УДК 517.91:532.2

О. М. Нікітіна

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ–ФУР'Є–ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

O. M. Nikitina. *Hybrid integral transformation of Bessel-Fourier-Euler type on polar axis*, Mat. Stud. **32** (2009), 170–179.

Using the method of delta-like sequence (Dirichlet kernel) on polar axis with two conjugate points we introduced a hybrid integral transformers of type Bessel-Fourier-Euler.

О. М. Никитина. *Гибридное интегральное преобразования типа Бесселя-Фурье-Эйлера на полярной оси* // Мат. Студії. – 2009. – Т.32, №2. – С.170–179.

Методом дельта-образной последовальности (ядро Дирихле) на полярной оси с двумя точками сопряжения построено гибридное интегральное преобразование типа Бесселя-Фурье-Эйлера.

Вступ. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним із ефективних методів одержання інтегрального зображення розв'язку таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень (ГІП), започаткованих в [1]. Основи теорії ГІП закладено в [2]. Дана стаття присвячена запровадженню одного із типів ГІП.

Основна частина. Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty)\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 d^2/dr^2 + \theta(r - R_2)a_3^2 B^*_{\alpha_2}, \quad (1)$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда ([3]), $a_j > 0$, $j \in \{1, 2, 3\}$, B_{ν,α_1} — диференціальні оператори Бесселя ([4]), $B^*_{\alpha_2}$ — Ейлера ([5]) та Фур'є ([5]): $B_{\nu,\alpha_1} = \dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{2\alpha_1 + 1}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{\nu^2 - \alpha_1^2}{r^2}$, $B^*_{\alpha_2} = r^2\dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1)r\dfrac{d}{dr} + \alpha_2^2$, $2\alpha_j > 0$, $\nu \ge \alpha_1$, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$. Вважатимемо, що ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ визначений на множині G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:
1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; g''(r); B^*_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2^+;
2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma_1} g_1(r)] = 0, \quad \lim_{r\to\infty}[r^{\gamma_2} g_3(r)] = 0; \quad (2)$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 42A38, 44A05, 44A15.

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\Big[(\alpha_{j1}^k d/dr+\beta_{j1}^k)g_k(r)-(\alpha_{j2}^k d/dr+\beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)\Big]\Big|_{r=R_k}=0,\ \{j,k\}\subset\{1,2\}. \tag{3}$$

Вважаємо також, що виконані такі умови на коефіцієнти: $a_j>0$, $\alpha_{jm}^k\ge 0$, $\beta_{jm}^k\ge 0$, $c_{1k}\cdot c_{2k}>0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$. Визначимо числа

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}},\ \sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{a_2^2},\ \sigma_3=\frac{1}{a_3^2},$$

вагову функцію $\sigma(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2+\theta(r-R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}$ і скалярний добуток

$$(u,v)=\int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)\,dr\equiv\int_0^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\,dr+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2\,dr+$$
$$+\int_{R_2}^\infty u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}\,dr;\quad u\in G, v(r)\in G. \tag{4}$$

Для $u\in G$ та $v\in G$ з умов спряження (3) випливає базова тотожність

$$[u_k(r)v_k'(r)-v_k(r)u_k'(r)]\Big|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}[u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)-u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k}. \tag{5}$$

На основі тотожності (5), властивостей функцій $u\in G$ та $v\in G$ і структури σ_1, σ_2, σ_3 переконуємося в тому, що правильна рівність

$$(\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[u],v)=(u,\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[v]). \tag{6}$$

Рівність (6) означає, що ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний ([6]). Оскільки ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ має на множині I_2 одну особливу точку $r=\infty$, то його спектр неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$ і йому відповідає спектральна вектор-функція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)=\sum\nolimits_{j=1}^2\theta(r-R_{j-1})\theta(R_j-r)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)+\theta(r-R_2)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta),\quad R_0=0. \tag{7}$$

Функції $V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$ знайдемо як розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя, Фур'є та Ейлера

$$\begin{aligned}(B_{\nu,\alpha_1}+b_1^2)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)&=0,\quad r\in(0,R_1),\\ (d^2/dr^2+b_2^2)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)&=0,\quad r\in(R_1,R_2),\\ (B_{\alpha_2}^*+b_3^2)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)&=0,\quad r\in(R_2,\infty).\end{aligned} \tag{8}$$

За умовами спряження (3), $b_j^2=a_j^{-2}(\beta^2+k_j^2)$, $k_j^2\ge 0$, $j\in\{1,2,3\}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_1}+b_1^2)v=0$ утворюють функції ([4]) $v_1=J_{\nu,\alpha_1}(b_1r)$ та $N_{\nu,\alpha_1}(b_1r)$, для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2+b_2^2)v=0$ утворюють функції ([5]) $v_1=\cos b_2r$ та $v_2=\sin b_2r$, фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_2}^*+b_3^2)v=0$ утворюють функції ([5]) $v_1=r^{-\alpha_2}\cos(b_3\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_2}\sin(b_3\ln r)$.

Якщо прийняти

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=A_1J_{\nu,\alpha_1}(b_1r),\quad r\in(0,R_1)$$

$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = A_2\cos b_2 r + B_2\sin b_2 r, \quad r\in(R_1,R_2),$$

$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 r^{-\alpha_2}\cos(b_3\ln r) + B_3 r^{-\alpha_2}\sin(b_3\ln r), \quad r\in(R_2,\infty), \tag{9}$$

то умови спряження (3) дають алгебраїчну систему

$$u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)A_1 - v^{11}_{j2}(b_2R_1)A_2 - v^{12}_{j2}(b_2R_1)B_2 = 0, \quad j\in\{1,2\},$$

$$v^{21}_{j1}(b_2R_2)A_2 + v^{22}_{j1}(b_2R_2)B_2 - Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)A_3 - Y^{22}_{\alpha_3;j2}(b_3,R_2)B_3 = 0. \tag{10}$$

Для довільного $A_1\neq 0$ розглянемо алгебраїчну систему

$$v^{11}_{j2}(b_2R_1)A_2 + v^{12}_{j2}(b_2R_1)B_2 = u_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)A_1, \quad j\in\{1,\ 2\}. \tag{11}$$

Визначник алгебраїчної системи (11)

$$q_1(\beta)\equiv v^{11}_{12}(b_2R_1)v^{12}_{22}(b_2R_1) - v^{11}_{22}(b_2R_1)v^{12}_{12}(b_2R_1) = c_{21}b_2\neq 0,$$

тому алгебраїчна система (11) має єдиний розв'язок

$$A_2 = A_1[c_{21}b_2]^{-1}[u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)v^{12}_{22}(b_2R_1) - u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)v^{12}_{12}(b_2R_1)],$$

$$B_2 = -A_1[c_{21}b_2]^{-1}[u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)v^{11}_{22}(b_2R_1) - u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)v^{11}_{12}(b_2R_1)]. \tag{12}$$

Для довільного $A_1\neq 0$ розглянемо також алгебраїчну систему відносно A_3, B_3

$$Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)A_3 + Y^{22}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)B_3 = -A_1[c_{21}b_2]^{-1}a_{\nu,\alpha_1;j}(\beta), \quad j\in\{1,2\}. \tag{13}$$

У систему (13) входять функції

$$\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2) = v^{11}_{j2}(b_2R_1)v^{22}_{k1}(b_2R_2) - v^{12}_{j2}(b_2R_1)v^{21}_{k1}(b_2R_2) \quad \{j,k\}\subset\{1,2\},$$

$$a_{\nu,\alpha_1;j}(\beta) = u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2R_2) - u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2R_2).$$

При цьому використано функції

$$Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2) = [(\beta^2_{j2} - \alpha_2R_2^{-1}\alpha^2_{j2})\cos(b_3\ln R_2) - \alpha^2_{j2}b_3R_2^{-1}\sin(b_3\ln R_2)]R_2^{-\alpha_2},$$

$$Y^{22}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2) = [(\beta^2_{j2} - \alpha_2R_2^{-1}\alpha^2_{j2})\sin(b_3\ln R_2) + \alpha^2_{j2}b_3R_2^{-1}\cos(b_3\ln R_2)]R_2^{-\alpha_2}.$$

Визначник алгебраїчної системи (13)

$$q_{\alpha_2}(\beta)\equiv Y^{21}_{\alpha_2;12}(b_3,R_2)Y^{22}_{\alpha_2;22}(b_3,R_2) - Y^{21}_{\alpha_2;22}(b_3,R_2)Y^{22}_{\alpha_2;12}(b_3,R_2) = \frac{c_{22}b_3}{R_2^{2\alpha_2+1}}\neq 0, \tag{14}$$

тому алгебраїчна система (13) має єдиний розв'язок

$$A_3 = \omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta), B_3 = -\omega_{\nu,(\alpha);2}1(\beta), A_1 = q_1(\beta)q_{\alpha_2}(\beta)\equiv\frac{c_{21}b_2c_{22}b_3}{R_2^{2\alpha_2+1}},$$

$$\omega_{\nu,(\alpha);j}(\beta) = a_{\nu,\alpha_1;1}(\beta)Y^{2j}_{\alpha_2;22}(b_3,R_2) - a_{\nu,\alpha_1;2}(\beta)Y^{2j}_{\alpha_2;12}(b_3,R_2), \quad j\in\{1,2\}. \tag{15}$$

Підставивши знайдені значення величин A_j ($j\in\{1,2,3\}$) та B_k ($k\in\{2,3\}$) з формул (12) і (15) у рівності (9), отримаємо шукані функції $V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = c_{21}c_{22}b_2b_3R_2^{-(2\alpha_2+1)}J_{\nu,\alpha_1}(b_1r),$$

$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = c_{22}b_3R_2^{-(2\alpha_2+1)}[u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)\varphi^1_{22}(b_2R_1,b_2r) - u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)\varphi^1_{12}(b_2R_1,b_2r)], \tag{16}$$

$$\varphi^1_{j2}(b_2R_1,b_2r) = v^{12}_{j2}(b_2R_1)\cos b_2r - v^{11}_{j2}(b_2R_1)\sin b_2r, \quad j\in\{1,2\},$$

$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = \omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta) r^{-\alpha_2} \cos(b_2 \ln r) - \omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta) r^{-\alpha_2} \sin(b_2 \ln r).$$

Наявність спектральної функції $V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta) = \beta[b_3(\beta)]^{-1}([\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}$ дає можливість визначити пряме $H_{\nu,(\alpha)}$ та обернене $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$ ГІП, породжене на множині I_2^+ оператором (ГДО) $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ ([7])

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)] = \int_0^\infty g(r) V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \widetilde{g}(\beta), \tag{17}$$

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}[\widetilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \widetilde{g}(\beta) V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r), \tag{18}$$

де функція $g(r) \in G$. Математичне обгрунтування правил (17), (18) дає така теорема.

Теорема 1 (про інтегральне зображення)**.** *Якщо вектор-функція*

$$f(r) = [\theta(r)\theta(R_1 - r) r^{\alpha_1+1/2} + \theta(r-R_1)\theta(R_2 - r)\cdot 1 + \theta(r-R_2) r^{\alpha_2-1/2}] g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, *то для будь-якого* $r \in I_2^+$ *має місце інтегральне зображення*

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)\int_0^\infty g(\rho) V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho d\beta. \tag{19}$$

Доведення. Функції $V_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda)$ та $V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)$, де $\lambda \neq \beta \in (0,\infty)$, задовольняють відповідно диференціальні рівняння

$$[a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + (\lambda^2 + k_1^2)] V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = 0, \quad [a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + (\beta^2 + k_1^2)] V_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda) = 0.$$

Помножимо перше з цих рівнянь на $r^{2\alpha_1+1} V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)$, а друге – на $r^{2\alpha_1+1} V_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda)$ й віднімемо від першого друге

$$V_{\nu,(\alpha;1)}(r,\lambda) V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) r^{2\alpha_1+1} = \frac{a_1^2}{\beta^2-\lambda^2}\frac{d}{dr}\Big[r^{2\alpha_1+1}\Big(V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\frac{d}{dr}V_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda) -$$
$$- V_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda)\frac{dV_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)}{dr}\Big)\Big]. \tag{20}$$

Функції $V_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)$ та $V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)$, де $\lambda \neq \beta \in (0,\infty)$, задовольняють диференціальні рівняння Фур'є

$$[a_2^2 d^2/dr^2 + (\lambda^2 + k_2^2)] V_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda) = 0, \quad [a_2^2 d^2/dr^2 + (\beta^2 + k_2^2)] V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = 0.$$

Помножимо перше з цих рівнянь на функцію $V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)$, а друге – на $V_{\nu,(\alpha);2)}(r,\lambda)$ й віднімемо від першого друге

$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda) V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = \frac{a_2^2}{\beta^2-\lambda^2}\frac{d}{dr}\Big[V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\frac{dV_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)}{dr} -$$
$$- V_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)\frac{dV_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)}{dr}\Big]. \tag{21}$$

Функції $V_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)$ та $V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)$, де $\lambda \neq \beta \in (0,\infty)$, задовольняють диференціальні рівняння Ейлера

$$[a_3^2 B^*_{\alpha_2} + (\lambda^2 + k_3^2)] V_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda) = 0, \quad [a_3^2 B^*_{\alpha_2} + (\beta^2 + k_3^2)] V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = 0.$$

Помножимо перше з цих рівняння на $r^{2\alpha_2-1} V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)$, а друге – на $r^{2\alpha_2-1} V_{\nu,(\alpha);3)}(r,\lambda)$ й віднімемо від першого друге

$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)r^{2\alpha_2-1}=\frac{a_3^2}{\beta^2-\lambda^2}\frac{d}{dr}\Big[r^{2\alpha_2+1}\Big(V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\frac{dV_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)}{dr}-$$
$$-V_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)\frac{dV_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)}{dr}\Big)\Big]. \tag{22}$$

Домножимо рівність (20) на $\sigma_1 dr$ й проінтегруємо за r у межах від $r=0$ до $r=R_1$; домножимо рівність (21) на $\sigma_2 dr$ й проінтегруємо за r від $r=R_1$ до $r=R_2$; домножимо рівність (22) на $\sigma_3 dr$ й проінтегруємо за r від $r=R_2$ до $r=A$, де A довільно велике число. Якщо отримані при цьому рівності додати, то за базовою тотожністю (5) при $k\in\{1,2\}$, з огляду на структуру σ_1, σ_2, σ_3 маємо

$$\int_0^A V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\frac{A^{2\alpha_2+1}}{\beta^2-\lambda^2}\Big[V_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)-$$
$$-V_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)\Big]. \tag{23}$$

Для довільних додатних c та d ($c<d$) й довільної скінченної функції $\Psi(\lambda)$ неперервної, абсолютно сумовної з обмеженою варіацією, визначеної на $[c,d]$, знайдемо величину подвійного невласного інтегралу

$$I=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_c^d\Psi(\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda\ V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^A\int_c^d\Psi(\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda\ V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_c^d\int_0^A\Psi(\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\ \Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda. \tag{24}$$

Звідки за рівністю (23) отримуємо

$$I=\lim_{A\to\infty}\tfrac{2}{\pi}\int\limits_c^d\Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\tfrac{A^{2\alpha_2+1}}{\beta^2-\lambda^2}\Big[V_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)-V_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)\Big]d\lambda. \tag{25}$$

Визначимо функції

$$G_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)=\omega_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta)-\omega_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta),$$
$$G_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)=\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)-\omega_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta),$$
$$G_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)=\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)+\omega_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta),$$
$$G_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)=\omega_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)+\omega_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta),\quad Z^{\pm}=b_3(\beta)\pm b_3(\lambda).$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$V_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)-V_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)=$$
$$=\frac{1}{2A^{2\alpha_2+1}}[G_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)Z^-\sin(Z^+\ln A)+G_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)Z^+\cos(Z^-\ln A)+$$
$$+G_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)Z^-\cos(Z^+\ln A)+G_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)Z^+\sin(Z^-\ln A)], \tag{26}$$

Невласний інтеграл (25) з урахуванням рівності (26) переписується в такому вигляді

$$I=\lim_{A\to\infty}\tfrac{1}{\pi}\int_c^d a_3^{-2}\Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\Big[\tfrac{G_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)}{b_3(\beta)+b_3(\lambda)}\sin(Z^+\ln A)+\tfrac{G_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)}{b_3(\beta)-b_3(\lambda)}\times$$
$$\times\cos(Z^-\ln A)+\tfrac{G_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)}{b_3(\beta)+b_3(\lambda)}\cos(Z^+\ln A)+\tfrac{G_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)}{b_3(\beta)-b_3(\lambda)}\sin(Z^-\ln A)\Big]d\lambda\equiv$$
$$\equiv\lim_{A\to\infty}\tfrac{1}{\pi a_1^2}\int_c^d\Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\tfrac{G_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)}{b_3(\beta)+b_3(\lambda)}\sin[(b_3(\beta)+b_3(\lambda))\ln A]d\lambda$$

$$+\lim_{A\to\infty}\tfrac{1}{\pi a_1^2}\int_c^d \Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\tfrac{G_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)}{b_3(\beta)-b_3(\lambda)}\cos[(b_3(\beta)-b_3(\lambda))\ln A]d\lambda+$$
$$+\tfrac{1}{\pi a_1^2}\lim_{A\to\infty}\int_c^d \Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\tfrac{G_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)}{b_3(\beta)+b_3(\lambda)}\cos[(b_3(\beta)+b_3(\lambda))\ln A]d\lambda+$$
$$+\lim_{A\to\infty}\tfrac{1}{a_1^2}\int_c^d \Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)G_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)\tfrac{1}{\pi}\tfrac{\sin[(b_3(\beta)-b_3(\lambda))\ln A]}{b_3(\beta)-b_3(\lambda)}d\lambda\equiv$$
$$\equiv I_1+I_2+I_3+I_4.$$

За лемою Рімана ([8])

$$\lim_{A\to\infty} I_m=0,\quad m\in\{1,2,3\}. \tag{28}$$

За лемою Діріхле ([8])

$$\lim_{A\to\infty} I_4=\begin{cases}\Psi(\beta), & \text{якщо } \lambda=\beta\in[c,d],\\ 0, & \text{якщо } \lambda=\beta\notin[c,d].\end{cases} \tag{29}$$

Отже, з рівностей (28), (29) одержуємо, що подвійний невласний інтеграл

$$I=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_c^d \Psi(\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\Psi(\beta), \tag{30}$$

якщо $\beta=\lambda\in[c,d]$. Якщо ж $\lambda=\beta\notin[c,d]$, то $I=0$.

Якщо функція $\Psi(\lambda)$ володіє вказаними вище властивостями на множині $(0,\infty)$, то подвійний невласний інтеграл

$$I\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \Psi(\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\Psi(\beta), \tag{31}$$

якщо $\lambda=\beta\in(0,\infty)$. Якщо ж $\lambda=\beta\notin(0,\infty)$, то $I=0$.

Припустимо, що

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi(\beta)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta. \tag{32}$$

Домножимо рівність (32) на вираз $\sigma(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)dr$, де λ – довільне додатне число, й проінтегруємо за r у межах від $r=0$ до $r=\infty$. З рівності (31) маємо

$$\int_0^\infty g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr=\Psi(\lambda).$$

Підставивши функцію $\Psi(\beta)=\int_0^\infty g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho$ в рівність (32), приходимо до інтегрального зображення (19). Доведення теореми 1 завершено. □

Зауваження. Якщо вектор-функція $g(r)$ кусково-неперервна, то в рівності (19) зліва замість $g(r)$ треба писати $\frac{1}{2}[g(r-0)+g(r+0)]$.

Побудова алгебри гібридних диференціальних операторів $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ здійснюється на основі основної тотожності ГІП ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (1).

Теорема 2 (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція*

$$f(r)=\{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)];g_2''(r);B^*_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$$

неперервна на множині I_2^+, *а функції* $g_j(r)$ *задовольняють умови спряження*

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk},\quad \{j,k\}\subset\{1,2\}, \tag{33}$$

та умови обмеження

$$\lim_{r\to 0} r^{2\alpha_1+1}\Big[g_1'(r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)-g_1(r)V'_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Big]=0,$$

$$\lim_{r\to \infty} r^{2\alpha_2+1}\Big[g_3'(r)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)-g_3(r)V'_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\Big]=0, \tag{34}$$

то справджується основна тотожність ГІП ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$

$$H_{\nu,(\alpha)}\Big[\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\Big]=-\beta^2\widetilde{g}(\beta)-\sum_{j=1}^{3}k_j^2\widetilde{g}_j+\sum_{k=1}^{2}h_k[Z^k_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^k_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}]. \tag{35}$$

У рівності (35) прийняті такі позначення

$$\widetilde{g}_1(\beta)=\int_0^{R_1}g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr,\quad \widetilde{g}_2(\beta)=\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 dr,$$

$$\widetilde{g}_3(\beta)=\int_{R_2}^{\infty}g_3(r)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr,\quad h_1=a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1},\quad h_2=a_2^2\sigma_2c_{12}^{-1},$$

$$Z^k_{\nu,(\alpha);i2}(\beta)=(\alpha^k_{i2}d/dr+\beta^k_{i2})V_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k},\quad \{i,k\}\subset\{1,2\}. \tag{36}$$

Доведення. За правилом (17) маємо

$$\mathcal{R}\equiv H_{\nu,(\alpha)}[\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]]=\int_0^\infty \mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\cdot V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=$$

$$=\int_0^{R_1}(a_1^2B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)])V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1r^{2\alpha_1+1}dr+\int_{R_1}^{R_2}\Big(a_2^2\frac{d^2g_2}{dr^2}\Big)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2dr+$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}(a_3^2B^*_{\alpha_2}[g_3(r)])V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3r^{2\alpha_2-1}dr. \tag{37}$$

Проінтегруємо під знаком інтегралів два рази частинами

$$\mathcal{R}=\int_0^{R_1}g_1(r)(a_1^2B_{\nu,\alpha_1}[V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)]\sigma_1r^{2\alpha_1+1}dr\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)\Big(a_2^2\frac{d^2V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)}{dr^2}\Big)\sigma_2dr+$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}g_3(\rho)(a_3^2B^*_{\alpha_2}[V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)])\sigma_3\rho^{2\alpha_2+1}d\rho+a_1^2\sigma_1\Big[r^{2\alpha_1+1}\Big(\frac{dg_1(r)}{dr}V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)-$$

$$-g_1(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)}{dr}\Big)\Big]\Big|_0^{R_1}+\Big[\frac{dg_2}{dr}V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)-g_2(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)}{dr}\Big]\Big|_{R_1}^{R_2}+$$

$$+\Big[r^{2\alpha_2+1}\Big(g'(r)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)-g_3(r)V'_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\Big)\Big]\Big|_{R_2}^{\infty}. \tag{38}$$

З умов (34) випливає, що позаінтегральні доданки в точках $r=0$ та $r=\infty$ перетворюються в нуль. За базовою тотожністю

$$[g_k'(R_k)V_{\nu,(\alpha);k}(R_k,\beta)-g_k(R_k)V'_{\nu,(\alpha);k}(R_k,\beta)]=\frac{c_{21}}{c_{1k}}[g'_{k+1}(R_k)V_{\nu,(\alpha);k+1}(R_k,\beta)-$$

$$-g_{k+1}(R_k)V'_{\nu,(\alpha);k+1}(R_k,\beta)]+\frac{1}{c_{1k}}[Z^k_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^k_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}]$$

отримуємо послідовно, що

$$a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\Big(g_1'(R_1)V_{\nu,(\alpha);1}(R_1,\beta)-g_1(R_1)V'_{\nu,(\alpha);1}(R_1,\beta)\Big)-a_2^2\sigma_2\Big(g_2'(R_1)V_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta)-$$

$$-g_2(R_1)V'_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta)\Big)=\Big(a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2\Big)\Big(g_2'(R_1)V_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta)-$$

$$-g_2(R_1)V'_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta)\Big) + a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1}(Z^1_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{21} - Z^1_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{11}) =$$

$$= h_1(Z^1_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{21} - Z^1_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{11}), \tag{39}$$

$$a_2^2\sigma_2\Big(g_2'(R_2)V_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta) - g_2(R_2)V'_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta)\Big) - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}\Big(g_3'(R_2)V_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta) -$$

$$-g_3(R_2)V'_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta)\Big) = \Big(a_2^2\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}} - R_2^{2\alpha_2+1}\Big)\Big(g_3'(R_2)V_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta) -$$

$$-g_3(R_2)V'_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta)\Big) + a_2^2\sigma_2 c_{12}^{-1}(Z^1_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{22} - Z^2_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{12}) =$$

$$= h_2(Z^2_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{22} - Z^2_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{12}). \tag{40}$$

При цьому ми скористалися тим, що

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}} - a_2^2\sigma_2 = \Big(\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21}}{c_1} - \frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha_2+1}\Big) \equiv 0,$$

$$a_2^2\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}} - R_2^{2\alpha_2+1} = \frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{c_{22}}{c_{12}}a_2^2R_2^{2\alpha_2+1} - R_2^{2\alpha_2+1} \equiv 0.$$

З тотожностей

$$[a_1^2B_{\nu,\alpha_1} + (\beta^2+k_1^2)]V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) \equiv 0, [a_2^2d^2/dr^2 + (\beta^2+k_2^2)]V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) \equiv 0,$$
$$[a_3^2B^*_{\alpha_2} + (\beta^2+k_3^2)]V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) \equiv 0$$

отримуємо рівності

$$a_1^2B_{\nu,\alpha_1}[V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)] = -(\beta^2+k_1^2)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta), a_2^2\frac{d^2V_{\nu,(\alpha);2}}{dr^2} =$$

$$= -(\beta^2+k_1^2)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta), a_3^2B^*_{\alpha_2}[V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)] = -(\beta^2+k_3^2)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta). \tag{41}$$

Якщо тепер підставити в (38) рівності (39)–(41), розділити одержані інтеграли на суму $-k_j^2\widetilde{g}_j$ та $-\beta^2\widetilde{g}_j$, то отримаємо тотожність (35). □

Логічну схему застосування запровадженого формулами (17), (18) ГІП проілюструємо на одній із типових задач математичної фізики.

Задача квазістатики. Побудувати обмежений в області $D = \{(t,r) : t \in (0,\infty), r \in I_2^+\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу ([9])

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \chi_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r), \quad r \in (0,R_1),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \chi_2^2 u_2 - a_2^2 d^2/dr^2[u_3] = f_2(t,r), \quad r \in (R_1,R_2),$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \chi_3^2 u_2 - a_3^2 B^*_{\alpha_2}[u_3(t,r)] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2,\infty) \tag{42}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)\Big|_{t=0} = g_j(r), \quad r \in (R_{j-1},R_j), \quad j \in \{1,2,3\}, \quad R_0 = 0, R_3 = \infty \tag{43}$$

та умовами спряження

$$\left[\Big(\alpha^k_{j1}\frac{\partial}{\partial r} + \beta^k_{j1}\Big)u_k(r) - \Big(\alpha^k_{j2}\frac{\partial}{\partial r} + \beta^k_{j2}\Big)u_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t), \quad \{j,k\} \subset \{1,2\}. \tag{44}$$

Схема розв'язання. Запишемо систему (42) й початкові умови (43) в матричній формі

$$\begin{bmatrix} \Big(\dfrac{\partial}{\partial t}+\chi_1^2-a_1^2B_{\nu,\alpha_1}\Big)u_1(t,r) \\ \Big(\dfrac{\partial}{\partial t}+\chi_2^2-a_2^2\partial^2/\partial r^2\Big)u_2(t,r) \\ \Big(\dfrac{\partial}{\partial t}+\chi_3^2-a_3^2B^*_{\alpha_2}\Big)u_3(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix} u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix} g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\end{bmatrix}. \quad (45)$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,(\alpha)}$ зобразимо за правилом (17) у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{\nu,(\alpha)}[\dots]=\Big[\int_0^{R_1}\dots V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr\int\limits_{R_1}^{R_2}\dots V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 dr$$
$$\int_{R_2}^{\infty}\dots V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr\Big]. \quad (46)$$

Припустимо, що $\max\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2\}=\chi_2^2$. Приймемо скрізь $k_1^2=\chi_2^2-\chi_1^2\ge 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=\chi_2^2-\chi_3^2\ge 0$ ($b_1=a_1^{-1}(\beta^2+\chi_2^2-\chi_1^2)^{1/2}$, $b_2=a_2^{-1}\beta$, $b_3=a_3^{-1}(\beta^2+\chi_2^2-\chi_3^2)^{1/2}$).

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (46) до задачі (45). За основною тотожністю(35) маємо задачу Коші

$$\Big(\frac{d}{dt}+(\beta^2+\chi_2^2)\Big)\widetilde{u}(t,\beta)=\widetilde{F}(t,\beta),\widetilde{u}(t,\beta)\Big|_{t=0}=\widetilde{g}(\beta). \quad (47)$$

У рівностях (47) прийняті позначення $\widetilde{u}=\sum_{j=1}^3\widetilde{u}_j$, $\widetilde{g}=\sum_{j=1}^3\widetilde{g}_j$, $\widetilde{F}(t,\beta)=\sum_{j=1}^3\widetilde{f}_j(t,\beta)+$ $+\sum_{k=1}^2 h_k[Z^k_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}(t)-Z^k_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}(t)]$. Безпосередньо перевіряється, що функція

$$\widetilde{u}(t,\beta)=e^{-(\beta^2+\chi_2^2)t}\widetilde{g}(\beta)+\int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_2^2)(t-\tau)}\widetilde{F}(\tau,\beta)d\tau=$$
$$=\int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_2^2)(t-\tau)}[\widetilde{f}(\tau,\beta)+\delta_+(\tau)\widetilde{g}(\beta)]d\tau+\sum_{k=1}^2 h_k\Big[\int_0^t e^{-(\chi_2^2+\beta^2)(t-\tau)}\omega_{2k}(\tau)d\tau\times$$
$$\times Z^k_{\nu,(\alpha);12}(\beta)-\int_0^t e^{-(\chi_2^2+\beta^2)(t-\tau)}\omega_{1k}(\tau)d\tau Z^k_{\nu,(\alpha);22}(\beta)]. \quad (48)$$

є розв'язком задачі Коші (47).

Інтегральний оператор $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$ як обернений до (46) за правилом (18) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}[\dots]=\begin{bmatrix} 2/\pi\int\limits_0^\infty\dots V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\\ 2/\pi\int_0^\infty\dots V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\\ 2/\pi\int_0^\infty\dots V_{(\alpha);3}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \quad (49)$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (49) до операторної матриці-елемента $[\widetilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\widetilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (48). У результаті низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення єдиного роз'язку параболічної задачі (42)–(44)

$$u_j(t,r) = \int_0^t \int_0^{R_1} H_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)]\sigma_1\rho^{2\alpha_1+1}d\rho d\tau +$$
$$+\int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)]\sigma_2 d\rho d\tau +$$
$$+\int_0^t \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)]\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho d\tau +$$
$$+\sum\nolimits_{k=1}^{2} h_k \int_0^t [\mathcal{R}^{k,j}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau) - \mathcal{R}^{k,j}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)]d\tau, \quad j\in\{1,2,3\},$$

де $\delta_+(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau = +0$ ([3]). В останніх рівностях беруть участь головні розв'язки даної параболічної задачі: 1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\chi_2^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta, \quad \{j,k\}\subset\{1,2,3\},$$

породжені неоднорідністю системи; 2) функції Гріна

$$\mathcal{R}^{k,j}_{\nu,(\alpha);i2}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\chi_2^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)Z^k_{\nu,(\alpha);i2}(\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta, \quad \{i,k\}\subset\{1,2\}, j\in\{1,2,3\},$$

породжені неоднорідністю умов спряження.

За наведеною вище схемою розв'язання задачі квазістатики отримуються інтегральні зображення розв'язків відповідних задач статики та динаміки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы мат. физики. – Л., 1976. – С. 93–106.
2. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Ч.1. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
4. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – Препринт 83.3. – 62 с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
6. Березанський Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных оператором. – К.: Наук. думка, 1965. – 798 с.
7. Ленюк М.П., Янчишин М.Л. Гібридні інтегральні перетворення типу Фур'є, Конторовича-Лєбєдєва-Лежандра. – Чернівці: Прут, 2002. – 76 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. – М.: Наука, 1969. – 656 с.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

Чернівецький факультет національного технічного
університету "Харківський політехнічний інститут"

Надійшло 28.10.2008
Після переробки 5.06.2009