в качестве морфизмов выступают $\mathcal{N}$-отображения. Далее мы будем рассматривать категорию метрических профильтрованных пространств.

Пусть X — метрическое пространство с фильтрацией $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Тогда его подпространство A с фильтрацией, образованной множествами $A_i = A \cap X_i$ для $i \in \mathbb{N}$, будем называть *$\mathcal{N}$-подпространством* $\mathcal{N}$-пространства X.

Степенью точки x профильтрованного пространства X назовём число, определяемое по формуле $\deg x = \min\{i \in \mathbb{N} \mid x \in X_i\}$. Ясно, что непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств X и Y является $\mathcal{N}$-отображением тогда и только тогда, когда $\deg f(x) \leq \deg x$ для любой точки $x \in X$. Обобщением понятия степени точки является понятие *степени подмножества M* профильтрованного пространства X: $\deg M = \min\{i \in \mathbb{N} \mid M \cap X_i \neq \varnothing\}$.

Будем называть *полиэдр* со слабой топологией *профильтрованным* или *$\mathcal{N}$-полиэдром*, если все элементы его фильтрации — подполиэдры. Примером здесь является полиэдр со слабой топологией и естественной остовной фильтрацией. Рассмотрим еще один полезный в дальнейшем пример $\mathcal{N}$-полиэдра. Пусть N — нерв покрытия $\mathbf{G} = \{G_\mu\}_{\mu \in M}$ метрического $\mathcal{N}$-пространства X, рассматриваемый со слабой топологией. Будем называть *степенью симплекса $\sigma = \langle G_0, \ldots, G_k \rangle$* число $\deg \sigma = \deg(\bigcap_{i=0}^{k} G_i)$, а *степенью точки z нерва N* — число $\deg z = \min\{\deg \sigma|$ по всем таким σ, что $z \in \sigma\}$. Для любого $i \in \mathbb{N}$, *i-ым элементом фильтрации нерва N* будем называть множество $N_i = \{z \in N \mid \deg z \leq i\}$. Нетрудно заметить, что каноническое отображение ([7]) пространства X в нерв N его покрытия $\mathbf{G}$ является $\mathcal{N}$-отображением.

Будем называть линейное топологическое пространство L с фильтрацией $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *линейным $\mathcal{N}$-пространством*, если все L_i являются линейными подпространствами L.

Рассмотрим понятия, связанные с продолжением $\mathcal{N}$-отображений (аналогичные сведения для пространств без фильтрации можно найти в [7, 8]). Профильтрованное отображение $f\colon A \to Y$, заданное на замкнутом $\mathcal{N}$-подпространстве A $\mathcal{N}$-пространства X, называется *частичным $\mathcal{N}$-отображением.* Если для f существует такое $\mathcal{N}$-отображение $\widehat{f}\colon X \to Y$, что $\widehat{f}\restriction_A = f$, будем говорить, что *$\mathcal{N}$-отображение f допускает $\mathcal{N}$-продолжение* на X, а $\mathcal{N}$-отображение $\widehat{f}$ будем называть *$\mathcal{N}$-продолжением* f. Будем говорить, что $\mathcal{N}$-пространство Y является *абсолютным (окрестностным) $\mathcal{N}$-экстензором*, или *принадлежит классу* $\mathcal{N}$-A(N)E, если для любого $\mathcal{N}$-пространства X и любого его замкнутого $\mathcal{N}$-подпространства A, любое частичное $\mathcal{N}$-отображение $f\colon A \to Y$ допускает $\mathcal{N}$-продолжение $\widehat{f}\colon X \to Y$ (допускает $\mathcal{N}$-продолжение $\widehat{f}\colon U \to Y$ на некоторую окрестность U множества A в X).

Если X — $\mathcal{N}$-пространство с фильтрацией $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, то будем рассматривать $X\times I$ как $\mathcal{N}$-пространство с фильтрацией $\{X_i\times I\}_{i\in\mathbb{N}}$. Профильтрованные отображения $f, g\colon X \to Y$ будем называть *$\mathcal{N}$-гомотопными*, если существует такая $\mathcal{N}$-гомотопия $H\colon X\times I \to Y$, что $H_0 = f$, $H_1 = g$.

Пусть X — метрическое $\mathcal{N}$-пространство, $\mathcal{U} \in \operatorname{cov} X$. $\mathcal{N}$-отображения f и $g\colon X \to Y$ будем называть *$\mathcal{U}$-близкими*, если для любой точки $x \in X$ существует элемент $U \in \mathcal{U}$, такой, что $\{f(x), g(x)\} \subset U$. *$\mathcal{N}$-$\mathcal{U}$-гомотопией* будем называть такую $\mathcal{N}$-гомотопию $H\colon X \times I \to X$, что для любой точки $x \in X$ существует элемент $U \in \mathcal{U}$, такой, что $H(\{x\} \times I) \subseteq U$. Если $H_0 = \mathrm{id}_X$, то $\mathcal{N}$-$\mathcal{U}$-гомотопию H будем называть *$\mathcal{N}$-$\mathcal{U}$-деформацией.* Если $\mathcal{U}$ образовано множествами, диаметры которых не превосходят числа $\varepsilon > 0$, то $\mathcal{N}$-$\mathcal{U}$-деформацию будем называть *$\mathcal{N}$-ε-деформацией.*

Нетрудно убедиться в том, что теорема Борсука о продолжении гомотопии справедлива и в случае $\mathcal{N}$-пространств.

Теорема 6 (**Борсука о продолжении $\mathcal{N}$-$\mathcal{U}$-гомотопии**). *Пусть $X \in \mathcal{N}$-ANE, $\mathcal{U} \in \operatorname{cov} X$. Тогда для любого замкнутого $\mathcal{N}$-подпространства A $\mathcal{N}$-пространства Y и любой $\mathcal{N}$-$\mathcal{U}$-гомотопии $H\colon A \times I \to X$ из продолжимости H_0 до $\mathcal{N}$-отображения $h_0\colon Y \to X$ следует, что существует $\mathcal{N}$-$\mathcal{U}$-гомотопия $\widehat{H}\colon Y\times I \to X$, такая, что $\widehat{H}_0 = h_0$ и $\widehat{H}\restriction_{A\times I} = H$.*

Пусть X — метрическое $\mathcal{N}$-пространство, $\mathcal{U} \in \operatorname{cov} X$, $\mathcal{T}$ — локально конечный симплициальный комплекс с фильтрацией, такой, что его тело $|\mathcal{T}|$ является $\mathcal{N}$-полиэдром (в этом случае будем говорить, что фильтрация симплициального комплекса допускает $\mathcal{N}$-реализацию), $\mathcal{S}$ — подкомплекс $\mathcal{T}$, содержащий все его вершины. *Частичной $\mathcal{N}$-реализацией комплекса $\mathcal{T}$ в X относительно* $(\mathcal{S},\mathcal{U})$ будем называть такое $\mathcal{N}$-отображение $f\colon |\mathcal{S}| \to X$, что для любого $\sigma \in \mathcal{T}$ существует элемент покрытия $U \in \mathcal{U}$, содержащий $f(\sigma \cap |\mathcal{S}|)$. В случае $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ будем говорить, что f есть *полная $\mathcal{N}$-реализация $\mathcal{T}$ в X относительно $\mathcal{U}$.*

Пусть X — метрическое пространство с фильтрацией $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Будем обозначать через $\operatorname{Con} X$ метрический конус над X и записывать его в виде $(X \times [0,1])/\sim$, где $\sim$ есть отношение эквивалентности, единственным нетривиальным классом которого является $X \times \{0\}$, обозначаемый в дальнейшем $*$. Пространство $\operatorname{Con} X$ с фильтрацией $\{\operatorname{Con} X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ будем называть *профильтрованным конусом* над X.

Пусть X, Y — метрические пространства с фильтрациями, соответственно, $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, A — замкнутое $\mathcal{N}$-подмножество X, $f\colon A \to Y$ — совершенное $\mathcal{N}$-отображение, $X \cup_f Y$ — пространство, склеенное из пространств X и Y по отображению f [9]. В качестве фильтрации пространства $X \cup_f Y$ можно рассматривать семейство $\{X_i \cup_f Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Пространство $X \cup_f Y$ с такой фильтрацией будем называть *$\mathcal{N}$-пространством, склеенным из $\mathcal{N}$-пространств X и Y по $\mathcal{N}$-отображению f*. Нетрудно проверить, что фактор-отображение $p\colon (X \sqcup Y) \to X \cup_f Y$, склеивающее X и Y по f, будет в этом случае $\mathcal{N}$-отображением, если в качестве фильтрации $X \sqcup Y$ рассматривать $\{X_i \sqcup Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

3. Вспомогательные факты. Пусть X, Y — произвольные метрические пространства, F, W — подмножества X, причем $(W \cap F) \subset \operatorname{Int} W$; $\alpha\colon X \to Y$ — отображение, такое, что ограничения $\alpha \restriction_F$ и $\alpha \restriction_W$ непрерывны. Отображение $\alpha \restriction_{F \cup W}$, вообще говоря, разрывно, но справедлива лемма, утверждающая, что его ограничение на подходящее множество непрерывно.

Лемма 1. *Существует такое открытое подмножество $W' \subset W$, что $(F \cap W) \subset W'$ и $\alpha \restriction_{F \cup W'}$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть для $x \in X$, d_x есть расстояние $\operatorname{dist}(x, X \setminus W)$ от точки x до множества $X \setminus W$. Так как $(W \cap F) \subset \operatorname{Int} W$ и $\alpha \restriction_W$ непрерывно, то для любого $x \in W \cap F$ существует $\delta_x < d_x$, такое, что

$$\alpha(B(x, \delta_x)) \subset B(\alpha(x), d_x). \tag{1}$$

Докажем, что отображение $\alpha \restriction_{F \cup W'}$, где $W' = \bigcup\limits_{x \in W \cap F} B(x, \delta_x)$, непрерывно, а для этого докажем непрерывность α в любой точке $x_0 \in (F \cap \operatorname{Bd} W')$. В силу непрерывности $\alpha \restriction_F$, для любого $\varepsilon > 2d_x$ существует $\sigma > 0$, такое, что

$$\alpha(F \cap B(x_0, \sigma)) \subset B(\alpha(x_0), \varepsilon/2). \tag{2}$$

Из специального вида покрытия $\{B(x, d_x)\}_{x \in W \cap F}$ следует, что для $\sigma > 0$ существует $0 < \delta < \sigma$, такое, что

$$B(x_0, \delta) \cap B(x, \delta_x) \neq \varnothing \Rightarrow B(x, \delta_x) \subset B(x_0, \sigma). \tag{3}$$

Для произвольной точки $w \in W' \cap B(x_0, \delta)$, в силу построения W', существует $x \in F$, такое, что $w \in B(x, \delta_x)$. Тогда $B(x_0, \delta) \cap B(x, \delta_x) \neq \varnothing$, поэтому, согласно (3), $B(x, \delta_x) \subset B(x_0, \sigma)$, откуда $d_x = \operatorname{dist}(x, X \setminus W) \leq d(x, x_0) < \sigma$. Из (1) следует $\alpha(w) \in B(\alpha(x), d_x)$, из (2) следует $\alpha(x) \in B(\alpha(x_0), \varepsilon/2)$, откуда $\alpha(w) \in B(\alpha(x_0), \varepsilon)$, то есть $\alpha(W' \cap B(x_0, \delta)) \subset B(\alpha(x_0), \varepsilon)$. Из последнего и (2) следует непрерывность $\alpha \restriction_{F \cup W'}$ в x_0. □

Пусть A — замкнутое $\mathcal{N}$-подпространство метрического $\mathcal{N}$-пространства Z, $F\colon A \to X$, $G\colon Z \setminus A \to X$ — $\mathcal{N}$-отображения. Имеет место

Лемма 2. *Если $\operatorname{dist}(F(z), G(z)) < \operatorname{dist}(z, A)$ для любого $z \notin A$, то отображение $\widehat{G}\colon Z \to X$, совпадающее с F на множестве A и с G на множестве $Z \setminus A$, задает $\mathcal{N}$-продолжение отображения G.*

Доказательство. Достаточно доказать непрерывность $\widehat{G}$ в любой точке $a_0 \in A \cap \overline{Z \setminus A}$. В силу непрерывности F, для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta < \varepsilon/2$, такое, что $F(B(a_0, \delta)) \subset B(F(a_0), \varepsilon/2)$. Очевидно, что для $z \in B(a_0, \delta)$, $\operatorname{dist}(z, A) \leq d(z, a_0) < \delta$. Тогда $G(z) \in B(F(z), \operatorname{dist}(z, A))$, $F(z) \in B(F(a_0), \varepsilon/2)$, откуда следует, что $G(z) \in B(F(a_0), 2 \cdot \varepsilon/2) = B(\widehat{G}(a_0), \varepsilon)$, то есть $\widehat{G}(B(a_0, \delta)) \subset B(\widehat{G}(a_0), \varepsilon)$. Из построения ясно, что $\widehat{G}$ — $\mathcal{N}$-продолжение отображения G. □

Пусть $f\colon A \to X$, $G\colon A \times [0, 1) \to X$ — $\mathcal{N}$-отображения. Так как пространство A, отождествленное с $A \times \{1\}$, можно рассматривать как замкнутое подмножество $A \times [0, 1]$, имеет место

Следствие 1. *Если* $\operatorname{dist}(f(a), G(a,t)) < 4(1-t)$ *для любого* $a \in A$, $t \neq 1$, *то отображение* $\widehat{G}\colon A\times[0,1] \to X$, *совпадающее для любого* $a \in A$ *с* $f\times\mathrm{id}$ *при* $t=1$ *и с* G *при* $0 \le t < 1$, *задает* $\mathcal{N}$*-продолжение отображения* G.

Из замкнутости проектирования произведения $X \times I$ вдоль отрезка несложно следуют два вспомогательных факта.

Лемма 3. *Пусть* C *— произвольное метрическое пространство,* X *— его замкнутое подпространство,* $a \in [0,1)$. *Тогда для любой окрестности* W' *множества* $X \times [0,1)$, *содержащейся в* $C \times [0,1)$, *существует такая окрестность* U *множества* X *в* C, *что* $(U \times [0,a]) \subset W'$.

Лемма 4. *Если* $G\colon X \times I \to X$ *— гомотопия, такая, что для любого* $t \in I$, $G_t\restriction_A = \mathrm{id}$, *то для любого подмножества* $B \subset A$ *и любой его окрестности* $U(B)$ *в* X *существует окрестность* $V(B) \subset U(B)$, *такая, что* $G(V(B)\times I) \subset U(B)$.

4. Доказательство теоремы о малых деформациях. Доказательство необходимости очевидно, поэтому докажем лишь достаточность. По условию, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такая $\mathcal{N}$-2^{-n}-деформация $H_n\colon X\times I \to X$, что $(H_n)_0 = \mathrm{id}_X$, а $(H_n)_1\colon X \to X$ имеет $\mathcal{N}$-продолжение $(\widehat{H}_n)_1\colon U_n \to X$ на окрестность U_n множества X в C. Можно считать, что $U_n \subseteq U_{n-1}$. Построим $\mathcal{N}$-гомотопию $F_n\colon (X\times[-1,1]) \cup (U_n \times\{-1,1\}) \to X$ по формуле

$$F_n(x,t) = \begin{cases} H_n(x,t), & (x,t) \in X\times[0,1],\\ \widehat{H}_n(x,1), & (x,t) \in U_n \times \{1\},\\ H_{n-1}(x,-t), & (x,t) \in X \times [-1,0],\\ \widehat{H}_{n-1}(x,1), & (x,t) \in U_n \times\{-1\}.\end{cases}$$

Для любого $x \in X$, образ $H_n\bigl(\{x\}\times[0,1]\bigr)$ имеет диаметр меньше 2^{-n}, образ $H_{n-1}\bigl(\{x\}\times[-1,0]\bigr)$ имеет диаметр меньше $2^{-(n-1)}$, поэтому

$$\operatorname{diam} F_n\bigl(\{x\}\times[-1,1]\bigr) < 2^{-n} + 2^{-(n-1)} < 2^{-(n-2)}. \tag{4}$$

Рассмотрим композицию K $\mathcal{N}$-отображения $F_n\times\mathrm{id}\colon \bigl((X\times[-1,1])\cup(U_n\times\{-1,1\})\bigr)\times I \to X\times I$ и $\mathcal{N}$-гомотопии $H_n\colon X\times I \to X$. Ясно, что K является $\mathcal{N}$-отображением.

Так как пространство C нормально, то существует замкнутая окрестность V пространства X в C, $V \subset U_n$. Тогда $\bigl(X\times[-1,1]\bigr)\cup\bigl(V\times\{-1,1\}\bigr)$ — замкнутое подмножество $C\times[-1,1]$, и так как по условию $C \in \mathcal{N}$-AE, то частичное $\mathcal{N}$-отображение

$$\bigl(X\times[-1,1]\bigr)\cup\bigl(V\times\{-1,1\}\bigr) \xrightarrow{F_n} X \hookrightarrow C$$

имеет $\mathcal{N}$-продолжение $\widehat{F}_n\colon C\times[-1,1] \to C$. Так как $\widehat{F}_n$ непрерывно, то $W' = (\widehat{F}_n)^{-1}(U_n)$ — открытая окрестность множества $\bigl(X\times[-1,1]\bigr)\cup\bigl(V\times\{-1,1\}\bigr)$. Из замкнутости проектирования вдоль отрезка следует, что существует открытая окрестность W множества X, такая, что $(W\times I) \subset W'$. Не теряя общности, будем считать, что $W = U_n$. Тогда можно определить $\mathcal{N}$-отображение $(\widehat{H}_n)_1 \circ \widehat{F}_n\colon U_n\times[-1,1] \to X$ на подмножестве $U_n\times[-1,1]\times\{1\}$ "верхнего основания" цилиндра $C\times[-1,1]\times[0,1]$ над $C\times[-1,1]$.

Построим отображение, совпадающее с только что построенным $\mathcal{N}$-отображением на подмножестве "верхнего основания" цилиндра над $C\times[-1,1]$ и с ограничением $\mathcal{N}$-отображения K на подмножествах $U_n\times\{-1\}\times I$ и $U_n\times\{1\}\times I$ "боковых граней" цилиндра над $C\times[-1,1]$. В результате получим $\mathcal{N}$-отображение, действующее из

$\big(U_n \times \{-1\} \times I\big) \cup \big(U_n \times [-1,1] \times \{1\}\big) \cup \big(U_n \times \{1\} \times I\big)$ в X. Полученное $\mathcal{N}$-отображение опишем с помощью формулы

$$G_n(c,t) = \begin{cases} H_n\big((\widehat{H}_{n-1})_1(c), 3t\big), & 0 \le t \le 1/3, \\ (\widehat{H}_n)_1 \circ \widehat{F}_n(c, 6t-3), & 1/3 \le t \le 2/3, \\ H_n\big((\widehat{H}_n)_1(c), -3t+3\big), & 2/3 \le t \le 1, \end{cases}$$

где $(c,t) \in U_n \times [0,1]$ и докажем, что $\mathcal{N}$-отображение G_n корректно определено. Действительно, при $t = 1/3$, $H_n\big((\widehat{H}_{n-1})_1(c), 3t\big) = H_n\big((\widehat{H}_{n-1})_1(c), 1\big) = (H_n)_1 \circ (\widehat{H}_{n-1})_1(c)$, а $(\widehat{H}_n)_1 \circ \widehat{F}_n(c, 6t-3) = (\widehat{H}_n)_1 \circ \widehat{F}_n(c,-1) = (\widehat{H}_n)_1 \circ (\widehat{H}_{n-1})_1(c)$, и так как $(\widehat{H}_{n-1})_1$ отображает U_n в X, а $(\widehat{H}_n)_1$ — продолжение $(H_n)_1$ с X на U_n, то G_n согласовано. Аналогично доказывается согласованность G_n при $t = 2/3$.

Лемма 5. $G_n \restriction_{U_n \times \{0\}} = (\widehat{H}_{n-1})_1$, $G_n \restriction_{U_n \times \{1\}} = (\widehat{H}_n)_1$.

Доказательство. Для любого $c \in U_n$, $G_n(c,0) = H_n\big((\widehat{H}_{n-1})_1(c), 0\big)$. Так как $(\widehat{H}_{n-1})_1(c) \in X$, а $(H_n)_0 = \mathrm{id}_X$, получаем $G_n(c,0) = (\widehat{H}_{n-1})_1(c)$. Аналогично доказывается второе утверждение. □

Для произвольного $x \in X$ рассмотрим образ множества $\{x\} \times [-1,1] \times I$ при $\mathcal{N}$-отображении K. Отображение K переводит отрезок $\{x\} \times [-1,1] \times \{0\}$ во множество диаметра меньше $2^{-(n-2)}$, так как, согласно (4), отображение F_n переводит этот отрезок во множество диаметра меньше $2^{-(n-2)}$. Отображение K переводит отрезки $\{x\} \times \{t\} \times I$, $-1 \le t \le 1$, во множества диаметра меньше 2^{-n}, так как H_n есть $\mathcal{N}$-2^{-n}-гомотопия. Поэтому образ множества $\{x\} \times [-1,1] \times I$ при $\mathcal{N}$-отображении K имеет диаметр меньше $2^{-(n-2)} + 2 \cdot 2^{-n} < 2^{-(n-3)}$. Так как $G_n \restriction_{\{x\} \times [-1,1] \times I}$ является сужением K, то образ множества $(\{x\} \times \{-1\} \times I) \cup (\{x\} \times [-1,1] \times \{1\}) \cup (\{x\} \times \{1\} \times I)$ при отображении G_n имеет диаметр меньше $2^{-(n-3)}$.

Лемма 6. *Для любого* $(x,t) \in X \times I$, $\mathrm{dist}(x, G_n(x,t)) < 2^{-(n-3)}$.

Доказательство. Под действием $F_n \times \mathrm{id}$ точка $(x,0,0) \in X \times [-1,1] \times I$ переходит в точку $(x,0)$, которая затем под действием H_n переходит в x, так как $H_0 = \mathrm{id}$. Таким образом, для любого $x \in X$, точка $(x,0,0)$ под действием K переходит в x. Это означает, что $x \in K(\{x\} \times [-1,1] \times I)$. Так как G_n — ограничение K, то $G_n(\{x\} \times I) \subset K(\{x\} \times [-1,1] \times I)$. Отсюда, а также из того, что $\mathrm{diam}\, K(\{x\} \times [-1,1] \times I) < 2^{-(n-3)}$, следует, что $\mathrm{dist}(x, G_n(x,t)) < 2^{-(n-3)}$. □

Пусть $a_i = 1 - 2^{-i}$, где $i = 0, 1, \ldots$; $t = (1-s)a_{n-1} + s a_n$, где $s \in I$. Пусть $W = \big(U_1 \times [a_0, a_1]\big) \cup \big(U_2 \times [a_1, a_2]\big) \cup \ldots$. Построим $\mathcal{N}$-отображение $G\colon W \to X$, так, чтобы для любого $(x,s) \in W$ выполнялось

$$G(x,t) = G_{n+1}(x,s), \text{ где } n \in \{1, 2, \ldots\}$$

Тогда при $n = 1$, $G(x, [a_0, a_1]) = G_2(x, I)$; при $n = 2$, $G(x, [a_1, a_2]) = G_3(x, I)$, и так далее. В силу леммы 5, $\mathcal{N}$-отображение G корректно определено.

Для любого $x \in X$, $t \in [a_{n-1}, a_n]$, выполняется $\mathrm{dist}(x, G(x,t)) = \mathrm{dist}(x, G_{n+1}(x,s)) < 2^{-(n-2)}$ (неравенство следует из леммы 6). Но из того, что $t \in [a_{n-1}, a_n]$, следует $2^{-n} \le 1 - t \le 2^{-(n-1)}$. Тогда $2^{-(n-2)} \le 4(1-t) \le 2^{-(n-3)}$. Итак, $\mathrm{dist}(x, G(x,t)) < 4(1-t)$, поэтому, согласно следствию из леммы 2, $\mathcal{N}$-отображение $G \restriction_{X \times [0,1)}$ имеет $\mathcal{N}$-продолжение $P\colon X \times [0,1] \to X$, заданное для любого $x \in X$ формулой

$$P(x,t)=\begin{cases}(x,t), & t=1,\\ G(x,t), & 0\le t<1.\end{cases}$$

Зададим $\mathcal{N}$-отображение $Q\colon \big(X\times[0,1]\big)\cup W\to X$ формулой

$$Q(x,t)=\begin{cases}P(x,t), & (x,t)\in X\times[0,1],\\ G(x,t), & (x,t)\in W.\end{cases}$$

Отображение Q согласовано, так как P есть продолжение $G\restriction_{X\times[0,1)}$. По лемме 1, существует открытое множество W', $(X\times[0,1))\subset W'\subset W$, такое, что $\mathcal{N}$-отображение $Q\colon (X\times[0,1])\cup W'\to X$ непрерывно.

Лемма 7. *Существует окрестность U множества X в C и непрерывное отображение $\varphi\colon C\to I$, такое, что $\varphi(x)\equiv 1$ для $x\in X$ и $\bigcup_{c\in U}\big(\{c\}\times[0,\varphi(c)]\big)\subset\big(W'\cup(X\times[0,1])\big)$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{a_i\}$ точек отрезка I, $a_i=1-2^{-i}$, $i\in\mathbb{N}$. Для каждой точки a_i по лемме 3 найдем такую окрестность U_i множества X в C, что $(U_i\times[0,a_i])\subset W'$. Пусть $U=U_1$.

По лемме Урысона, для окрестности U_1 существует непрерывное отображение $\varphi_1\colon C\to[0,a_1]$, такое, что $\varphi_1(c)\equiv a_1$ для $c\in U_2$ и $\varphi_1(c)\equiv 0$ для $c\in C\setminus U_1$. Применяя лемму Урысона к каждой найденной окрестности U_i при $i>1$, получим, что для каждого номера $i>1$ существует непрерывное отображение $\varphi_i\colon C\to[a_{i-1},a_i]$, такое, что $\varphi_i(c)\equiv a_i$ для $c\in U_{i+1}$ и $\varphi_i(c)\equiv a_{i-1}$ для $c\in C\setminus U_i$.

Определим $\varphi\colon C\to[0,1]$ по формуле

$$\varphi(c)=\begin{cases}1, & c\in X,\\ \varphi_i(c), & c\in U_i\setminus U_{i+1},\quad i\ge 1,\\ 0, & c\in C\setminus U_1.\end{cases}$$

Проверим непрерывность φ в точке $a\in X\cap\overline{C\setminus X}$. Для любой окрестности V точки $\varphi(a)=1$ найдется $a_n\in V$, поэтому $\varphi(U_{n+1})=\varphi_{n+1}(U_{n+1})\subset[a_n,1]\subset V$. Таким образом, отображение φ непрерывно в точке a и на множестве C. Из способа построения φ следует, что $\bigcup_{c\in U}\big(\{c\}\times[0,\varphi(c)]\big)\subset\big(W'\cup(X\times[0,1])\big)$. □

В силу леммы 7, для любой точки $c\in U$, точка $(c,\varphi(c))$ принадлежит области определения отображения Q, поэтому можно задать $\mathcal{N}$-отображение $f\colon U\to X$ формулой $f(c)=Q(c,\varphi(c))$, где $c\in U$. Так как при $x\in X$, $f(x)=Q(x,1)=P\restriction_{X\times\{1\}}=\mathrm{id}$, то f — окрестностная $\mathcal{N}$-ретракция, поэтому из того, что U открыто в $C\in\mathcal{N}$-AE, следует, что $X\in\mathcal{N}$-ANE. Теорема 2 доказана.

5. Доказательство теоремы о гомотопической характеризации $\mathcal{N}$-ANE-пространств. Докажем сначала теорему о частичной $\mathcal{N}$-реализации, утверждающую, что для метрического $\mathcal{N}$-ANE-пространства выполняется аналог условия Лефшеца.

Теорема 7. *Если X — метрическое $\mathcal{N}$-ANE-пространство, то для любого $\mathcal{U}\in\operatorname{cov}X$ существует $\mathcal{V}\in\operatorname{cov}X$, вписанное в $\mathcal{U}$, такое, что для любого локально конечного симплициального комплекса $\mathcal{T}$ с фильтрацией, допускающей $\mathcal{N}$-реализацию, любого его подкомплекса $\mathcal{S}$, содержащего все вершины $\mathcal{T}$, и любой частичной $\mathcal{N}$-реализации $f\colon|\mathcal{S}|\to X$ комплекса $\mathcal{T}$ в X относительно $(\mathcal{S},\mathcal{V})$ существует полная $\mathcal{N}$-реализация $g\colon|\mathcal{T}|\to X$ относительно $\mathcal{U}$, обладающая свойствами:*

(1) g продолжает f;

(2) для любого $\sigma\in\mathcal{T}$ и любого $V\in\mathcal{V}$, такого, что $f(\sigma\cap|\mathcal{S}|)\subset V$, существует такое $U\in\mathcal{U}$, что $g(\sigma)\cup V\subset U$.

Доказательство. Рассмотрим замкнутое $\mathcal{N}$-вложение метрического $\mathcal{N}$-пространства X в линейное нормированное $\mathcal{N}$-пространство L ([3]). Так как $X \in \mathcal{N}$-ANE, то существует окрестность V пространства X в L и $\mathcal{N}$-ретракция $r\colon V \to X$. Семейство $r^{-1}(\mathcal{U}) \in \operatorname{cov} V$. Рассмотрим $\mathcal{W} \in \operatorname{cov} V$, такое, что $\mathcal{W} \circ \mathcal{W} \prec r^{-1}(\mathcal{U})$, и выпуклое покрытие $\mathcal{V}_1 \in \operatorname{cov} V$, такое, что $\mathcal{V}_1 \prec \mathcal{W}$. Тогда $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap X$ — искомое открытое покрытие X. Отметим, что любые два $\mathcal{V}$-близких $\mathcal{N}$-отображения в X $\mathcal{W}$-$\mathcal{N}$-гомотопны.

Пусть $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ и f таковы, как описано в формулировке теоремы. Рассмотрим $\mathcal{N}$-отображение $f_0 = f \restriction_{|\mathcal{T}^{(0)}|}\colon |\mathcal{T}^{(0)}| \to X$ и зададим его продолжение $\widehat{f}_0\colon |\mathcal{T}| \to L$ формулой $\widehat{f}_0(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)$, где $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ — произвольный симплекс из $\mathcal{T}$. Вследствие того, что на $|\mathcal{T}|$ рассматривается слабая топология, $\widehat{f}_0$ непрерывно. Ясно также, что $\widehat{f}_0$ сохраняет фильтрацию, так как $\widehat{f}_0 \restriction_{|\mathcal{T}^{(0)}|}$ — $\mathcal{N}$-отображение, а фильтрация L образована выпуклыми множествами. Рассмотрим гомотопию $H\colon |\mathcal{S}| \times I \to L$, заданную для любых $0 \le t \le 1$, $x \in |\mathcal{S}|$ формулой $H(x,t) = t \cdot \widehat{f}_0(x) + (1-t) \cdot f(x)$. Гомотопия H является $\mathcal{N}$-отображением, так как она связывает $\mathcal{N}$-отображения f и $\widehat{f}_0 \restriction_{|\mathcal{S}|}$, а элементы фильтрации L выпуклы. Так как f — частичная реализация, то для любого $\sigma \in \mathcal{T}$ существует элемент из $\mathcal{V}$, содержащий $f(\sigma \cap |\mathcal{S}|)$, но для любой вершины $v_i \in \mathcal{T}^{(0)}$, $f(v_i) = \widehat{f}_0(v_i)$, поэтому $\widehat{f}_0(\sigma \cap |\mathcal{S}|)$ содержится в том же выпуклом элементе $\mathcal{V}$. Итак, получаем, что для любого $x \in \sigma \cap |\mathcal{S}|$ множество $\{f(x), \widehat{f}_0(x)\}$ содержится в одном элементе покрытия $\mathcal{V}$, то есть отображения $f, \widehat{f}_0 \restriction_{|\mathcal{S}|}$ $\mathcal{V}$-близки, поэтому H есть $\mathcal{N}$-$\mathcal{W}$-гомотопия.

Отображение $H_1 = \widehat{f}_0 \restriction_{|\mathcal{S}|}$ $\mathcal{N}$-продолжимо до $\widehat{f}_0\colon |\mathcal{T}| \to L \in \mathcal{N}$-AE, откуда по теореме Борсука о продолжении $\mathcal{N}$-гомотопии следует, что существует $\mathcal{N}$-$\mathcal{W}$-продолжение $\widehat{H}\colon |\mathcal{T}| \times I \to L$. Тогда $g' = \widehat{H}_0\colon |\mathcal{T}| \to L$ есть $\mathcal{N}$-продолжение f на $|\mathcal{T}|$. Заметим, что для любого $\sigma \in \mathcal{T}$ существует элемент $V_1 \in \mathcal{V}_1$, содержащий $\widehat{f}_0(\sigma)$, а для любой точки $x \in \sigma$ существует элемент из $\mathcal{W}$, содержащий $\widehat{H}(\{x\} \times I)$. Поэтому $g'(\sigma) = \widehat{H}_0(\sigma)$ содержится в звезде множества V_1 относительно системы $\mathcal{W}$. Но, согласно выбору покрытий, $\mathcal{V}_1 \prec \mathcal{W}$, $\mathcal{W} \circ \mathcal{W} \prec r^{-1}(\mathcal{U})$, поэтому существует элемент $U \in \mathcal{U}$, такой, что $g'(\sigma) \subset r^{-1}(U)$, следовательно, g' можно рассматривать, как отображение в V.

Так как r — $\mathcal{N}$-ретракция, то $g\colon |\mathcal{T}| \to X$, задаваемое формулой $g = r \circ g'$, есть $\mathcal{N}$-отображение. Покажем, что для g выполняется (2). Действительно, для любого $\sigma \in \mathcal{T}$ существует элемент $W \in \mathcal{V}$, такой, что $f(\sigma \cap |\mathcal{S}|) \subset W$. Но уже доказано, что существует $U \in \mathcal{U}$, такой, что $g'(\sigma) \subset r^{-1}(U)$. Кроме того, из способа построения покрытий пространства X следует, что $W \subset U$. Тогда $g(\sigma) \cup W = r(g'(\sigma)) \cup W \subset r(r^{-1}(U)) \cup W \subset U$, откуда следует, что g есть полная $\mathcal{N}$-реализация симплекса $\mathcal{T}$ в X относительно $\mathcal{U}$, продолжающая f. □

Перейдем к доказательству теоремы о гомотопической характеризации $\mathcal{N}$-ANE-пространств. Сначала докажем необходимость. Пусть $X \in \mathcal{N}$-ANE, $\mathcal{U} \in \operatorname{cov} X$ и пусть $\mathcal{V} \in \operatorname{cov} X$, вписанное в $\mathcal{U}$, таково, что для любого $\mathcal{N}$-пространства Y любые два $\mathcal{V}$-близкие $\mathcal{N}$-отображения из Y в X являются $\mathcal{N}$-$\mathcal{U}$-гомотопными. По теореме о частичной $\mathcal{N}$-реализации существует $\mathcal{W} \in \operatorname{cov} X$, вписанное в $\mathcal{V}$, такое, что для $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ из формулировки теоремы и любой частичной $\mathcal{N}$-реализации $f\colon |\mathcal{S}| \to X$ комплекса $\mathcal{T}$ в X относительно $(\mathcal{S}, \mathcal{W})$ существует полная $\mathcal{N}$-реализация $g\colon |\mathcal{T}| \to X$ относительно $\mathcal{V}$, продолжающая f и такая, что для любого $\sigma \in \mathcal{T}$ и любого $W \in \mathcal{W}$, такого, что $f(\sigma \cap |\mathcal{S}|) \subset W$, существует такое $V \in \mathcal{V}$, что $g(\sigma) \cup W \subset V$.

Известно ([8]), что существует $\mathcal{A} \in \operatorname{cov} X$, звездно вписанное в $\mathcal{W}$ ($\mathcal{A} \circ \mathcal{A} \prec \mathcal{W}$). Пусть

$P = N(\mathcal{A})$ — $\mathcal{N}$-нерв покрытия $\mathcal{A}$. Поставим в соответствие каждой вершине $\langle A\rangle \in N(\mathcal{A})^{(0)}$ произвольную точку $f(\langle A\rangle) \in A \cap X_{\deg A}$. Таким образом, задано отображение $f\colon N(\mathcal{A})^{(0)} \to X$.

Так как пространство $N(\mathcal{A})^{(0)}$ дискретно, f непрерывно. Ясно также, что f есть $\mathcal{N}$-отображение. Докажем, что f — частичная $\mathcal{N}$-реализация $N(\mathcal{A})$ в X относительно $(N(\mathcal{A})^{(0)}, \mathcal{W})$. Действительно, пусть $\sigma = \langle A_0, A_1, \ldots, A_n\rangle$ — симплекс из $N(\mathcal{A})$. Тогда $\bigcap_{i=0}^n A_i \neq \varnothing$. Так как покрытие $\mathcal{A}$ звездно вписано в $\mathcal{W}$, то существует элемент $W \in \mathcal{W}$, такой, что $\bigcup_{i=0}^n A_i \subset W$. Следовательно, $f(\sigma \cap N(\mathcal{A})^{(0)}) = f(\langle A_0\rangle, \langle A_1\rangle, \ldots, \langle A_n\rangle) \subset A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \subset W$.

В силу выбора $\mathcal{W}$, $\mathcal{N}$-отображение f может быть продолжено до $\mathcal{N}$-отображения $g\colon N(\mathcal{A}) \to X$, удовлетворяющего условиям, описанным в начале доказательства. Докажем, что $\mathcal{N}$-отображения id_X и $g \circ \varphi$ являются $\mathcal{V}$-близкими. Действительно, выберем произвольно $x \in X$. Поскольку $\mathcal{A}$ конечно, то x содержится лишь в конечном числе элементов из $\mathcal{A}$; пусть это элементы $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Тогда $\sigma = \langle A_0, \ldots, A_n\rangle$ — симплекс из $N(\mathcal{A})$ и $\varphi(x) \in \sigma$. Существует $W \in \mathcal{W}$, такой, что $\bigcup_{i=0}^n A_i \subset W$. Тогда $x \in W$, и поскольку для каждого $0 \le i \le n$ выполняется $f(\langle A_i\rangle) \in A_i$, получаем $f(\sigma \cap N(\mathcal{A})^{(0)}) \subset W$.

Из выбора $\mathcal{W}$ следует, что существует $V \in \mathcal{V}$, такой, что $g(\sigma) \cup W \subset V$. Так как $\varphi(x) \in \sigma$, получаем $g(\varphi(x)) \in V$, и поскольку $W \subset V$, имеем $x \in V$. Следовательно, $\{x, g(\varphi(x))\} \subset V$. В силу выбора $\mathcal{V}$ заключаем, что id_X и $g \circ \varphi$ $\mathcal{N}$-$\mathcal{U}$-гомотопны, тем самым необходимость доказана.

Докажем достаточность. По условию, для любого $\mathcal{U} \in \operatorname{cov} X$ существует $\mathcal{N}$-полиэдр P и $\mathcal{N}$-отображения $g\colon X \to P$ и $f\colon P \to X$, композиция $f \circ g\colon X \to X$ которых $\mathcal{N}$-$\mathcal{U}$-гомотопна id_X. Так как $P \in \mathcal{N}$-ANE, а X можно рассматривать как замкнутое $\mathcal{N}$-подпространство линейного нормированного $\mathcal{N}$-пространства L ([3]), то $\mathcal{N}$-отображение $g\colon X \to P$ продолжимо до $\mathcal{N}$-отображения $\widehat{g}\colon V \to P$, заданного на окрестности V множества X в L, откуда следует, что $\mathcal{N}$-отображение $f \circ g\colon X \to X$ продолжимо до $\mathcal{N}$-отображения $f \circ \widehat{g}\colon V \to X$. Так как $L \in \mathcal{N}$-AE ([3]), то по теореме о характеризации $\mathcal{N}$-ANE-пространств через малые деформации, $X \in \mathcal{N}$-ANE, что и требовалось доказать.

6. Доказательство теоремы о склейке для $\mathcal{N}$-пространств.

Теорема 8. *Если $F \in \mathcal{N}$-AE — замкнутое подпространство метрического $\mathcal{N}$-пространства X, причем $X \setminus F \in \mathcal{N}$-ANE, и существует $\mathcal{N}$-гомотопия $H\colon X \times I \to X$, удовлетворяющая условиям: $H_0 = \mathrm{id}_X$; $H_1\colon X \to F$ есть $\mathcal{N}$-ретракция; $H_t \restriction_F = \mathrm{id}_F$ для любого $t \in I$, то $X \in \mathcal{N}$-AE.*

Доказательство. Покажем, что для любого $\mathcal{N}$-отображения $f\colon A \to X$, заданного на замкнутом подмножестве A произвольного метрического $\mathcal{N}$-пространства Z, существует $\mathcal{N}$-продолжение $\widehat{f}\colon Z \to X$.

Пусть $B = f^{-1}(F)$. Ясно, что B замкнуто в Z. Так как $X \setminus F \in \mathcal{N}$-ANE по условию, а $\mathcal{N}$-пространство $A \setminus B$ замкнуто в $\mathcal{N}$-пространстве $Z \setminus B$, то для $\mathcal{N}$-отображения $f \restriction_{A\setminus B}\colon A \setminus B \to X \setminus F$ существует $\mathcal{N}$-продолжение $g\colon W \to X \setminus F$, где W — окрестность $A \setminus B$ в $Z \setminus B$. Применяя к $\mathcal{N}$-отображениям $f\colon A \to X$ и $g\colon W \to X \setminus F$ лемму 1, получим, что существует такое открытое подмножество $W' \subset W$, что $(A \cap W) \subset W'$ и отображение $h\colon A \cup W' \to X$, задаваемое формулой

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in B, \\ g(z), & z \in W', \end{cases}$$

непрерывно. Ясно, что h является $\mathcal{N}$-отображением. Так как пространство Z нормально, можно считать, что W' замкнуто в $Z \setminus B$, тогда $(Z \setminus B) \setminus W'$ открыто в $Z \setminus B$. Кроме того, $(A \setminus B) \cap ((Z \setminus B) \setminus W') = \varnothing$, поэтому, согласно лемме Урысона, существует непрерывное отображение $\xi\colon Z \setminus B \to [0,1]$, такое, что $\xi \equiv 0$ на $A \setminus B$ и $\xi \equiv 1$ на $(Z \setminus B) \setminus W'$ и на границе W'. Зададим отображение $q\colon A \cup W' \to X$ формулой

$$q(z) = \begin{cases} H_{\xi(z)}(h(z)), & z \in (A \setminus B) \cup W', \\ \quad f(z), & z \in B. \end{cases}$$

Отображение q согласовано, так как при $z \in A \setminus B$, $q(z) = H_0(h(z)) = h(z) = f(z)$. Таким образом, $q \restriction_A = f$. Справедлива

Лемма 8. *Отображение q непрерывно.*

Доказательство. Достаточно доказать непрерывность q в любой точке $z_0 \in B \cap \overline{A \setminus B}$. Отметим, что $q(z_0) = f(z_0) \in F$, так как $z_0 \in B$. Пусть U — произвольная окрестность точки $q(z_0)$. Найдем окрестность $V(z_0)$ со свойством $q(V(z_0) \cap (A \cup W')) \subset U(q(z_0))$.

Из непрерывности h следует, что существует окрестность $V'(z_0)$, такая, что для любой точки $z \in V'(z_0) \cap (A \cup W')$ выполняется $h(z) \in U(q(z_0))$. Тогда для любой точки $z \in V'(z_0) \cap B$, $q(z) = f(z) = h(z) \in U(q(z_0))$; для любой точки $z \in V'(z_0) \cap (A \setminus B)$, $q(z) = H_{\xi(z)}(h(z)) = H_0(h(z)) = h(z) \in U(q(z_0))$.

Осталось рассмотреть случай, когда $z \in W'$. Так как по условию $H_t \restriction_F = \mathrm{id}_F$ для любого $t \in I$, то по лемме 4 получаем, что для $U(q(z_0))$ существует окрестность $U_1(q(z_0)) \subset U(q(z_0))$, такая, что $H(U_1(q(z_0)) \times I) \subset U(q(z_0))$. Из непрерывности h следует, что для $U_1(q(z_0))$ существует окрестность $V(z_0) \subset V'(z_0)$, такая, что для любого $z \in V(z_0)$ выполняется $h(z) \in U_1(q(z_0))$. Тогда для любой точки $z \in V(z_0) \cap W'$, $q(z) = H_{\xi(z)}(h(z)) \in H\big(U_1(q(z_0)) \times I\big) \subset U(q(z_0))$. □

Так как H и f — $\mathcal{N}$-отображения, то q — $\mathcal{N}$-отображение, удовлетворяющее условиям

1) Если $z \in B$, то $q(z) = f(z) \in F$,

2) Если $z \in \operatorname{Bd} W'$, то $q(z) = H_1(h(z)) \in F$ (так как $H_1(X) \subseteq F$),

3) $(B \cup \operatorname{Bd} W') \supset \operatorname{Bd}(A \cup W')$,

откуда следует, что $q(\operatorname{Bd}(A \cup W')) \subset F$. Так как $\operatorname{Bd}(A \cup W')$ есть замкнутое подмножество $\mathcal{N}$-пространства $Z \setminus \operatorname{Int}(A \cup W')$, а $F \in \mathcal{N}$-AE, то частичное $\mathcal{N}$-отображение $p = q \restriction_{\operatorname{Bd}(A\cup W')}\colon \operatorname{Bd}(A \cup W') \to F$ допускает $\mathcal{N}$-продолжение $\widehat{p}\colon Z \setminus \operatorname{Int}(A \cup W') \to F$. Тогда отображение $\widehat{f}\colon Z \to X$, задаваемое формулой

$$\widehat{f}(z) = \begin{cases} q(z), & z \in A \cup W', \\ \widehat{p}(z), & z \in Z \setminus \operatorname{Int}(A \cup W'), \end{cases}$$

есть искомое $\mathcal{N}$-продолжение f на множество Z. □

Следствие 2. *Если $X \in \mathcal{N}$-ANE, то профильтрованный метрический конус $\operatorname{Con} X \in \mathcal{N}$-AE.*

Доказательство. Зададим $\mathcal{N}$-гомотопию $H\colon \operatorname{Con} X \times I \to \operatorname{Con} X$ формулой $H_s([x,t]) = [x,(1-s)t]$ для $0 \le s \le 1$. Очевидно, что $H_0([x,t]) = [x,t]$, то есть $H_0 = \mathrm{id}_{\operatorname{Con} X}$; $H_1([x,t]) = [x,0] = *$; $H_s(*) = H_s[x,0] = [x,0] = *$ для любого $s \in [0,1]$. Кроме того, множество $\{*\} \in$ AE замкнуто в $\operatorname{Con} X$, пространство $(\operatorname{Con} X) \setminus \{*\}$ $\mathcal{N}$-гомеоморфно $X \times (0,1] \in \mathcal{N}$-ANE. Тогда по теореме 8, $\operatorname{Con} X \in \mathcal{N}$-AE. □

Замечание. На самом деле верно более сильное утверждение: $X \in \mathcal{N}$-ANE *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Con} X \in \mathcal{N}$-AE.

Перейдем к доказательству теоремы о склейке для $\mathcal{N}$-пространств сначала для случая $X, Y, A \in \mathcal{N}$-AE. Пусть p — фактор-отображение, склеивающее X и Y по f. Так как $X \in \mathcal{N}$-AE, существует $\mathcal{N}$-гомотопия $G\colon X \times I \to X$, такая, что $G_0 = \mathrm{id}_X$; $G_1\colon X \to A$ — $\mathcal{N}$-ретракция и $G_t \restriction_A = \mathrm{id}_A$ для любого $t \in I$. Зададим отображение $H\colon S \times I \to S$ формулой

$$H(x,t) = \begin{cases} x, & (x,t) \in Y \times I, \\ p \circ G(x,t), & (x,t) \in (X \setminus A) \times I. \end{cases}$$

Лемма 9. *Отображение H непрерывно.*

Доказательство. Проверим непрерывность отображения H в произвольной точке $(a, t) \in (Y \cap \mathrm{Cl}_S(X \setminus A)) \times I$. Пусть U — окрестность точки $H(a,t) = a$ в S. Окрестность $U = U_1 \cup p(U_2)$, где U_1 — окрестность точки a в Y, U_2 — окрестность $f^{-1}(a)$ в X, такая, что $f(U_2 \cap A) = U_1$. На множестве A отображение G_t тождественно для $t \in I$, поэтому, по следствию из леммы 4, для окрестности U_2 множества $f^{-1}(a)$ в X существует его окрестность $W \subset U_2$, такая, что $G(W \times I) \subset U_2$. Тогда $H((W \setminus A) \times I) = p \circ G((W \setminus A) \times I) \subset p(U_2) \subset U$; $H(U_1 \times I) = U_1 \subset U$. Поэтому H непрерывно. $\square$

Теперь ясно, что отображение H является $\mathcal{N}$-гомотопией. Так как $X \setminus A$ есть открытое подмножество $X \in \mathcal{N}$-AE, то $X \setminus A \in \mathcal{N}$-ANE, следовательно, $\mathcal{N}$-гомеоморфное ему пространство $S \setminus Y$ тоже является $\mathcal{N}$-ANE. Так как $H_0 \restriction_Y = \mathrm{id}_Y$, а $H_0 \restriction_{X\setminus A} = p \circ G_0 \restriction_{X \setminus A} = p(\mathrm{id}_{X\setminus A}) = \mathrm{id}_{X\setminus A}$, то $H_0 = \mathrm{id}_S$. Так как $H_1 \restriction_Y = \mathrm{id}_Y$ и $H_1 \restriction_{X\setminus A} = p \circ G_1 \restriction_{X\setminus A}$, где G_1 — ретракция X на A, а $p(A) \subset Y$, то H_1 — ретракция S на Y. Кроме того, $H_t \restriction_Y = \mathrm{id}_Y$ для $t \in I$. Таким образом, для отображения $H\colon S \times I \to S$ выполняются условия теоремы 8, откуда следует, что $S \in \mathcal{N}$-AE.

Осталось рассмотреть случай X, Y, $A \in \mathcal{N}$-ANE. Тогда по следствию из теоремы 8, $\operatorname{Con} X$, $\operatorname{Con} Y$, $\operatorname{Con} A \in \mathcal{N}$-AE. Зададим отображение $\operatorname{Con} f\colon \operatorname{Con} A \to \operatorname{Con} Y$ формулой

$$(\operatorname{Con} f)(x,t) = \begin{cases} [f(x), t], & x \in A, \quad 0 \le t < 1, \\ *, & t = 1. \end{cases}$$

Ясно, что отображение $\operatorname{Con} f$ непрерывно и сохраняет фильтрацию, а пространство $(\operatorname{Con} X) \cup_{\operatorname{Con} f} (\operatorname{Con} Y)$ $\mathcal{N}$-гомеоморфно пространству $\operatorname{Con}(X \cup_f Y)$, откуда следует, что $\operatorname{Con}(X \cup_f Y) \in \mathcal{N}$-AE, и по замечанию к следствию из теоремы 8, $X \cup_f Y \in \mathcal{N}$-ANE. Доказательство теоремы о склейке завершено.

7. Доказательство теоремы Уайтхеда-Борсука-Ханнера. Построим на основе $\mathcal{N}$-гомотопии $H\colon U \times I \to X$ $\mathcal{N}$-гомотопию $P\colon (\operatorname{Con} X) \times I \to \operatorname{Con} X$, удовлетворяющую условиям теоремы 8.

Пусть V — замкнутая окрестность F, вписанная в U. Множества V и $X \setminus U$ замкнуты и дизъюнктны, поэтому по лемме Урысона существует непрерывная функция $\varphi\colon X \to [0,1]$, принимающая значение 0 в точках множества V и значение 1 в точках множества $X \setminus U$. Зададим отображение $G\colon X \times [0,1] \to X$ формулой

$$G(x,t) = \begin{cases} x, & 0 \le t \le \varphi(x), \\ H\!\left(x, \frac{t-\varphi(x)}{1-\varphi(x)}\right), & \varphi(x) < t \le 1, \end{cases}$$

и отображение $P\colon (\operatorname{Con} X) \times I \to \operatorname{Con} X$ формулой

$$P_t([x,\tau]) = [G(x,t), \big(1 - t \cdot \varphi(x)\big)\tau] \text{ для любых } t, \tau \in I, x \in X.$$

Отображение G непрерывно во всех точках из $X \times I$, для которых $\varphi(x) < 1$, либо $t < 1$. Поэтому непрерывность отображения P нуждается в проверке только для $([x,\tau], t) \in (\operatorname{Con} X) \times I$, для которых $\varphi(x) = 1$ и $t = 1$. При этом $x \in X \setminus U$, $G(x,t) = x$ и $P_t([x,\tau]) = [x,0] = *$. Если $x \in \operatorname{Int}(X \setminus U)$, то $\varphi(x) = 1$, а G непрерывно в некоторой окрестности x. Поэтому P непрерывно в $([x,\tau],1)$ для $x \in (X \setminus U)$, $\tau \in I$. Проверим непрерывность P при $x \in \operatorname{Bd} U$, $t = 1$. Фиксируем произвольную окрестность $U_1(*)$ вершины. В силу непрерывности отображения $1 - t \cdot \varphi(x)$ существует окрестность V_1 точки $([x,\tau],1)$, такая, что для любой точки $([x',\tau'],t') \in V_1$ число $\big(1 - t' \cdot \varphi(x')\big)\tau'$ будет сколь угодно близко к 0. Так как $\big(1 - t' \cdot \varphi(x')\big)\tau'$ есть вторая координата $P_{t'}([x',\tau'])$, то V_1 под действием отображения P переходит в $U_1(*)$.

Проверим, что для $\mathcal{N}$-гомотопии P выполняются условия теоремы 8. Действительно, $P_0([x,\tau]) = [G(x,0),\tau] = [x,\tau]$; при $x \in F$, $\varphi(x) = 0$, поэтому $P_t([x,\tau]) = [x,\tau]$; так как $P_1([x,\tau]) = [G(x,1), \big(1 - \varphi(x)\big)\tau]$, а

$$G(x,1) = \begin{cases} x, & x \in X \setminus U, \\ H(x,1) \in F, & x \in U, \end{cases}$$

то $P_1(\operatorname{Con} X) \subset (\operatorname{Con} F)$.

Так как $X \setminus F \in \mathcal{N}$-ANE и $F \in \mathcal{N}$-ANE, то по следствию из теоремы 8, $\operatorname{Con}(X \setminus F) \in \mathcal{N}$-AE и $\operatorname{Con} F \in \mathcal{N}$-AE. Множество $(\operatorname{Con} X) \setminus (\operatorname{Con} F) = \operatorname{Con}(X \setminus F) \setminus \{*\}$ открыто в $\operatorname{Con}(X \setminus F) \in \mathcal{N}$-ANE, поэтому $(\operatorname{Con} X) \setminus (\operatorname{Con} F) \in \mathcal{N}$-ANE. Таким образом, по теореме 8 получаем, что $\operatorname{Con} X \in \mathcal{N}$-AE, откуда по замечанию к следствию из теоремы 8 следует $X \in \mathcal{N}$-ANE, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. – М.: Мир, 1977. – 408 с.
2. Постников М.М. Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
3. Силаева З.Н. *Универсальные пространства с фильтрацией* // Статья представлена в журнал "Труды Института математики"НАН Беларуси.
4. Силаева З.Н. *Теорема Куратовского-Дугунджи для пространств с фильтрациями* // Статья представлена в журнал "Вестник Белгосуниверситета".
5. Hu S.-T. Theory of Retracts. – Detroit: Wayne State Univ. Press, 1965.
6. Whitehead J.H.C. *Note on a theorem due to Borsuk*// Bull. Amer. Math. Soc. – 1948. – V.54. – P. 1125–1132.
7. Борсук К. Теория ретрактов. – М.: Мир, 1971. – 292 с.
8. Mill J. Infinite-Dimensional Topology. Prerequisites and Introduction. – Amsterdam: NHPC, 1989. – 402 p.
9. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

Механико-математический факультет,
Белорусский государственный университет,
проспект Независимости, 4, 220030, Минск, Беларусь,
szn2006@yandex.ru,
ул.Курчатова, 8, В43, Минск, Беларусь.

Поступило 12.03.09