УДК 517.95

Н. М. Гринців

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

N. M. Hryntsiv. *Existence of a solution to inverse problem for a parabolic equation with degeneration in a free boundary domain*, Mat. Stud. **32** (2009), 160–169.

In a free boundary domain there we investigate an inverse problem of identification the time-dependent coefficient at the higher order derivative in a general parabolic equation with a strong power degeneration. There are established conditions of existence of a classical solution to the problem.

Н. Н. Грынцив. *Существование решения обратной задачи для параболического уравнения с вырождением в области со свободной границей* // Мат. Студії. – 2009. – Т.32, №2. – С.160–169.

В области со свободной границей исследована обратная задача определения зависящего от времени старшего коэффициента в полном параболическом уравнении с сильным степенным вырождением. Установлены условия существования классического решения указанной задачи.

Задача, яка розглядається в даній роботі, поєднує коефіцієнтну обернену задачу з виродженням для повного параболічного рівняння та задачу з вільною межею. Невідомими, крім розв'язку рівняння, є коефіцієнт при старшій похідній та функція, що задає невідому частину межі. Обернені задачі з виродженням в областях з відомими межами для рівнянь еліптичного та гіперболічного типів досліджено в [1,2], де невідомі, відповід- но, вільний член та коефіцієнт при невідомій функції залежать від просторової змінної, та для параболічного рівняння з невідомим залежним від часу старшим коефіцієнтом [3]. Прямі задачі з виродженням для рівнянь параболічного типу в областях з вільними межами вивчались в [4,5]. Обернена задача для слабковиродженого параболічного рівняння в області з вільною межею досліджена в [6]. Мета цієї роботи — встановити умови існування класичного розв'язку вказаної задачі у випадку сильного степеневого виродження.

В області $\Omega_T = \{(x,t)\colon 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $x = h(t)$ — невідома функція, розглянемо обернену задачу визначення коефіцієнта $a(t) > 0, t \in [0,T]$ в рівнянні

$$u_t = a(t)t^{\beta}u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t),\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le h(0), \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35R30.

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), u(h(t),t) = \mu_2(t),\ 0 \le t \le T \tag{3}$$

та додатковими умовами вигляду

$$a(t)t^{\beta} u_x(0,t) = \mu_3(t),\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t),\ 0 \le t \le T, \tag{5}$$

де $\beta \ge 1-$ задане число.

Заміною змінних $y = \frac{x}{h(t)}, t = t$ задачу (1)–(5) зводимо до оберненої відносно невідомих $a(t), h(t), v(y,t)$ в області зі сталими межами $Q_T = \{(y,t)\colon 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(t)t^{\beta}}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t),\ (y,t) \in Q_T, \tag{6}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)),\ 0 \le y \le 1, \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), v(1,t) = \mu_2(t),\ 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$\frac{a(t)t^{\beta}}{h(t)} v_y(0,t) = \mu_3(t),\ 0 \le t \le T, \tag{9}$$

$$h(t) \int\limits_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t),\ 0 \le t \le T, \tag{10}$$

де $v(y,t) = u(yh(t),t)$.

Означення. Під *розв'язком задачі* (6)–(10) будемо розуміти таку трійку функцій (a,h,v) з класу $C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T), v_y(0,\cdot) \in C(0,T],\ h(t) > 0,$ $a(t) > 0, t \in [0,T]$, яка задовольняє (6)–(10) .

Умови на вихідні дані, за яких існує розв'язок задачі (6)–(10), містяться в наступній теоремі.

Теорема. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^1[0,\infty), \varphi(x) \ge \varphi_0 > 0, x \in [0,\infty),\ \mu_4 \in C^1[0,T], \mu_4(t) > 0, t \in [0,T]$;
2) $\mu_i \in C^1[0,T], \mu_i(t) > 0, t \in [0,T],\ i = 1,2, f,b,c \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T]), f(x,t) \ge$ $\ge 0, c(x,t) \le 0, (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$;
3) $\mu_3 \in C[0,T], \mu_3(t) > 0, t \in (0,T]$, *існує скінченна границя* $\lim\limits_{t \to +0} \mu_3(t) t^{-\frac{\beta+1}{2}} \equiv$ $\equiv A_0 > 0, f(0,t) - \mu_1'(t) > 0, t \in [0,T], |f(x,t)| \le A_1 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, |b(x,t)| \le A_2 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma},$ $|b_x(x,t)| \le A_3 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, |c(x,t)| \le A_4 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, (x,t) \in [0,+\infty) \times [0,T], |\mu_4'(t)| \le A_5 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma},$ $t \in\in [0,T]$, *де* $A_i, i = \overline{0,5}$ — *деякі додатні сталі,* $\gamma > 0$ — *довільне фіксоване число;*
4) $\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(h(0)) = \mu_2(0)$.

Тоді можна вказати таке число $T_0\colon 0 < T_0 \le T$, *яке визначається вихідними даними задачі (6)–(10), що існує розв'язок цієї задачі при* $y \in [0,1], t \in [0,T_0]$.

Доведення. Для початку встановимо оцінки функції, що задає невідому межу області. Згідно з умовами теореми існує єдиний додатний розв'язок $h_0 \equiv h(0)$ рівняння $\int_0^{h_0} \varphi(x)dx = \mu_4(0)$.

Розглянемо пряму задачу (6)–(8). Згідно з припущеннями теореми та принципом максимуму для розв'язку задачі (6)–(8) [7, с. 25] маємо

$$v(y,t) \geq M_1 > 0, \ (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{11}$$

З умови (10) знаходимо

$$h(t) \leq \frac{1}{M_1} \max_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_1 < \infty, \ t \in [0,T]. \tag{12}$$

Знову застосовуючи принцип максимуму до розв'язку задачі (6)–(8), отримаємо

$$v(y,t) \leq M_2 < \infty, \ (y,t) \in \overline{Q}_T \tag{13}$$

і згідно з умовою (10)

$$h(t) \geq \frac{1}{M_2} \min_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_0 > 0, \ t \in [0,T], \tag{14}$$

де числа M_1, M_2 визначаються вихідними даними задачі (6)–(10).

Зведемо задачу (6)–(10) до системи рівнянь. Позначимо $q(t) \equiv \frac{a(t)}{h^2(t)}, p(t) \equiv h'(t)$, $\omega(y,t) \equiv v_y(y,t)$.

Припустивши тимчасово, що функції $a(t), h(t)$ відомі, пряму задачу (6)–(8) замінимо еквівалентною системою інтегральних рівнянь:

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Bigg[\frac{b(\eta h(\tau),\tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)}\omega(\eta,\tau) +$$
$$+c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\Bigg]d\eta d\tau, \ (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{15}$$

$$\omega(y,t) = \omega_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Bigg[\frac{b(\eta h(\tau),\tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)}\omega(\eta,\tau) +$$
$$+c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\Bigg]d\eta d\tau, \ (y,t) \in Q_T, \tag{16}$$

де $G_k(y,t,\eta,\tau), k = 1,2$ — функції Гріна першої ($k = 1$) та другої ($k = 2$) крайових задач для рівняння

$$v_t = q(t)t^\beta v_{yy} + f(yh(t),t). \tag{17}$$

Вони визначаються формулою

$$G_k(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t) - \theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Bigg(\exp\Bigg(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Bigg) +$$
$$+(-1)^k \exp\Bigg(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Bigg)\Bigg), k = 1,2, \text{ де } \theta(t) = \int_0^t q(\tau)\tau^\beta d\tau. \tag{18}$$

Через $v_0(y,t)$ позначено розв'язок рівняння (17) з умовами (7), (8), який має вигляд

$$v_0(y,t)=\int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\varphi(\eta h_0)d\eta+\int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\tau^\beta q(\tau)\mu_1(\tau)d\tau-$$
$$-\int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\tau^\beta q(\tau)\mu_2(\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)f(\eta h(\tau),\tau)d\eta d\tau. \qquad (19)$$

Продиференціюємо (19) по y, використовуючи властивості функцій Гріна $G_{1y}=-G_{2\eta}$, $G_{2\tau}=-\tau^\beta q(\tau)G_{2\eta\eta}$ та інтегрування частинами:

$$\omega_0(y,t)=h_0\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta+\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau+$$
$$+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h(\tau),\tau))d\tau+\int_0^t\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)h(\tau)f_\eta(\eta h(\tau),\tau)d\eta d\tau. \qquad (20)$$

З умов (9) і (10) одержуємо

$$h(t)=\frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy},\quad t\in[0,T], \qquad (21)$$

$$q(t)t^\beta\omega(0,t)=\frac{\mu_3(t)}{h(t)},\quad t\in[0,T]. \qquad (22)$$

Диференціюючи (10) за змінною t, знаходимо

$$p(t)=\Big(\mu_4'(t)-t^\beta q(t)h(t)(\omega(1,t)-\omega(0,t))-b(h(t),t)\mu_2(t)+b(0,t)\mu_1(t)+$$
$$+h(t)\int_0^1\big[(b_x(yh(t),t)-c(yh(t),t))v(y,t)-f(yh(t),t)\big]dy\Big)\mu_2^{-1}(t),\quad t\in[0,T]. \qquad (23)$$

Таким чином, задача (6)–(10) зведена до системи рівнянь (15), (16), (21)–(23). Це означає, що, якщо $(a(t),h(t),v(y,t))$ — розв'язок задачі (6)–(10), то функції $h(t)$, $q(t)=\frac{a(t)}{h^2(t)},p(t)=h'(t),v(y,t),\omega(y,t)=v_y(y,t)$ задовольняють систему рівнянь (15), (16), (21)–(23).

Те, що правильним є і зворотнє твердження: якщо $(q,h,p,v,\omega)\in(C[0,T])^3\times \times C(\overline{Q}_T)\times C(Q_T)$ є розв'язком системи (15), (16), (21)–(23), то $a\in C[0,T],h\in C^1[0,T]$, $v\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T),v_y(0,\cdot)\in C(0,T]$ є розв'язком задачі (6)–(10), доводиться як в [6].

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (15), (16), (21)–(23) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків системи. Враховуючи еквівалентність задачі (6)–(10) та системи рівнянь (15), (16), (21)–(23), для функцій $v(y,t)$ та $h(t)$ правильні вище встановлені оцінки (11)–(14). Тому залишилось оцінити функції $p(t),q(t),\omega(y,t)$.

Для початку визначимо поведінку функції $\omega(y,t)$ при $t\to+0$. Позначимо

$$W(t)=\max_{y\in[0,1]}|\omega(y,t)|,\ h_{\min}(t)=\min_{0\le\tau\le t}h(\tau),\ h_{\max}(t)=\max_{0\le\tau\le t}h(\tau),$$
$$q_{\min}(t)=\min_{0\le\tau\le t}q(\tau),\ q_{\max}(t)=\max_{0\le\tau\le t}q(\tau).$$

З рівності $\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)d\eta=1$ одержуємо, що перший та четвертий інтег- рали з (20) обмежені сталими, які визначаються вихідними даними задачі (6)–(10):

$$\left|\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta\right|\le C_1,\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)h(\tau)f_\eta(\eta h(\tau),\tau)d\eta d\tau\right|\le C_2. \quad (24)$$

Для оцінки двох інших доданків використаємо відому оцінку функції Гріна [8, с.12]:

$$G_2(y,t,\eta,\tau)\le C_3+\frac{C_4}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \quad (25)$$

Остаточно маємо

$$|\omega_0(y,t)|\le C_5+C_6\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \quad (26)$$

Беручи до уваги нерівність

$$\int\limits_0^1|G_{1y}(y,t,\eta,\tau)|d\eta\le\frac{C_7}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \quad (27)$$

з рівняння (16) знаходимо

$$\begin{aligned}W(t)\ \ \le\ \ & C_5+C_6\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}+C_8\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau+\\ &+C_9\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+|p(\tau)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau,\ (y,t)\in Q_T. \quad (28)\end{aligned}$$

Для оцінки $p(t)$ використаємо припущення теореми та рівняння (23):

$$|p(t)|\le C_{10}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+C_{11}q(t)t^\beta W(t),\quad t\in[0,T]. \quad (29)$$

Оцінимо інтеграл

$$\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\le\frac{C_{12}}{\sqrt{q_{min}(t)}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\le\frac{C_{13}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}. \quad (30)$$

Підставляючи (29), (30) у (28), одержимо

$$\begin{aligned}W(t)\ \ \le\ \ & C_5+\frac{C_{14}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}+\frac{C_{15}t^\gamma}{\sqrt{q_{min}(t)}}+\frac{C_{16}}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\\ &+\frac{C_{17}q_{max}(t)}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}\int\limits_0^t\frac{\tau^\beta W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau, \quad (31)\end{aligned}$$

звідки робимо висновок, що $\omega(y,t)$ поводить себе як $t^{\frac{1-\beta}{2}}$ при $t \to +0$.

Оцінимо $\omega(0,t)$ знизу. Оскільки $G_2(0,t,1,\tau) \le C_{18}$, то з (16), (20) і (24) випливає

$$\begin{aligned} \omega(0,t) \ \ge \ & \int_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau - C_{19} - C_{20}\int_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau - \\ & -C_{21}\int_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+|p(\tau)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau,\ t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{32}$$

Для оцінки першого інтеграла останньої нерівності використаємо (18):

$$\int_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\Big)d\tau \ge \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau.$$

Враховуючи поведінку $W(t)$ при $t \to +0$, робимо висновок, що особливості двох інших інтегралів з (32) є меншими за особливість першого, тому для довільного фіксованого $r\colon 0<r<1$ існує таке число $t_1\colon 0<t_1\le T$, що

$$\begin{aligned} C_{19} + C_{20}\int_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{21}\int_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+|p(\tau)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau \le \\ \le \frac{r}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau, \quad t\in[0,t_1]. \end{aligned} \tag{33}$$

Тоді з (32) випливає

$$\omega(0,t) \ge \frac{1-r}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau, \quad t\in[0,t_1]. \tag{34}$$

Використаємо (34) для оцінки $q(t)$ зверху, виходячи з рівняння (22):

$$\begin{aligned} q(t) \le & \frac{\mu_3(t)}{\frac{1-r}{\sqrt{\pi}}\ t^{\beta}h(t)\int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau} \le \\ \le & \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)\sqrt{q_{\max}(t)}}{(1-r)\sqrt{1+\beta}\ t^{\beta}h_{\min}(t)\ \int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau}, \quad t\in[0,t_1]. \end{aligned} \tag{35}$$

Введемо позначення

$$K(t) \equiv \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\sqrt{1+\beta}\ t^{\beta}\int_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau}. \tag{36}$$

Умови теореми забезпечують неперервність та додатність $K(t)$ на (0,T]. Використовуючи теорему про середнє та заміну змінних $z=\frac{\tau}{t}$, доведемо існування границі

$$\lim_{t\to+0}K(t)=\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\sqrt{1+\beta}t^{\beta}(f(0,\widetilde{t})-\mu_1'(\widetilde{t}))\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t^{1+\beta}-\tau^{1+\beta}}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{1+\beta}}\frac{A_0}{(f(0,0)-\mu_1'(0))I_1}>0,$$

де $\widetilde{t}\in[0,T], I_1=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}}$.

Таким чином, враховуючи (36), з (35) матимемо

$$q(t)\le\frac{K(t)}{(1-r)h_{\min}(t)}\sqrt{q_{\max}(t)},\ \text{або}\ q_{\max}(t)\le\frac{K^2_{\max}(t)}{(1-r)^2h^2_{\min}(t)},\tag{37}$$

де $K_{\max}(t)=\max_{0\le\tau\le t}K(\tau)$. Остаточно одержуємо

$$q(t)\le B_1,\ t\in[0,t_1],\ \text{де}\ B_1=\frac{K^2_{\max}(T)}{(1-r)^2h^2_{\min}(T)}.\tag{38}$$

Для того, щоб знайти оцінку $q(t)$ знизу, оцінимо функцію $\omega(0,t)$ зверху, виходячи з (16), (20):

$$\omega(0,t)\le C_{22}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau+C_{23}\int_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau+$$
$$+C_{24}\int_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+|p(\tau)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau.\tag{39}$$

Підставляючи (29), (39) в (22) і враховуючи (38), отримаємо

$$q(t)\ge\frac{K(t)\sqrt{q_{\min}(t)}}{h_{\max}(t)}\Bigg(C_{25}t^{\frac{\beta-1}{2}}+1+C_{26}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+C_{27}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau+$$
$$+C_{28}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int_0^t\frac{\tau^{\beta}W^2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau\Bigg)^{-1}\ge\frac{K(t)\sqrt{q_{\min}(t)}}{(1+r)h_{\max}(t)},\ t\in[0,t_2],\tag{40}$$

де число $t_2\colon 0<t_2\le T$ таке, що задовольняється нерівність

$$C_{25}t^{\frac{\beta-1}{2}}+C_{26}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+C_{27}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau+C_{28}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int_0^t\frac{\tau^{\beta}W^2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau\le$$
$$\le C_{25}t^{\frac{\beta-1}{2}}+C_{26}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+C_{29}t^{\gamma}+C_{30}t\le r,\ t\in[0,t_2].$$

Тоді

$$q_{\min}(t)\ge\frac{K^2_{\min}(t)}{(1+r)^2h^2_{\max}(t)},\ \ \text{де}\ K_{\min}(t)=\min_{0\le\tau\le t}K(\tau),\tag{41}$$

або

$$q(t) \geq B_0, \ t \in [0, t_2], \text{ де } B_0 = \frac{K_{\min}^2(T)}{(1+r)^2 h_{\max}^2(T)} > 0. \tag{42}$$

Оцінки (38), (42) використаємо для оцінки функції $W(t)$, виходячи з (31):

$$W(t) \leq C_5 + \frac{C_{31}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + C_{32}t^{\gamma} + \frac{C_{33}}{t^{\frac{\beta}{2}}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} W(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \frac{C_{34}}{t^{\frac{\beta}{2}}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\beta} W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \tag{43}$$

Домножимо обидві частини нерівності (43) на $t^{\frac{\beta-1}{2}}$ і покладемо $W_1(t) = W(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}$. Одержимо

$$W_1(t) = C_5 t^{\frac{\beta-1}{2}} + C_{31} + C_{32} t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + C_{33} t^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma} W_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + C_{34} t^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \tag{44}$$

Нехай $\gamma \leq 1$. Тоді $W_1(t) = C_{35} + C_{36} t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{\tau^{\gamma}(W_1(\tau)+1)^2}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$, або, позначивши $W_2(t) = W_1(t) + 1$,

$$W_2(t) \leq C_{37} + \frac{C_{38}}{\sqrt{t}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma} W_2^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \tag{45}$$

Піднесемо обидві частини (45) до квадрату, використовуючи при цьому нерівності Коші та Коші-Буняковського $W_2^2(t) \leq 2C_{37}^2 + 2C_{38}^2 t^{\gamma+\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{\tau^{\gamma-1} W_2^4(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$. В останній нерівності змінимо t на σ і, домноживши на $\frac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$, проінтегруємо її по σ від 0 до t:

$$\int\limits_0^t \frac{W_2^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}} d\sigma \leq C_{39}\sqrt{t} + C_{40} t^{\gamma+\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \tau^{\gamma-1} W_2^4(\tau) d\tau.$$

Використовуючи останню нерівність в (45), знаходимо

$$W_2(t) \leq C_{41} + C_{42} \int\limits_0^t \frac{W_2^4(\tau)}{\tau^{1-\gamma}} d\tau. \tag{46}$$

Позначимо

$$\chi(t) = C_{41} + C_{42} \int\limits_0^t \frac{W_2^4(\tau)}{\tau^{1-\gamma}} d\tau. \tag{47}$$

Тоді з (46) отримаємо $W_2(t) \leq \chi(t)$. Продиференціювавши (47) і використавши останню нерівність, одержимо $\chi'(t) \leq \frac{C_{42}}{t^{1-\gamma}} \chi^4(t)$, звідки $\chi(t) \leq \frac{C_{41}\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{\gamma - 3C_{41}^3 C_{42} t^{\gamma}}}$. Вибираючи число $t_3, 0 < t_3 \leq T$ так, щоб $\gamma - 3C_{41}^3 C_{42} t_3^{\gamma} > 0$, матимемо $\chi(t) \leq M_3$, або $W_2(t) \leq M_3, t \in [0, t_3]$. У випадку $\gamma > 1$ нерівність (44) зводиться до вигляду

$$W_2(t) \leq C_{43} + C_{44} \int\limits_0^t \frac{W_2^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$

звідки, застосовуючи ті ж міркування, що й при розв'язанні (45), знаходимо $W_2(t) \leq M_4, t \in [0, t_4]$, де число $t_4, 0 < t_4 \leq T$ визначається сталими C_{43}, C_{44}. Отже,

$$|\omega(y,t)| \leq \frac{M_5}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \ (y,t) \in [0,1] \times (0, t_5], \quad |p(t)| \leq M_6 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, \ t \in [0, t_5], \tag{48}$$

де $M_5 = \max\{M_3, M_4\}, t_5 = \min\{t_3, t_4\}$. Зауважимо, що згідно з (34) і (37)

$$\omega(0,t) \geq \frac{M_7}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, t \in (0, t_5]. \tag{49}$$

Таким чином встановлено апріорні оцінки розв'язків системи (15), (16), (21)–(23). Введемо нову функцію $\widetilde{\omega}(y,t) = \omega(y,t)t^{\frac{\beta-1}{2}}$ і подамо систему (15), (16), (21)–(23) у вигляді

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Bigg[\frac{b(\eta h(\tau),\tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)}\frac{\widetilde{\omega}(\eta,\tau)}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}} +$$

$$+ c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\Bigg]d\eta d\tau,\ (y,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{50}$$

$$\widetilde{\omega}(y,t) = \omega_0(y,t)t^{\frac{\beta-1}{2}} + t^{\frac{\beta-1}{2}}\int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Bigg[\frac{b(\eta h(\tau),\tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)}\frac{\widetilde{\omega}(\eta,\tau)}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}} +$$

$$+ c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\Bigg]d\eta d\tau,\ (y,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{51}$$

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy},\ t \in [0, t_0], \tag{52}$$

$$q(t) = \frac{\mu_3(t)}{h(t)t^{\frac{\beta+1}{2}}\widetilde{\omega}(0,t)},\ t \in [0, t_0], \tag{53}$$

$$p(t) = \Bigg(\mu_4'(t) - t^{\frac{\beta+1}{2}}q(t)h(t)(\widetilde{\omega}(1,t) - \widetilde{\omega}(0,t)) - b(h(t),t)\mu_2(t) + b(0,t)\mu_1(t) +$$

$$+ h(t)\int_0^1 \big(b_x(yh(t),t)v(y,t) - c(yh(t),t)v(y,t) - f(yh(t),t)\big)dy\Bigg)\mu_2^{-1}(t),\ t \in [0, t_0], \tag{54}$$

де $v_0(y,t), \omega_0(y.t)$ визначаються рівностями (19), (20), а $t_0 = \min\{t_1, t_2, t_5\}$. Систему (50)–(54) подамо у вигляді операторного рівняння $w = Pw$, де $w = (v, \widetilde{\omega}, h, q, p)$, а оператор $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ визначається правими частинами рівнянь (50)–(54).

Візьмемо довільні $(v, \widetilde{\omega}, h, q, p)$, для яких справедливі оцінки (11)–(14), (38), (42), (48). Оцінимо праву частину рівняння (51), використовуючи при цьому (24)–(26), (30) $|P_2\widetilde{\omega}| \leq C_{45} + C_{46}t^{\frac{\beta-1}{2}} + C_{47}t^{\gamma} + C_{48}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$. Зауважимо, що в отриманій оцінці маємо $C_{45} < M_5$. Вибираючи число $t_6, 0 < t_6 \leq T$ так, щоб виконувалась нерівність $C_{45} + C_{46}t_6^{\frac{\beta-1}{2}} + C_{47}t_6^{\gamma} + C_{48}t_6^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} \leq M_5$, отримаємо

$$|P_2\widetilde{\omega}| \leq M_5,\ (y,t) \in [0,1] \times [0, t_6]. \tag{55}$$

Аналогічно оцінюються й праві частини рівнянь (50), (52)–(54).

Визначимо множину

$$N = \{(v, \widetilde{\omega}, h, q, p) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^3 \colon M_1 \leq v(y,t) \leq M_2, |\widetilde{\omega}(y,t)| \leq M_5,$$

$$H_0 \leq h(t) \leq H_1, B_0 \leq q(t) \leq B_1, |p(t)| \leq M_6 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, \widetilde{\omega}(0,t) \geq M_7 > 0\},$$

де $T_0 = \min\{t_0, t_6\}$. Очевидно, що множина N замкнена і опукла і, згідно з вище наведеними міркуваннями, оператор P переводить її в себе. Таким чином, множина N задовольняє умови теореми Шаудера. Те, що оператор P цілком неперервний, доводиться як в [3] і [8]. Тоді, згідно з теоремою Шаудера, існує неперервний розв'язок системи (50)–(54), а, отже, і розв'язок задачі (6)–(10) при $y \in [0,1], t \in [0, T_0]$, .

Теорему доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Гаджиев М. М. *Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения*// Применение методов функц. анал. в уравнениях мат. физ. – Новосибирск. – 1987. – С.66–71.
2. Елдесбаев Т. *Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка*// Известия АН КазССР. Серия физ.-мат. – 1987. – №3. – С.27–29.
3. Іванчов М. І., Салдіна Н. В. *Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням*// Укр. мат. журн. – 2006. – Т.58, №11. – С.1487–1500.
4. De Lillo S., Salvatori M. C. *A two-phase free boundary problem for the nonlinear heat equation*// Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2004. – V.11, №1. – P.134–140.
5. Li Huilai. *A degenerate Stefan problem with two free boundaries*// Northeast Math. J. – 1995. – V.11, №3. – P.263–274.
6. Гринців Н. М. *Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею*// Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип.66. – С.45–59.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.
8. Ivanchov M. Inverse problem for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publishers, 2003.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 30.09.2007