УДК 517.5

Б. В. Винницький, М. І. Юрків

ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ ЗРОСТАННЯ ГОЛОМОРФНОЇ В ПІВПЛОЩИНІ ФУНКЦІЇ НЕЦІЛОГО ПОРЯДКУ З НУЛЯМИ НА СКІНЧЕННІЙ СИСТЕМІ ПРОМЕНІВ

B. V. Vynnyts'kyi, M. I. Yurkiv. *On growth regularity of function holomorphic in the half-plane and of non-integer order with zeroes on a finite system of rays*, Mat. Stud. **32** (2009), 148–159.

We introduce a concept of a holomorphic function in the half-plane of improved regular growth of non-integer order. We found a criterion for this regularity when zeroes are located on a finite system of rays.

Б. В. Винницкий, М. И. Юркив. *О регулярности роста голоморфной в полуплоскости функции нецелого порядка с нулями на конечной системе лучей* // Мат. Студії. – 2009. – Т.32, №2. – С.148–159.

Введено понятие голоморфной функции улучшенного регулярного роста нецелого порядка и найден критерий такого роста в случае, когда нули расположены на конечной системе лучей.

Як добре відомо [1, с.40], голоморфна у півплощині $\mathbb{C}^+ = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ функція $f \not\equiv 0$ нецілого формального порядку $\rho \in (0; +\infty)$, тобто така, що $\ln|f(z)| \le c|z|^\rho + c$ для деякої сталої c і всіх $z \in \mathbb{C}^+$, подається у вигляді

$$f(z) = \exp\left\{ i\sum_{k=0}^{q} b_k z^k + \frac{1}{\pi i}\left(\int_{-1}^{1} \frac{\ln|f_0(t)|}{t-z}dt + \int_{-1}^{1} \frac{ds(t)}{t-z} \right) \right\} \prod_{|\lambda_n|<1} \frac{z-\lambda_n}{z-\overline{\lambda}_n}$$

$$\times \exp\left\{ \frac{z^{q+1}}{\pi i}\left(\int_{|t|\ge 1} \frac{\ln|f_0(t)|}{t^{q+1}(t-z)}dt + \int_{|t|\ge 1} \frac{ds(t)}{t^{q+1}(t-z)} \right) \right\} \prod_{|\lambda_n|\ge 1} D_q(z;\lambda_n), \qquad (1)$$

де $q = [\rho]$, $b_0, ..., b_q$ — дійсні сталі, $s(t)$ — сингулярна межова функція функції f, $D_q(z;\lambda_n) = E(z/\lambda_n; q)/E(z/\overline{\lambda}_n; q)$ і $E(\omega; q) = (1-\omega)\exp(\omega + \omega^2/2 + ... + \omega^q/q)$ — первинний множник Вейєрштрасса роду q. При цьому $f_0(t)$ — кутові межові значення на дійсній осі функції f, $f_0 \in L^\infty[a; b]$ для кожного проміжка $[a; b] \subset \mathbb{R}$ і функція $\ln|f_0(t)|$ є локально інтегровною на $\mathbb{R}$.

В теорії голоморфних функцій цілком регулярного зростання М. В. Говорова [1] встановлюються, зокрема, необхідні і достатні умови, за яких для голоморфної в $\mathbb{C}^+$ функції формального порядку $\rho \in (0; +\infty)$ з індикатором h співвідношення

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = r^\rho h(\varphi) + o(r^\rho),\ E_0 \not\ni r \to +\infty,$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D99.

виконується рівномірно в кожному куті $\{z\colon \delta_0 \le \arg z \le \pi - \delta_0\}$, $\delta_0 \in (0;\pi)$ для деякої множини $E_0 \in [0;+\infty)$ нульової відносної міри (такі функції звуться функціями цілком регулярного зростання у відкритій півплощині $\mathbb{C}^+$).

Нехай $n_j(t)$ — кількість нулів голоморфної в $\mathbb{C}^+$ функції f, які лежать у півкрузі $\{z\colon |z| \le t, \operatorname{Im} z > 0\}$ і належать променю $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $N_j(r) = \int\limits_0^r \frac{n_j(t)}{t}dt$,

$$\tau_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \frac{\ln|f_0(x)|}{x}dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \frac{ds(x)}{x}, \quad \tau_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \frac{\ln|f_0(-x)|}{x}dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \frac{ds(-x)}{x}.$$

Через $c_1, c_2, c_3, \ldots$ позначимо деякі додатні сталі. З результатів М. В. Говорова [1, с.81-82] випливає наступне твердження.

Теорема А. *Нехай нулі голоморфної в $\mathbb{C}^+$ функції $f \not\equiv 0$ нецілого формального порядку $\rho \in (0;+\infty)$ лежать на скінченій системі променів $\{z\colon \arg\varphi = \psi_j\}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, $0 < \psi_1 < \ldots < \psi_m < \pi$. Для того щоб f була функцією цілком регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$, необхідно і досить щоб для деяких $l_1 \in \mathbb{R}$, $l_2 \in \mathbb{R}$, $\Delta_j \in [0;\ +\infty)$ і кожного $j \in \{1,\ldots,m\}$ виконувалось*

$$\tau_1(r) = l_1 r^\rho + o(r^\rho), \quad \tau_2(r) = l_2 r^\rho + o(r^\rho), \quad r \to +\infty,$$

$$n_j(r) = \Delta_j r^\rho + o(r^\rho), \quad r \to +\infty.$$

Ми розглядаємо, подібно до [3], голоморфні в півплощині функції з тоншими асимптотичними властивостями.

Функцію f, голоморфну в $\mathbb{C}^+$, назвемо функцією покращеного регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$, якщо за деяких $\rho_2 \in (0;\rho)$ і тригонометрично ρ-опуклої функції $h\colon (0;\ \pi) \to \mathbb{R}$ знайдеться така множина U, яка міститься в об'єднанні кругів $U_s(a_s, \widetilde{\tau}_s) = \{z\colon\ |z - a_s| < \widetilde{\tau}_s\}$, $s \in \mathbb{N}$ зі скінченою сумою радіусів S, що

$$\ln|f(z)| = |z|^\rho h(\varphi) + O\left(\frac{|z|^{\rho_2}}{\sin\varphi}\right), \quad \mathbb{C}^+ \backslash U \ni z = re^{i\varphi} \to \infty. \tag{2}$$

Метою даної статті є доведення наступного твердження, яке є аналогом результатів М. В. Говорова [1, с. 81] у частковому випадку, коли нулі зосереджені на скінченній системі променів, та Р. В. Хаця [3, с. 32].

Теорема 1. *Для того щоб голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція $f \not\equiv 0$ нецілого формального порядку $\rho \in (0;+\infty)$, нулі якої розміщені на скінченій системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, $0 < \psi_1 < \ldots < \psi_m < \pi$, була функцією покращеного регулярного зростання, необхідно і досить щоб для деяких $l_1 \in \mathbb{R}$, $l_2 \in \mathbb{R}$, $\Delta_j \in [0;\ +\infty)$, $\rho_1 \in (0;\rho)$ і кожного $j \in \{1,\ldots,m\}$ виконувались умови*

$$\tau_1(r) = l_1 r^\rho + O(r^{\rho_1}), \quad \tau_2(r) = l_2 r^\rho + O(r^{\rho_1}), \quad r \to +\infty, \tag{3}$$

$$n_j(r) = \Delta_j r^\rho + O(r^{\rho_1}), \quad r \to +\infty. \tag{4}$$

Для доведення теореми потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай* $\rho \in (0;+\infty)$ *— неціле число,* $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— незростаюча на* $\mathbb{R}$ *функція, похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь,* $f_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *— така функція, що функція* $\ln|f_0(x)|$ *є локально інтегровною на* $\mathbb{R}$ *і* $f_0 \in L^\infty[a;b]$ *для кожного проміжка* $[a;b] \subset \mathbb{R}$, (λ_n) *— послідовність точок з півплощини* $\mathbb{C}^+$, *які лежать на скінченній кількості променів* $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1,...,m\}$, $0 < \psi_1 < ... < \psi_m < \pi$. *Тоді якщо*

$$\sum_{0<|\lambda_n|\le 1} \operatorname{Im}\lambda_n < +\infty, \tag{5}$$

і для деяких $l_1 \in \mathbb{R}$, $l_2 \in \mathbb{R}$, $\Delta_j \in [0;+\infty)$ *та для деякого* $\rho_1 \in (0;\rho)$, $0 < q < \rho_1 < \rho < q+1$ *виконуються рівності (3)–(4), то функція* f, *визначена формулою (1), є голоморфною в* $\mathbb{C}^+$ *і виконується (2) з функцією* h, *визначеною рівністю*

$$h(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} h_i(\varphi) - \frac{2\pi\rho l_1}{\sin\pi\rho}\sin\rho(\varphi-\pi) + \frac{2\pi\rho l_2}{\sin\pi\rho}\sin\rho\varphi, \tag{6}$$

де

$$h_i(\varphi) = \widehat{h}_i(\varphi) - \widetilde{h}_i(\varphi),$$

$$\widehat{h}_i(\varphi) = \frac{\pi\Delta_i}{\sin\pi\rho}\cos\rho(|\,\varphi-\psi_i\,|-\pi), \quad \widetilde{h}_i(\varphi) = \frac{\pi\Delta_i}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\varphi+\psi_i-\pi). \tag{7}$$

Якщо, крім цього, $|f_0(t)| \le \exp(c|t|^\rho)$ *для майже всіх* $t \in \mathbb{R}$, *то функція* f *має формальний порядок* $\rho \in (0;+\infty)$.

Доведення. Нехай

$$F_0(z) = \exp\left\{i\sum_{k=0}^{q} b_k z^k\right\}\widetilde{F}_0(z),$$

$$\widetilde{F}_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\ln|f_0(t)|}{t-z}dt + \int_{-1}^{1}\frac{ds(t)}{t-z}\right)\right\}\prod_{|\lambda_n|<1}\frac{z-\lambda_n}{z-\overline{\lambda}_n},$$

$$F_1(z) = \exp\left\{\frac{z^{q+1}}{\pi i}\left(\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln|f_0(t)|}{t^{q+1}(t-z)}dt + \int_{1}^{+\infty}\frac{ds(t)}{t^{q+1}(t-z)}\right)\right\},$$

$$F_2(z) = \exp\left\{\frac{z^{q+1}}{\pi i}\left(\int_{-\infty}^{-1}\frac{\ln|f_0(t)|}{t^{q+1}(t-z)}dt + \int_{-\infty}^{-1}\frac{ds(t)}{t^{q+1}(t-z)}\right)\right\},$$

$$F_3(z) = \prod_{j=1}^{m} L_j(z)/\widetilde{L_j}(z), \tag{8}$$

де

$$L_j(z) = \prod_{|\lambda_n|\ge 1, \arg\lambda_n=\psi_j} E(z/\lambda_n;q), \quad \widetilde{L_j}(z) = \prod_{|\lambda_n|\ge 1, \arg\lambda_n=\psi_j} E(z/\bar{\lambda}_n;q).$$

Тоді

$$f(z) = F_0(z)F_1(z)F_2(z)F_3(z), \tag{9}$$

Оскільки $q < \rho_1$ і, згідо з відомою факторизаційною теоремою [1, с. 30], функція $\widetilde{F}_0(z)$ є обмеженою у верхній півплощині і її нулі лежать в крузі $\{z\colon |z| \le 1\}$, то

$$\ln|F_0(z)| = O(|z|^{\rho_1}), \quad \mathbb{C}^+ \ni z \to \infty. \tag{10}$$

Далі, подібно як в [1, с.76], враховуючи (3), за допомогою інтегрування частинами отримаємо

$$\ln F_1(z) = -2iz^{q+1}\int\limits_1^{+\infty} \frac{d\tau_1(t)}{t^q(t-z)} = -2iz^{q+1}\left(-\frac{\tau_1(1)}{1-z} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{(t^q(t-z))'\,\tau_1(t)dt}{t^{2q}(t-z)^2}\right) =$$

$$= -2iz^{q+1}\left(-\frac{\tau_1(1)}{1-z} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{(t^q(t-z))'\,(l_1t^\rho + \chi(t))dt}{t^{2q}(t-z)^2}\right) =$$

$$= -2iz^{q+1}\left(\frac{l_1-\tau_1(1)}{1-z} + \left(\int\limits_0^{+\infty} - \int\limits_0^{1}\right)\frac{l_1\rho t^{\rho-1}dt}{t^q(t-z)} + \int\limits_1^{+\infty}\frac{\chi(t)((q+1)t-qz)}{t^{q+1}(t-z)^2}dt\right) =$$

$$= I_{1.1} + I_{1.2} + O(r^q), \quad \mathbb{C}^+ \ni z \to \infty, \tag{11}$$

де

$$I_{1.1} = -2iz^{q+1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{l_1\rho t^{\rho-1}}{t^q(t-z)}dt,$$

$$I_{1.2} = -2iz^{q+1}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\chi(t)((q+1)t-qz)}{t^{q+1}(t-z)^2}dt, \quad \chi(t) = O(t^{\rho_1}), t \to +\infty.$$

Але, згідно з теорією лишків

$$I_{1.1} = -2l_1\rho i z^{q+1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{t^{q+1-\rho}(t-z)} = -\frac{2\pi\rho l_1 e^{-i\rho\pi}}{i\sin\pi\rho}z^\rho, \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Таким чином,

$$\operatorname{Re} I_{1.1} = -\frac{2\pi\rho l_1}{\sin\pi\rho}|z|^\rho \sin\rho(\varphi-\pi), \quad z \in \mathbb{C}^+. \tag{12}$$

Оскільки $|\chi(t)| \le c_1 t^{\rho_1}$, $t \in [0;+\infty)$, то

$$|I_{1.2}| \le 2r^{q+1}c_1\int\limits_1^{+\infty}\frac{|(q+1)t-qz|}{t^{q+1-\rho_1}|t-z|^2}dt \le 2c_1r^{\rho_1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(q+1)u+q}{u^{q+1-\rho_1}|u-e^{i\varphi}|^2}du \le$$

$$\le 2c_1r^{\rho_1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(q+1)u+q}{u^{q+1-\rho_1}(u^2-2u\cos\varphi+1)}du \le \frac{c_2r^{\rho_1}}{\sin\varphi}, \tag{13}$$

бо ([8, с. 311])

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{\mu-1}}{(u^2-2ua\cos\varphi+a^2)}du = -\pi a^{\mu-2}\frac{\sin(\mu-1)(\pi-\varphi)}{\sin\varphi\sin\mu\pi}, 0<\mu<2, a>0, 0<\varphi<2\pi.$$

Тоді з (11)-(13) отримуємо

$$\ln|F_1(z)| = -\frac{2\pi\rho l_1}{\sin\pi\rho}|z|^\rho \sin\rho(\varphi-\pi) + O\left(\frac{|z|^{\rho_1}}{\sin\varphi}\right), \quad z\in\mathbb{C}^+. \tag{14}$$

Аналогічно,

$$\ln|F_2(z)| = \frac{2\pi\rho l_2}{\sin\pi\rho}|z|^\rho \sin\rho\varphi + O\left(\frac{|z|^{\rho_1}}{\sin\varphi}\right), \quad z\in\mathbb{C}^+. \tag{15}$$

Далі, оскільки $F_3(z)$ має вигляд (8), де L_j і $\widetilde{L}_j$ — канонічні добутки, побудовані за нулями функції f, які лежать на променях $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$ і $\{z\colon \arg z = -\psi_j\}$ відповідно і виконується (4), то згідно з [2,с.50-51] і [3, с.32] для деякого $\rho_3\in(0;\rho)$

$$\ln|L_j(z)| = |z|^\rho \widehat{h}_j(\varphi) + O(|z|^{\rho_3}), \quad \mathbb{C}^+\setminus U \ni z\to\infty,$$

$$\ln|\widetilde{L_j}(z)| = |z|^\rho \widetilde{h}_j(\varphi) + O(|z|^{\rho_3}), \quad \mathbb{C}^+\setminus U \ni z\to\infty,$$

де функції $\widehat{h}_j$ і $\widetilde{h}_j$ визначені рівністю (7). Тому

$$\ln|F_3(z)| = \sum_{j=1}^m (\ln|L_j(z)| - \ln|\widetilde{L_j}(z)|) =$$

$$= |z|^\rho \sum_{j=1}^m (\widehat{h}_j(\varphi) - \widetilde{h}_j(\varphi)) + O(|z|^{\rho_3}), \quad \mathbb{C}^+\setminus U \ni z\to\infty. \tag{16}$$

Таким чином, з (9)–(16) отримаємо (2). Крім цього, з результатів Грішина [5, с. 82-83] випливає, що голоморфна у верхній півплощині функція f має нецілий формальний порядок $\rho\in(0;+\infty)$ якщо повна міра має формальний порядок ρ, тобто якщо

$$\sum_{0<|\lambda_n|\le r}\sin\varphi_n + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le r}\frac{\ln^+|f_0(t)|}{|t|+1}dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le r}\frac{\ln^+\frac{1}{|f_0(t)|}}{|t|+1}dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le r}\frac{ds(t)}{|t|+1} <$$

$$< cr^\rho + c, \quad r\in[0;+\infty)$$

а це випливає з (4)–(5), останньої умови леми та нерівності

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le r}\frac{\ln^+\frac{1}{|f_0(t)|}}{|t|+1}dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le r}\frac{ds(t)}{|t|+1} < cr^\rho,$$

яку отримуємо з (3) і рівності $\ln|f| = \ln^+|f| - \ln^+|1/f|$. Лему 1 доведено. □

Зауваження 1. Якщо функція f не має нулів, то у формулі (2) можна взяти $\rho_2=\rho_1$. Можливо, таке ж можна отримати і в загальному випадку. З [2, с. 55-60] випливає, що доданок $O\left(\frac{|z|^{\rho_2}}{\sin\varphi}\right)$ можна замінити на $O\left(\frac{|z|^{\rho_1}\ln|z|}{\sin\varphi}\right)$.

З леми 1 випливає достатність теореми 1. Для доведення необхідності потрібні ще деякі леми.

Лема 2. *Нехай $\rho \in (0; +\infty)$, $\rho_2 \in (0; \rho)$ і голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f є функцією покращеного регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$. Тоді існує послідовність (r_k), така що $0 < r_k \uparrow +\infty, r_{k+1}^{\rho} - r_k^{\rho} = O(r_k^{\rho_2})$, $(k \to +\infty)$ і рівномірно за $\varphi \in (0; \pi)$ виконується*

$$\ln \left| f\left(r_k e^{i\varphi}\right) \right| = r_k^{\rho} h(\varphi) + O\left(\frac{r_k^{\rho_2}}{\sin\varphi}\right), \quad k \to +\infty. \tag{17}$$

Для доведення леми досить зауважити, що для кожної множини $U \subset \mathbb{C}$, яка міститься в об'єднанні кругів зі скінченою сумою радіусів, існує [3, с.33] така послідовність (r_k), що $0 < r_k \uparrow +\infty, r_{k+1}^{\rho} - r_k^{\rho} = O(r_k^{\rho_2})$, $(k \to +\infty)$ і кола $|z| = r_k$ лежать поза U.

Лема 3. *Якщо голоморфна функція f нецілого формального порядку $\rho \in (0; +\infty)$, нулі якої лежать на скінченій системі променів, є функцією покращеного регулярного зростання, то для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$ в кожному куті $\mathbb{C}[\varphi_j; \tilde{\varphi}_j] = \{z \colon \varphi_j \le \arg z \le \tilde{\varphi}_j\}$, $\psi_j < \varphi_j < \tilde{\varphi}_j < \psi_{j+1}$, $j \in \{1, ..., m\}$, $\psi_0 := 0$, $\psi_{m+1} := \pi$, справедлива асимптотична оцінка*

$$\ln |f(z)| \ge |z|^{\rho} h(\varphi) + O\left(|z|^{\rho_2}\right), \quad z \to \infty, \tag{18}$$

Доведення. Нехай

$$\psi_{j+1} - \psi_j \le \min\{\pi, \pi/\rho\}. \tag{19}$$

Оскільки сума радіусів виняткових кругів U_s, $s \in \mathbb{N}$, які знаходяться в області $G_k = \{z\colon\ |z| > r_k\} \cap \{z \colon \psi_j < \arg z < \psi_{j+1}\}$, прямує до 0, коли $k \to +\infty$, де (r_k) — послідовність з леми 2, то можна провести два промені $\arg z = \varphi_j$ і $\arg z = \tilde{\varphi}_j$, $\psi_j < \varphi_j < \tilde{\varphi}_j < \psi_{j+1}$, які виняткові круги в розглядуваній області не будуть перетинати, причому для великих k числа φ_j і $\tilde{\varphi}_j$ можна вибрати довільно близько до ψ_j і ψ_{j+1} відповідно. Отже, за деякої сталої $c_3 > 0$ на півколах $\partial Q(0; r_k) = \{z\colon\ |z| = r_k, \operatorname{Im} z > 0\}$ і на променях $\arg z = \varphi_j$ і $\arg z = \tilde{\varphi}_j$ справедлива оцінка

$$|f(z)| \ge \exp\left(|z|^{\rho} h(\varphi) - c_3 |z|^{\rho_2}\right), \quad z \to \infty.$$

Далі, розглянемо функцію $F(z) = V(z)/f(z)$

$$V(z) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{\pi\Delta_j}{\sin\pi\rho}\left(\left(ze^{-i(\pi+\psi_j)}\right)_0^{\rho} - \left(ze^{-i(\pi-\psi_j)}\right)_0^{\rho}\right)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{2\pi\rho l_1}{\sin\pi\rho} e^{i\pi/2}\left(ze^{-i\pi}\right)_0^{\rho} - \frac{2\pi\rho l_2}{\sin\pi\rho} e^{i\pi/2}(z)_0^{\rho} - c_4\left(ze^{-i\psi}\right)_0^{\rho_2}\right\},$$

де c_4 — достатньо велика стала, $(ze^{-i(\pi+\psi_j)})_0^{\rho} = |z|^{\rho}(\cos\rho(\varphi - \psi_j - \pi) + i\sin\rho(\varphi - \psi_j - \pi))$ — однозначна гілка функції $\left(ze^{-i(\pi+\psi_j)}\right)^{\rho}$ в куті $\{z\colon \psi_j < \arg z < \psi_{j+1}\}$, $\left(ze^{-i(\pi-\psi_j)}\right)_0^{\rho} = |z|^{\rho}(\cos\rho(\varphi + \psi_j - \pi) + i\sin\rho(\varphi + \psi_j - \pi))$ — однозначна гілка відповідної багатозначної функції в цьому куті, $\left(ze^{-i\psi}\right)_0^{\rho_2} = |z|^{\rho_2}(\cos\rho_2(\varphi - \psi) + i\sin\rho_2(\varphi - \psi))$ - однозначна гілка функції $\left(ze^{-i\psi}\right)^{\rho_2}$ в цьому ж куті, причому $\psi = (\psi_{j+1} + \psi_j)/2$. Крім цього, $(z)_0^{\rho} = |z|^{\rho}(\cos\rho\varphi + i\sin\rho\varphi)$ і $(ze^{-i\pi})_0^{\rho} = |z|^{\rho}(\cos\rho(\varphi - \pi) + i\sin\rho(\varphi - \pi))$. Тоді

$$|V(z)| = \exp(|z|^{\rho} h(\varphi) - c_4 |z|^{\rho_2}\cos\rho_2(\varphi - \psi)).$$

Тому, взявши достатньо велику сталу c_4, переконуємось, що функція F є обмеженою незалежною від k сталою c_3 на межі області $D_k = \{z\colon r_k < |z| < r_{k+1}, \operatorname{Im} z > 0\} \cap \{z\colon \varphi_j \le$

$\arg z \le \tilde{\varphi}_j\}$. Звідси, застосовуючи принцип максимуму до кожної області D_k, $k \in \mathbb{N}$, приходимо до висновку, що функція F є обмеженою в кожному куті $\mathbb{C}\left[\varphi_j; \tilde{\varphi}_j\right]$, деякою сталою c_5. Отже, в таких кутах справедлива асимптотична оцінка

$$|f(z)| \ge (1/c_5) \exp\left(|z|^\rho h(\varphi) - c_4 |z|^{\rho_2}\right), \quad z \to \infty.$$

Звідси отримуємо (18). Якщо умова (19) не виконується, то в куті $\{z\colon \psi_j < \arg z < \psi_{j+1}\}$ проведемо додаткові промені $\{z\colon \arg z = \psi_i\}$, $\psi_j < \psi_i < \psi_{j+1}$ так, щоб для нової сукупності променів $\{\psi_k\}$ виконувалась умова (19). Тоді, проводячи наведені вище міркування до кожного такого кута, прийдемо до потрібного твердження. Лему 3 доведено. □

Лема 4. *Якщо голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f нецілого формального порядку $\rho \in (0; +\infty)$ задовольняє умову (2), то для деякого $\rho_4 \in (0; \rho)$ рівномірно за $\varphi \in (0; \pi)$ виконується:*

$$\int_1^r \ln\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right| \frac{dt}{t} \le \frac{r^\rho}{\rho} h(\varphi) + O\left(\frac{r^{\rho_4}}{\sin\varphi}\right), \quad r \to +\infty. \tag{20}$$

Доведення. Нехай $U^* = \bigcup\limits_{s \in \mathrm{N}} U_s^*$, $U_s^* = [|a_s| - \widetilde{\tau}_s; |a_s| + \widetilde{\tau}_s]$. Маємо

$$\int_1^r \ln\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right| \frac{dt}{t} = \int\limits_{[1;\, r] \setminus U^*} \frac{\ln\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right|}{t} dt + \int\limits_{[1;\, r] \cap U^*} \frac{\ln\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right|}{t} dt. \tag{21}$$

Завдяки (2) для першого інтеграла з правої частини (21) маємо

$$\int\limits_{[1;\, r] \setminus U^*} \frac{\ln\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right|}{t} dt \le \int\limits_{[1;\, r] \setminus U^*} h(\varphi)\, t^{\rho-1} dt + \int\limits_{[1;\, r] \setminus U^*} \frac{c_6 t^{\rho_2 - 1}}{\sin\varphi} dt \le$$

$$\le h(\varphi) \int_1^r t^{\rho-1} dt - h(\varphi) \int\limits_{[1;\, r] \cap U^*} t^{\rho-1} dt + \frac{c_6}{\sin\varphi} \int_1^r t^{\rho_2 - 1} dt \le$$

$$\le \frac{h(\varphi)}{\rho} r^\rho + \frac{c_7}{\sin\varphi} r^{\rho_2} + |h(\varphi)| \begin{cases} r^{\rho-1} \int\limits_{U^*} dt, & \rho \ge 1, \\ \int\limits_{U^*} dt, & \rho < 1. \end{cases} \tag{22}$$

Оскільки функція f має формальний порядок $\rho \in (0; +\infty)$, то $\ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| \le c_8 r^\rho + c_9$, $\sup|h(\varphi)| < +\infty$, $\varphi \in (0; \pi)$,

$$\int\limits_{[1;\, r] \cap U^*} \ln\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right| \frac{dt}{t} \le \int\limits_{[1;\, r] \cap U^*} c_8 t^{\rho-1} dt + \int\limits_{[1;\, r] \cap U^*} \frac{c_9}{t} dt \le c_9 \ln r + c_8 \begin{cases} r^{\rho-1} \int\limits_{U^*} dt, & \rho \ge 1, \\ \int\limits_{U^*} dt, & \rho < 1. \end{cases} \tag{23}$$

Звідси та з (22) отримуємо (20). □

З лем 3 і 4 випливає наступна.

Лема 5. *Якщо голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f є функцією покращеного регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$, то для деякого $\rho_5 \in (0;\ \rho)$ і кожного $j \in \{1, ..., m\}$ рівномірно за $\varphi \in [\varphi_j, \tilde{\varphi}_j]$, $\psi_j < \varphi_j < \tilde{\varphi}_j < \psi_{j+1}$, виконується*

$$J_f^t(\varphi) = \int\limits_1^t \ln\left|f\left(xe^{i\varphi}\right)\right|\frac{dx}{x} = \frac{t^\rho}{\rho}h\left(\varphi\right) + O\left(t^{\rho_5}\right), \quad t \to +\infty.$$

Лема 6. *Якщо голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f нецілого формального порядку $\rho \in (0; +\infty)$ є функцією покращеного регулярного зростання в $\mathbb{C}^+$, то для деякого $\rho_9 \in (0;\ \rho)$ і кожного $j \in \{1, ..., m\}$*

$$N_j\left(r\right) = \frac{\Delta_j}{\rho}r^\rho + O\left(r^{\rho_9}\right), \quad r \to +\infty, \quad \Delta_j \in [0; +\infty). \tag{24}$$

Доведення. Запишемо узагальнену формулу Йєнсена [6, с.188]

$$N(r,\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d}{d\varphi}\int\limits_0^r J_f^t(\varphi)\frac{dt}{t}\right]_{\varphi=\beta} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d}{d\varphi}\int\limits_0^r J_f^t(\varphi)\frac{dt}{t}\right]_{\varphi=\alpha} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_\alpha^\beta \ln\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi, \tag{25}$$

де $N(r,\alpha,\beta) = \int\limits_0^r \frac{n(t,\alpha,\beta)dt}{t}$, $n(t,\alpha,\beta)$ — кількість нулів в секторі $\{z\colon |z| \le t,\ \alpha \le \arg z \le \beta\}$, $J_f^t\left(\varphi\right)$ — функція з леми 5. Нехай $\rho_5 \in (0;\ \rho)$ — число з леми 5, $\mu = (\rho - \rho_5)/2$ і $q = r_k^{-\mu}$, де (r_k) — послідовність, яка фігурує в лемі 2. Для кожного $j \in \{1, ..., m\}$ виберемо числа α і β так, щоб $\psi_{j-1} < \alpha < \psi_j < \beta < \psi_{j+1}$, де $\psi_0 = 0,\ \psi_{m+1} = \pi$. Тоді з (25), подібно як і в [6, с.199] і [3, с.35], маємо

$$N_j(r_k) = \frac{1}{q^2}\int\limits_\beta^{\beta+q}\left(\int\limits_\alpha^{\alpha+q} N_j(r_k)d\alpha_*\right)d\beta_* =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_0^{r_k}\frac{J_f^t(\beta+q) - J_f^t(\beta)}{q}\frac{dt}{t} - \int\limits_0^{r_k}\frac{J_f^t(\alpha+q) - J_f^t(\alpha)}{q}\frac{dt}{t}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2\pi q^2}\int\limits_\beta^{\beta+q}\left(\int\limits_\alpha^{\alpha+q}\left(\int\limits_{\alpha_*}^{\beta_*}\ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\right)d\alpha_*\right)d\beta_*. \tag{26}$$

Згідно з лемою 5

$$J_f^t(\beta+q) - J_f^t(\beta) = \frac{t^\rho}{\rho}\left(h(\beta+q) - h(\beta)\right) + O\left(t^{\rho_5}\right), \quad t \to +\infty, \tag{27}$$

$$J_f^t(\alpha+q) - J_f^t(\alpha) = \frac{t^\rho}{\rho}\left(h(\alpha+q) - h(\alpha)\right) + O\left(t^{\rho_5}\right), \quad t \to +\infty. \tag{28}$$

Далі, оскільки функція h є нескінченно диференційовною на кожному проміжку $(\psi_j; \psi_{j+1})$, $j \in \{1, ..., m\}$, то

$$\frac{h(\beta+q) - h(\beta)}{q} = h'(\beta) + O(q), \quad \frac{h(\alpha+q) - h(\alpha)}{q} = h'(\alpha) + O(q), \quad q \to 0.$$

Тому з (27) і (28)при $k \to +\infty$ отримуємо

$$\int_0^{r_k} \frac{J_f^t(\beta+q)-J_f^t(\beta)}{q}\frac{dt}{t} = \frac{r_k^\rho}{\rho^2}\frac{h(\beta+q)-h(\beta)}{q} + O\left(r_k^{\rho_6}\right) = \frac{r_k^\rho}{\rho^2}h'(\beta) + O\left(r_k^{\rho_6}\right)(\rho_6<\rho), \quad (29)$$

$$\int_0^{r_k} \frac{J_f^t(\alpha+q)-J_f^t(\alpha)}{q}\frac{dt}{t} = \frac{r_k^\rho}{\rho^2}\frac{h(\alpha+q)-h(\alpha)}{q} + O\left(r_k^{\rho_6}\right) = \frac{r_k^\rho}{\rho^2}h'(\alpha) + O\left(r_k^{\rho_6}\right)(\rho_6<\rho). \quad (30)$$

Крім цього, з леми 2, при $k \to +\infty$ маємо (17). Разом з тим, скориставшись теоремою про середнє для подвійних інтегралів, для деякого $\rho_7 \in (0;\ \rho)$ при $k \to +\infty$ одержимо

$$\frac{1}{q^2}\int_\beta^{\beta+q}\left(\int_\alpha^{\alpha+q}\left(\int_{\alpha_*}^{\beta_*}\ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\right)d\alpha_*\right)d\beta_* = \frac{r_k^\rho}{q^2}\int_\beta^{\beta+q}\left(\int_\alpha^{\alpha+q}\left(\int_{\alpha_*}^{\beta_*}h(\varphi)d\varphi\right)d\alpha_*\right)d\beta_* + O\left(r_k^{\rho_7}\right) =$$

$$= r_k^\rho\int_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}}h(\varphi)d\varphi + O\left(r_k^{\rho_2}\right) = r_k^\rho\int_\alpha^\beta h(\varphi)d\varphi + r_k^\rho\left(\int_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}}h(\varphi)d\varphi - \int_\alpha^\beta h(\varphi)d\varphi\right) + O\left(r_k^{\rho_7}\right), \quad (31)$$

де $\alpha < \widetilde{\alpha} < \alpha+q$, $\beta < \widetilde{\beta} < \beta+q$. Але

$$\left|\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}}h(\varphi)\,d\varphi - \int_\alpha^\beta h(\varphi)\,d\varphi\right| \le \int_\alpha^{\tilde{\alpha}}|h(\varphi)|\,d\varphi + \int_\beta^{\tilde{\beta}}|h(\varphi)|\,d\varphi < 2c_{10}q = c_{11}r_k^{-\mu}, \quad r_k>0. \quad (32)$$

Таким чином, з (26)–(32) випливає, що для деякого $\rho_8 \in (0;\ \rho)$ і кожного $j \in \{1,...,m\}$

$$N_j(r_k) = \frac{r_k^\rho}{2\pi\rho^2}s_f(\alpha,\beta) + O\left(r_k^{\rho_8}\right), \quad k \to +\infty,$$

де

$$s_f(\alpha,\beta) = h'(\beta) - h'(\alpha) + \rho^2\int_\alpha^\beta h(\varphi)d\varphi. \quad (33)$$

Далі, для кожного $r > r_1$ існує k таке, що $r_k < r < r_{k+1}$. Оскільки функції $N_j(r)$,$j \in \{1,...,m\}$, є неспадними і $r_k/r_{k+1} \to 1$, $r/r_{k+1} \to 1$, $r_k/r \to 1$, $r_k^\rho - r^\rho = O(r^{\rho_2})$ і $r_{k+1}^\rho - r^\rho = O(r^{\rho_2})$, якщо $r \to +\infty$, то

$$N_j(r) \le N_j(r_{k+1}) = \frac{r^\rho}{2\pi\rho^2}s_f(\alpha,\beta) + \frac{r_{k+1}^\rho - r^\rho}{2\pi\rho^2}s_f(\alpha,\beta) + O\left(r_{k+1}^{\rho_8}\right) =$$

$$= \frac{r^\rho}{2\pi\rho^2}s_f(\alpha,\beta) + O\left(r^{\rho_9}\right), \quad r \to +\infty.$$

Аналогічно,

$$N_j(r) \geq N_j(r_k) = \frac{r^\rho}{2\pi\rho^2} s_f(\alpha,\beta) + O\left(r^{\rho_9}\right), \quad r \to +\infty.$$

Тому для деякого $\rho_9 \in (0;\ \rho)$ і кожного $j \in \{1, ..., m\}$

$$N_j(r) = \frac{r^\rho}{2\pi\rho^2} s_f(\alpha,\beta) + O\left(r^{\rho_9}\right), \quad r \to +\infty, \tag{34}$$

де функція $s_f(\alpha,\beta)$ визначена рівністю (33) Тепер безпосередньо доведемо (24). Для цього розглянемо випадки: $i < j$, $i = j$, $i > j$. Нехай спочатку $i > j$. Тоді, якщо $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то $\psi_i \leq \varphi + 2\pi < \psi_i + 2\pi$, і з (7) отримуємо

$$h_i(\varphi) = \frac{\pi\Delta_i}{\sin\pi\rho}(\cos\rho(\varphi - \psi_i + \pi) - \cos\rho(\varphi + \psi_i - \pi)). \tag{35}$$

Тому

$$h'(\beta) - h'(\alpha) + \rho^2 \int\limits_\alpha^\beta h(\varphi)d\varphi = 0. \tag{36}$$

Якщо ж $i < j$ і $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то $\psi_i \leq \varphi < \psi_i + 2\pi$, $h_i(\varphi)$ має вигляд

$$h_i(\varphi) = \frac{\pi\Delta_i}{\sin\pi\rho}(\cos\rho(\varphi - \psi_i - \pi) - \cos\rho(\varphi + \psi_i - \pi)) \tag{37}$$

і виконується (36). Нехай $i = j$. Тоді, якщо $\alpha \leq \varphi \leq \psi_j$, то $\psi_j \leq \varphi + 2\pi < \psi_j + 2\pi$ і $h_j(\varphi)$ визначається формулою (35). Як тільки $\psi_j \leq \varphi \leq \beta$, то $\psi_j \leq \varphi < \psi_j + 2\pi$ і $h_j(\varphi)$ має вигляд (37). Тому,

$$h'(\beta) - h'(\alpha) + \rho^2 \int\limits_\alpha^\beta h(\varphi)d\varphi = h'(\beta) - h'(\alpha) + \rho^2 \left(\int\limits_\alpha^{\psi_j} + \int\limits_{\psi_j}^\beta \right) h_j(\varphi)d\varphi = 2\pi\rho\Delta_j.$$

Звідси і з (33), (34), (36) отримаємо (24). Лему 6 доведено. □

Лема 7. *Нехай $\rho \in (0;+\infty)$, $\Delta_j \in [0;+\infty)$, $j \in \{1,...,m\}$. Для того, щоб для деякого $\rho_1 \in (0;\rho)$ і для кожного $j \in \{1,...,m\}$ виконувалось (4), необхідно і достатньо, щоб для деякого $\rho_9 \in (0;\rho)$ і для кожного $j \in \{1,...,m\}$ виконувалось (24).*

Доведення леми 7 міститься в доведенні леми 3 з [4, c.143].

Лема 8. *Нехай для голоморфної в $\mathbb{C}^+$ функції f скінченого формального порядку $\rho \in (0;1)$ за деякої тригонометрично ρ-опуклої на $(0;\pi)$ функції $h\colon (0;\pi) \to \mathbb{R}$ існують $\rho_2 \in (0;\rho)$ і послідовність (r_k) такі, що $0 < r_k \uparrow +\infty$, $r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = O\left(r_k^{\rho_2}\right)$, $k \to +\infty$ і рівномірно за $\varphi \in (0;\pi)$ виконується (17). Тоді знайдеться $\rho_{10} \in (0;\rho)$ таке, що*

$$\sum_{1<|\lambda_n|<r} \sin\varphi_n - \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^r \frac{\ln|f(t)\,f(-t)|}{t}dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_1^r \frac{d\left[s(t) - s(-t)\right]}{t} =$$

$$= \frac{\rho^2-1}{2\pi\rho} r^\rho \int\limits_0^\pi h(\varphi)\sin\varphi d\varphi + O\left(r^{\rho_{10}}\right), \quad r \to +\infty.$$

Доведення леми 8 міститься в доведенні теореми 1 із [7].

Доведення теореми 1. Достатність теореми випливає безпосередньо з леми 1. Доведемо необхідність. З лем 6 та 7 безпосередньо випливає (4).

Доведемо тепер (3). Оскільки сума радіусів виняткових кругів U_s, $s \in \mathbb{N}$, які знаходяться в області $G_{r_0} = \{z\colon |z| > r_0\} \cap \{z\colon 0 < \arg z < \psi_1\}$ прямує до 0, коли $r_0 \to +\infty$, то для фіксованого $\delta \in (0, \min(\psi_1, \pi, \pi/\rho))$ можна знайти таке r_0, що промінь $\arg z = \delta$ не буде перетинати виняткові круги U_s, які мають непорожній перетин з G_{r_0}, і тому справедливою буде асимптотична оцінка

$$\int_1^r \ln\left|f\left(te^{i\delta}\right)\right|\frac{dt}{t} = \frac{r^\rho}{\rho}h(\delta) + O\left(\frac{r^{\rho_2}}{\sin\delta}\right) = \frac{r^\rho}{\rho}h(\delta) + O\left(r^{\rho_2}\right), \quad r \to +\infty. \tag{39}$$

За відповідного вибору голоморфної гілки степеня функція $g(\zeta) = f(\zeta^{\delta/\pi})$ є голоморфною в $\mathbb{C}^+$ і допускає голоморфне продовження в нижню півплощину через від'ємний дійсний промінь. Тому її сингулярна гранична функція $s_g(x)$ є сталою на цьому промені. Крім цього, число $\frac{\rho\delta}{\pi} \in (0;1)$ є формальним порядком функції g. Оскільки $\delta < \psi_1$, то функція g не має нулів у верхній півплощині. Далі, використовуючи лему 8, для деякого $\rho_{10} \in (0;\rho)$ отримаємо

$$-\frac{1}{2\pi}\int_1^R \frac{\ln|g(x)g(-x)|}{x}dx - \frac{1}{2\pi}\int_1^R \frac{ds_g(x)}{x} =$$
$$= \frac{\rho^2\delta^2-\pi^2}{2\pi^2\rho\delta}R^{\rho\delta/\pi}\int_0^\pi h_g(\theta)\sin\theta d\theta + O\left(R^{\rho_{10}\delta/\pi}\right), \quad R \to +\infty.$$

Оскільки $ds_g(x) = \frac{\pi}{\delta}x^{1-\delta/\pi}ds_f(x^{\delta/\pi})$, то

$$-\frac{1}{2\pi}\int_1^R \ln|f(x^{\delta/\pi})f(x^{\delta/\pi}e^{i\delta})|\frac{dx}{x} - \frac{1}{2\pi}\int_1^R \frac{\pi}{\delta}x^{1-\delta/\pi}\frac{ds_f(x^{\delta/\pi})}{x} =$$

$$= \frac{\rho^2\delta^2-\pi^2}{2\pi^2\rho\delta}R^{\rho\delta/\pi}\int_0^\pi h_f\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta d\theta + O\left(R^{\rho_{10}\delta/\pi}\right), \quad R \to +\infty,$$

і

$$-\frac{1}{2\delta}\int_1^r \ln|f(t)f(te^{i\delta})|\frac{dt}{t} - \frac{1}{2\delta}\int_1^r \frac{ds_f(t)}{t} =$$

$$= \frac{\rho^2\delta^2-\pi^2}{2\pi^2\rho\delta}r^\rho\int_0^\pi h_f\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta d\theta + O\left(r^{\rho_{10}}\right), \quad r \to +\infty. \tag{40}$$

Тому, використовуючи (39), для деякого $\rho_1 < \rho$ отримуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^r \ln|f(t)|\frac{dt}{t} + \frac{1}{2\pi}\int_1^r \frac{ds_f(t)}{t} =$$

$$= -\frac{r^\rho}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho^2\delta^2-\pi^2}{\pi^2}\int_0^\pi h_f\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta d\theta + h_f(\delta)\right) + O\left(r^{\rho_1}\right), \quad r \to +\infty. \tag{41}$$

Але

$$\int_0^\pi h_f\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta d\theta = \sum_{i=1}^m \int_0^\pi h_i\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta d\theta +$$

$$+\int_0^\pi \left(-\frac{2\pi\rho l_1}{\sin\pi\rho}\sin\rho\left(\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)-\pi\right)+\frac{2\pi\rho l_2}{\sin\pi\rho}\sin\rho\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\right)\sin\theta d\theta =$$

$$=\sum_{i=1}^m\int_0^\pi \frac{\pi\Delta_i}{\sin\pi\rho}\left(\cos\rho\left(\psi_i-\pi-\frac{\theta\delta}{\pi}\right)-\cos\rho\left(\frac{\theta\delta}{\pi}+\psi_i-\pi\right)\right)\sin\theta d\theta +$$

$$+\frac{\pi^2}{(\rho^2\delta^2-\pi^2)}\frac{2\pi\rho}{\sin\pi\rho}\left(l_1\sin\rho\left(\delta-\pi\right)-l_1\sin\rho\pi-l_2\sin\rho\delta\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{\pi^2-\rho^2\delta^2}\left(\sum_{i=1}^m\frac{2\pi\Delta_i}{\sin\pi\rho}\sin\rho\left(\psi_i-\pi\right)\sin\rho\delta-\frac{2\pi\rho}{\sin\pi\rho}(l_1\sin\rho(\delta-\pi)-l_1\sin\rho\pi-l_2\sin\rho\delta)\right)$$

$$h(\delta)=\sum_{i=1}^m\frac{2\pi\Delta_i}{\sin\pi\rho}\sin\left(\rho\psi_i-\rho\pi\right)\sin\rho\delta-\frac{2\pi\rho}{\sin\pi\rho}(l_1\sin\rho(\delta-\pi)-l_2\sin\rho\delta).$$

Отже, з (41) знаходимо, що

$$\tau_1(r)=l_1r^\rho+O\left(r^{\rho_1}\right),\quad r\to+\infty,$$

тобто виконується перша з умов (3), а виконання другої обґрунтовується аналогічно. Теорему 1 доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
2. Khabibulin B.N. *Asymptotic behavior of the difference of subharmonic functions* // Mat. Stud. – 2004. –Т.21, №1. – С. 47-63.
3. Винницький Б. В., Хаць Р. В. *Про регулярність зростання цілої функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів* // Мат. Студії. – 2005. – Т. 24, №1. – С. 31–38.
4. Винницький Б. В., Хаць Р. В. *Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку* // Мат. Студії. – 2004. – Т. 21, №2. – С. 140–148.
5. Гришин А. Ф. *О регулярности роста субгармонических функций* // Теор. функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). -1968. – Вып.7. – С. 59–84.
6. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехиздат, 1956. - 632 с.
7. Vynnyts'kyi B. V., Yurkiv M. I. *On asymptotic properties of holomorphic in the half-plane functions of improved regular growth of order less than one*// Mat. Stud. – 2008. –Т.30, №2. – С. 173–176.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. –М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
Інститут фізики, математики та інформатики
yurkiv.maryana@gmail.com

Надійшло 25.01.09

Після переробки 24.11.09