УДК 517.92

Д. Ю. Зікрач, О. Б. Скасків

ПРО ОПИС ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ У СПІВВІДНОШЕННІ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ КРАТНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З ОБМЕЖЕННЯМ НА ЗРОСТАННЯ ЗВЕРХУ

D. Yu. Zikrach, O. B. Skaskiv. *On the description of an exceptional set in Borel's relation for multiple Dirichlet series with upper restriction on the growth*, Mat. Stud. **32** (2009), 139–147.

New description of the exceptional set in Borel's relation between the logarithms of the maximum modulus and of the maximal term of the multiple Dirichlet series with upper bound on the growth is obtained.

Д. Ю. Зикрач, О. Б. Скаскив. *Об описании исключительного множества в соотношении Бореля для целых кратных рядов Дирихле с ограничением на рост сверху* // Мат. Студії. – 2009. – Т.32, №2. – С.139–147.

Получено новое описание исключительного множества в соотношении Бореля между логарифмами максимума модуля и максимального члена целого кратного ряда Дирихле с ограничением на скорость роста сверху.

1. Непокращуваність опису виняткової множини. Для $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^p$ і $b = (b_1, b_2, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p_+$, $p \in \mathbb{N}$, вживатимемо такі позначення

$$\langle a, b\rangle = a_1b_1 + \dots a_pb_p, \quad |b| = \sqrt{b_1^2 + \dots + b_p^2}, \quad \|b\| = b_1 + \dots + b_p,$$

де $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Нехай L — клас додатних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій $\psi(t)$ таких, що $\psi(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$. Через L^+ позначимо підклас L, в який входять зростаючі функції.

Нехай $\Lambda_p = (\lambda_n)_{\|n\|=1}^{+\infty}$ — фіксована послідовність така, що $\lambda_n = (\lambda^{(1)}_{n_1}, \dots, \lambda^{(p)}_{n_p})$ для $n = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}^p_+$ і $0 \le \lambda^{(j)}_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ для всіх $1 \le j \le p$. Для $\Lambda_p = (\lambda_n)$ визначимо лічильну функцію $n_0(t) = \sum_{\|\lambda_n\| \le t} 1, \quad t > 0$.

Через $H(\Lambda_p)$ позначимо клас цілих рядів Діріхле (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}^p$, $p \ge 1$)

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} F_n e^{\langle z, \lambda_n\rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^p, \tag{1}$$

таких, що $\sharp\{n \in \mathbb{Z}^p_+ :\ F_n \ne 0\} = +\infty$.

Для функції $F \in H(\Lambda_p)$ та $x \in \mathbb{R}^p_+$ введемо позначення

$$M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| \colon y \in \mathbb{R}^p_+\}, \quad \mathfrak{M}(x, F) = \textstyle\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |F_n| e^{\langle x, \lambda_n\rangle},$$
$$\mu(x, F) = \max\{|F_n| e^{\langle x, \lambda_n\rangle} \colon n \in \mathbb{Z}^p_+\}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B50.

Оскільки $\mu(x,F) \le M(x,F) \le \mathfrak{M}(x,F)$ для кожного $x \in \mathbb{R}^p_+$, то не зменшуючи загальності, при вивченні різноманітних співвідношень між $\mu(x,F)$ та $M(x,F)$ замість класу $H(\Lambda_p)$ досить розглянути його підклас $H_+(\Lambda_p)$, в який входять цілі ряди Діріхле вигляду (1) з $F_n \ge 0$ $(n \in \mathbb{Z}^p_+)$.

Для $\alpha > 1$ і вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^p_+$ визначимо

$$\tau_\alpha(E) := \int\limits_E \frac{dx_1 \cdots dx_p}{|x|^{\alpha-1}}.$$

В [1] отримано такий опис виняткової множини в співвідношенні Бореля для довільного $p \in \mathbb{N},\ p \ge 2$.

Теорема A. *Нехай $p \ge 2$. Для того, щоб $\forall F \in H^p_+(\Lambda)$ співвідношення*

$$\ln M(x,F) = (1+o(1)) \ln \mu(x,F) \tag{2}$$

виконувалося при $|x| \to +\infty$ $(x \in K \setminus E)$, де K довільний дійсний конус в $\mathbb{R}^p_+$ з вершиною у початку координат O такий, що $\overline{K} \setminus \{O\} \subset \mathbb{R}^p_+$ і множина $E \subset \mathbb{R}^p_+$ така, що

$$\tau_p(E \cap \mathbb{R}^p_+) < +\infty, \tag{3}$$

необхідно і досить

$$\int^{+\infty} \frac{\ln n_0(t)}{t^2} dt < +\infty. \tag{4}$$

Для $p = 2$ твердження, подібне до теореми A, доведене в [3], а для довільного $p \ge 2$ зі слабшим описом виняткової множини E в [2, 5, 6].

Опис (3) величини виняткової множини E у теоремі A не можна покращити в наступному сенсі.

Твердження 1. *Для кожної функції $h \in L^+$ існують послідовність $\Lambda_p = (\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}$, яка задовольняє умову (4), функція $F \in H_+(\Lambda_p)$, стала $d > 0$ і вимірна множина $E \subset \mathbb{R}^p_+$ такі, що:*

1. $(\forall\ x \in E)\colon\ \ln M(x,F) \ge (1+d) \ln \mu(x,F)$;
2. $\displaystyle\int\limits_E \frac{h(|x|) dx_1 \dots dx_p}{|x|^{p-1}} = +\infty.$

Доведення. У статті [4] твердження 1 доведено для $p = 1$. Власне, там доведено, що $(\forall h_0 \in L^+)$ $(\exists \lambda_n^{(1)}\colon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n^{(1)}} < +\infty)$ $(\exists f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{t\lambda_n^{(1)}},\ f \in H(\Lambda_1))$ $(\exists E_0 \subset [0;+\infty), E_0 = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}(r_k, r_k^*), r_k < r_k^* < r_{k+1} (k \in \mathbb{N}))$ $(\exists d > 0)\colon$

1. $(\forall t \in E_0)\colon \ln f(t) > (1+d) \ln \mu(t,f)$;
2. $\int_{E_0 \cap [0;+\infty)} h_0(t) dt = +\infty$.

Розглянемо ряд Діріхле

$$F(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j e^{\|x\| \lambda_j^{(1)}}.$$

Зрозуміло, що $F \in H_+(\Lambda_p)$, при цьому послідовність $\Lambda_p = (\lambda_n)$, де $\lambda_n = (\lambda^{(1)}_{n_1}, \dots, \lambda^{(1)}_{n_p})$, $n = (n_1, \dots, n_p)$, задовольняє умову (4). Тоді для всіх $r_k \le \|x\| \le r_k^*$:

$$\ln F(x_1, \dots, x_p) \ge (1+d) \ln \mu(\|x\|, f) = (1+d) \ln \mu(x_1, \dots, x_p, F).$$

Позначимо $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p_+ \colon r_k \le \|x\| \le r_k^*\}$, $g(\varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}) := \cos\varphi_{p-1} + \sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{p-1} + \sum_{m=2}^{p-1} \cos\varphi_{m-1} \prod_{i=m}^{p-1} \sin\varphi_i$, $A = \max\{g(\varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}) \colon \varphi_i \in [0, \frac{\pi}{2}], i \in \{1, \dots, p-1\}\}$. Тоді $A \in (0, +\infty)$ і для функції $h \in L^+$

$$\int\limits_E \frac{h(|x|)}{|x|^{p-1}} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{r_k \le \|x\| \le r_k^*} \frac{h\Big(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}\Big)}{(x_1^2 + \dots + x_p^2)^{\frac{p-1}{2}}} dx_1 \dots dx_p =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi_2 d\varphi_2 \dots \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2}\varphi_{p-1} d\varphi_{p-1} \int\limits_{\frac{r_k}{g(\varphi_1, \dots, \varphi_{p-1})}}^{\frac{r_k^*}{g(\varphi_1, \dots, \varphi_{p-1})}} h(\rho) d\rho =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi_2 \dots \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2}\varphi_{p-1} \int\limits_{r_k}^{r_k^*} h\left(\frac{t}{g(\varphi_1, \dots, \varphi_{p-1})}\right) dt \frac{d\varphi_1 \dots d\varphi_{p-1}}{g(\varphi_1, \dots, \varphi_{p-1})} \ge$$

$$\ge \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi_2 d\varphi_2 \dots \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2}\varphi_{p-1} d\varphi_{p-1} \int\limits_{r_k}^{r_k^*} h\Big(\frac{t}{A}\Big) dt =$$

$$= \frac{C}{A} \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{r_k}^{r_k^*} h(t/A) dt = \frac{C}{A} \int\limits_{E_0} h(t/A) dt.$$

Залишається вибрати на початку доведення $h_0(t) = h(t/A)$. Це завершує доведення твердження 1. $\square$

2. Кратні ряди Діріхле з обмеженням на зростання зверху. Нехай $\Phi \in L^+$. Визначимо клас

$$L_1(\Phi) = \Big\{\psi \in L \colon \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\Phi(t)} \frac{du}{\psi(u)} = 0\Big\}.$$

Введемо позначення

$$H(\Lambda_p, \Phi) = \{F \in H(\Lambda_p) \colon \ln \mathfrak{M}(x, F) = O(|x| \Phi(|x|)) (|x| \to +\infty)\}.$$

У випадку $p = 1$ з результату, доведеного в статті [9] випливає, що якщо $\Phi \in L_+, F \in H(\Lambda_1, \Phi)$ і для $j = 1$ виконується умова

$$(\forall \eta > 0) \colon \quad \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \sum_{\lambda_k^{(j)} \le \eta \Phi(R)} \frac{1}{k \lambda_k^{(j)}} = 0, \tag{5}$$

то співвідношення (2) справджується при $x \to +\infty$ ($x \in [0, +\infty) \setminus E$), E — деяка множина нульової лінійної щільності

$$\mathcal{D}E \colon = \overline{\lim_{R \to +\infty}} \frac{1}{R} \operatorname{meas}(E \cap [0, R]) = 0.$$

Для $R>0$ позначимо $B_p(R)=\{x\in\mathbb{R}^p_+\colon |x|\le R\}$. У випадку $p=2$ в статті [8] у підкласі

$$H_0(\Lambda_2)=\{F\in H(\Lambda_2)\colon (\exists\rho>0)[\ln\mathfrak{M}(x,F)=O(e^{\rho|x|})(|x|\to+\infty)]\}$$

доведено таку теорему.

Теорема B. *Нехай $F\in H_0(\Lambda_2)$. Співвідношення (2) виконується при $|x|\to+\infty$ ($x\in K\backslash E$) для кожного кута K з вершиною у початку координат O такого, що $\overline{K}\backslash\{O\}\subset\mathbb{R}^2_+$, де множина E така, що при $p=2$*

$$\tau_p(E\cap B_p(R))=o(R^{p-1})\ (R\to+\infty),\tag{6}$$

тоді і лише тоді, коли виконується умова (5) при $j=1$ і $j=2$.

В [11] висловлювалася гіпотеза, що опис (6) виняткової множини у співвідношенні Бореля є правильним і непокращуваним у класі $H(\Lambda_p,\Phi)$ для довільних $p\ge 1$ і функції $\Phi\in L^+$. Наступна теорема містить твердження гіпотези у частині, що стосується встановлення вказаного там опису виняткової множини.

Теорема 1. *Нехай $\Phi\in L^+$ і $F\in H(\Lambda_p,\Phi)$. Якщо виконується умова*

$$(\forall\eta>0)(\forall 1\le j\le p)\colon \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\sum_{0<\lambda_k^{(j)}\le\eta\Phi(R)}\frac{1}{k\lambda_k^{(j)}}=0,\tag{7}$$

то співвідношення (2) виконується при $|x|\to+\infty$ ($x\in K\backslash E$) для кожного конуса $K\subset\mathbb{R}^p_+$ з вершиною в початку координат O такого, що $\overline{K}\backslash\{O\}\subset\mathbb{R}^p_+$, де множина E така, що виконується (6).

Для доведення нам будуть потрібні такі леми.

Лема 1 ([6])**.** *Нехай $g_0(t)$ — додатна диференційовна неспадна на $\mathbb{R}$ функція, а ψ — додатна неперервна на $\mathbb{R}$ функція така, що $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\psi(t)}=A<+\infty$, і $E=\big\{t\in\mathbb{R}\colon g_0'(t)\ge\psi(g_0(t))\big\}$. Тоді*

$$\operatorname{meas}_1(E\cap[r,R])\le\int\limits_{g_0(r)}^{g_0(R)}\frac{dt}{\psi(t)},\quad -\infty<r<R<+\infty.$$

Лема 2 ([12])**.** *Нехай E — необмежена множина на $\mathbb{R}_+$, φ, $\psi\in L^+$ — такі функції, що*

$$A_1(R)=\frac{1}{\varphi(R)}\int^{R}\frac{d\psi^{-1}(t)}{t}=o(1)\ (R\to+\infty, R\in E),$$

а також $t=o(\psi(t\varphi(t)))$ $(t\to+\infty)$, тоді

$$A_2(R)=\frac{1}{\varphi(R)}\int^{R\varphi(R)}\frac{dx}{\psi(x)}=o(1)\ (R\to+\infty, R\in E).$$

Доведення. Не зменшуючи загальності припустимо, що $\psi^{-1}(1)=0$, а також, що

$$A_1(R)=\frac{1}{\varphi(R)}\int\limits_0^{R}\frac{d\psi^{-1}(t)}{t},\ A_2(R)=\frac{1}{\varphi(R)}\int\limits_0^{R\varphi(R)}\frac{dx}{\psi(x)}$$

Зауважимо спочатку, що

$$A_3(R) = \frac{1}{\varphi(R)} \int\limits_1^R \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt = -\frac{\psi^{-1}(R)}{R\varphi(R)} + \frac{1}{\varphi(R)} \int\limits_1^R \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} \le A_1(R). \tag{8}$$

Нехай $0 < \varepsilon < 1$ — довільне. Розглянемо множини

$$E_1 = \{R \in E \colon \psi(R\varphi(R)) > R\},\ E_2 = E \backslash E_1,\ E_3 = \{R \in E_1 \colon \psi(\varepsilon R\varphi(R)) > R\}.$$

Оскільки,

$$A_2(R) = \frac{1}{\varphi(R)} \int\limits_1^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi(x)} = \frac{1}{\varphi(R)} \int\limits_1^{\psi(R\varphi(R))} \frac{d\psi^{-1}(t)}{t},$$

то

$$A_2(R) \le A_1(R)\ (R \in E_2). \tag{9}$$

Для $R \in E_1 \backslash E_3$ маємо

$$A_2(R) = \frac{R}{\psi(R\varphi(R))} + \frac{1}{\varphi(R)} \int\limits_1^{\psi(R\varphi(R))} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt \le$$

$$\le \frac{R}{\psi(R\varphi(R))} + A_3(R) + \frac{1}{\varphi(R)} \int\limits_{\psi(\varepsilon R\varphi(R))}^{\psi(R\varphi(R))} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt.$$

Але

$$\frac{1}{\varphi(R)} \int\limits_{\psi(\varepsilon R\varphi(R))}^{\psi R\varphi(R))} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt \le R\left(\frac{1}{\psi(\varepsilon R\varphi(R))} - \frac{1}{\psi(R\varphi(R))}\right).$$

Тому

$$A_2(R) \le A_3(R) + \frac{R}{\psi(\varepsilon R\varphi(R))}\ (R \in E_1 \backslash E_3). \tag{10}$$

Якщо ж $R \in E_3$, то, оскільки $\frac{1}{\varphi(R)} \int\limits_R^{\psi(\varepsilon R\varphi(R))} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt \le \varepsilon R\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\psi(\varepsilon R\varphi(R))}\right)$, знову маємо

$$A_2(R) \le A_3(R) + \frac{R(1-\varepsilon)}{\psi(\varepsilon R\varphi(R))} + \varepsilon\ (R \in E_3). \tag{11}$$

Об'єднуючи нерівності (9)–(11), отримуємо $A_2(R) \le A_3(R) + \frac{R(1-\varepsilon)}{\psi(\varepsilon R\varphi(R))} + \varepsilon\ (R \in E)$. Залишилось зауважити, що $R = o(\psi(\varepsilon R\varphi(R)))\ (R \to +\infty)$ та застосувати (8). Завдяки довільності $\varepsilon > 0$, лему доведено. $\square$

Доведення теореми 1. Нехай $F \in H(\Lambda_p, \Phi)$. Зауважимо спочатку, що з огляду на умову (7), у подальших міркуваннях можемо не зменшуючи загальності вважати, що $\ln \mathfrak{M}(x,F) \le |x|\Phi(|x|)(|x| \ge c_0)$. Зазначимо, що $n_0(t) = \sum_{\|\lambda_n\|<t} 1 \le n_1(t) \cdot \ldots \cdot n_p(t)$, де $n_j(t) = \sum_{\lambda_k^{(j)}<t} 1$ — лічильна функція послідовності $(\lambda_k^{(j)})_{k=1}^{+\infty}$ j-тих компонент векторної послідовності (λ_n). Нехай $n_j^* \in L^+(j \in \{1,\ldots,p\})$ такі, що $n_j(t) \le n_j^*(t) \le n_j(t)+1(j \in \{1,\ldots,p\})$.

Оскільки, $\frac{1}{n} \ge \ln(1+\frac{1}{k}) = \ln(k+1) - \ln k$, то

$$\sum_{0<\lambda_k^{(j)}\le\eta\Phi(t)} \frac{1}{k\lambda_k^{(j)}} \ge \sum_{0<\lambda_k^{(j)}\le\eta\Phi(t)} \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\lambda_k^{(j)}} = \int\limits_0^{\eta\Phi(t)} \frac{d\ln n_j(u)}{u}$$

Отже,

$$(\forall j \in \{1,\ldots,p\})(\forall \eta>0)\colon \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^{\eta\Phi(t)} \frac{d\ln n_j(u)}{u} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^{\eta\Phi(t)} \frac{d\ln n_j^*(u)}{u} = 0. \tag{12}$$

Через φ позначимо обернену функцію до функції Φ. Тоді з (12) для $n_j^*(t) := \prod_{j=1}^p n_j^*(t)$ отримуємо

$$(\forall b>0)\colon \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\varphi(bt)}\int\limits_0^{t} \frac{d\ln n_0^*(u)}{u} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\varphi(bt)}\sum_{j=1}^p\int\limits_0^{t} \frac{d\ln n_j^*(u)}{u} = 0.$$

З доведення теореми 6 з [7] випливає, що можна вибрати таку функцію $c(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$, що

$$(\forall b>0)\colon \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\varphi(bt)}\int\limits_0^{t} \frac{d(c(u)\ln n_0^*(u))}{u} = 0. \tag{13}$$

Нехай $\psi^{-1}(t) = c(t)\ln n_0^*(t)$, тоді $\ln n_0(t) \le \ln n_0^*(t) = o(\psi^{-1}(t))(t \to +\infty)$ і

$$(\forall b>0)\colon \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\varphi(bt)}\int\limits_0^{t} \frac{d\psi^{-1}(u)}{u} = 0. \tag{14}$$

З умови (13) вибору $c(t)$ випливає, що

$$(\forall b>0)\colon \lim_{t\to+\infty} \frac{c(t)\ln n_0^*(t)}{t\varphi(bt)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t\varphi(bt)} = 0.$$

Нехай тепер $b=1$. За лемою 2 з (14) отримуємо

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\varphi(t)}\int^{t\varphi(t)} \frac{dx}{\psi(x)} = 0. \tag{15}$$

Для фіксованого x_0 розглянемо функцію $g(t) = \ln \mathfrak{M}(tx_0), t>0$. В [1] доведено, що існує $x^*\colon = \inf\{\inf\{x_j \colon x=(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_p), |x|=1, x \in \overline{K}\}\colon 1 \le j \le p\}, x^*>0$ таке, що для $|\sigma|=1, \sigma \in \overline{K}$, $t>0$ правильна нерівність

$$\mathfrak{M}(x,F) \le 2\mu(x,F)n_0\Big(\frac{2g'(t)}{x^*}\Big). \tag{16}$$

Позначимо $E(x_0)=\big\{x=tx_0\colon t>0,\, \frac{2}{x^*}g'(t)>\psi(g(t))\big\}$ для фіксованого $x_0\in K$ і
$$E=\bigcup_{|x_0|=1,\ x_0\in\mathbb{R}^p_+} E(x_0).$$

Оскільки ([1]), $g'(t)\to+\infty$ $(t=|x|\to+\infty,\ x=tx_0,\ x\in K)$ рівномірно по $x_0\in K, |x_0|=1$, то з (16) отримаємо при $t=|x|\to+\infty$ $(x\in\overline{K}\setminus E,\ x=tx_0)$

$$\ln\mathfrak{M}(x,F)\le\ln 2+\ln\mu(x,F)+\ln n_0\Big(\frac{2}{x^*}g'(t)\Big)=\ln\mu(x,F)+o\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{2}{x^*}g'(t)\Big)\Big)\le$$
$$\le\ln\mu(x,F)+o(\psi^{-1}(\psi(\ln\mathfrak{M}(x,F))))=\ln\mu(x,F)+o(\ln\mathfrak{M}(x,F)).$$

Звідси, негайно отримуємо, що (2) виконується при $|x|\to+\infty$ $(x\in K\setminus E)$.

Нехай $S_1=\{x\in K\colon |x|=1\}$. Проведемо оцінку виняткової множини E

$$\tau_p(E\cap B_p(R))=\int\limits_{S_1}\Big(\int\limits_{E(x_0)\cap[0,R]}dt\Big)ds\le\frac{2}{x^*}\int\limits_{S_1}\Big(\int\limits_{E(x_0)\cap[0,R]}\frac{g'(t)}{\psi(g(t))}dt\Big)ds\le$$
$$\le\frac{2}{x^*}\int\limits_{S_1}\Big(\int\limits_{g(0)}^{g(R)}\frac{du}{\psi(u)}\Big)ds\le\frac{2}{x^*}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big)^{p-2}\frac{\Gamma(\frac{p-1}{2})\ldots\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{p}{2})\ldots\Gamma(\frac{3}{2})}\int\limits_0^{R\Phi(R)}\frac{du}{\psi(u)}=C\int\limits_0^{R\Phi(R)}\frac{du}{\psi(u)}.$$

Отже, з (15) отримуємо

$$\varliminf_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\tau_p(E\cap B_p(R))\le C\varliminf_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int\limits_0^{R\Phi(R)}\frac{du}{\psi(u)}=C\varliminf_{R\to+\infty}\frac{1}{\varphi(R)}\int\limits^{R\varphi(R)}\frac{du}{\psi(u)}=0,$$

тобто виконується (6). Теорему 1 доведено. □

Наступна теорема вказує на необхідність умови (7).

Теорема 2. *Для кожної послідовності $\Lambda_p=(\lambda_n)$ такої, що існують $\eta>0$, j $(1\le j\le p)$:*

$$\varlimsup_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\sum_{0<\lambda_k^{(j)}\le\eta\Phi(R)}\frac{1}{k\lambda_k^{(j)}}>0,\quad \lim_{k\to+\infty}\frac{\ln k}{\lambda_k^{(j)}}\Big(\sum_{0<\lambda_l^{(j)}\le\lambda_k^{(j)}}\frac{1}{l\lambda_l^{(j)}}\Big)=0,\tag{17}$$

існують функція $F\in H^p(\Lambda,\Phi)$, стала $h>0$, множина $E\subset\mathbb{R}^p_+$ такі, що
$$\varlimsup_{R\to+\infty}\frac{\tau_p(E\cap B_p(R))}{R}>0$$
і для кожного $x\in E$ виконується

$$\ln M(x,F)\ge(1+h)\ln\mu(x,F).\tag{18}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що умови (17) виконуються при $j=\ 1$. Тоді перша умова з (17) еквівалентна до умови
$$(\exists\eta>0)\colon\ \varlimsup_{T\to+\infty}\frac{1}{\varphi(T\eta)}\sum\nolimits_{0<\lambda_k^{(1)}\le T}\frac{1}{k\lambda_k^{(1)}}>0.$$
Тепер застосуємо теорему 2 з [9]. За цією теоремою існують стала $d>0$, цілий ряд Діріхле $f_1(x_1)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}f_k^{(1)}e^{x_1\lambda_k^{(1)}}$ такий, що $|f_k^{(1)}|\le e^{-\lambda_k^{(1)}\varphi(\eta\lambda_k^{(1)})}$, та множина $E^{(1)}\subset(0,+\infty)$ така, що $\mathcal{D}E\ge C>0$, для яких виконується

$$\ln f_1(x_1)>(1+d)\ln\mu(x_1,f_1),\ x_1\in E^{(1)}.\tag{19}$$

Оскільки

$$\ln\mu(x_1,f_1)\le\max\{-\lambda_k^{(1)}\varphi(\eta\lambda_k^{(1)})+x_1\lambda_k^{(1)},n>0\}\le\max\{-t\varphi(\eta t)+x_1t,t>0\}=$$
$$=\max\{-t\Phi^{-1}(\eta t)+x_1t,t>0\}=\max\Big\{-\frac{1}{\eta}\Phi(u)u+\frac{x_1}{\eta}\Phi(u),u>0\Big\}=$$
$$=\max\Big\{\frac{x_1-u}{\eta}\Phi(u),0<u\le x_1\Big\}\le\frac{1}{\eta}\int_0^{x_1}\Phi(t)dt\le\frac{x_1}{\eta}\Phi(x_1),$$

то отримаємо

$$\ln\mu(x_1,f_1)\le\frac{x_1}{\eta}\Phi(x_1),x_1\ge 0. \tag{20}$$

Не складно тепер вибрати функції $f_j\in H(\Lambda_1^{(j)}),\Lambda_1^{(j)}=(\lambda_k^{(j)})_{k=0}^{+\infty},j\in\{2,\dots,p\}$, такі, що

$$\ln\mu(t,f_j)\le\ln\mu(t,f_1)(t\ge 0),\ j\in\{2,\dots,p\}.$$

Оскільки $\ln\mu(t,f_j)\le\frac{t}{\eta}\Phi(t)(t\ge 0),j\in\{1,\dots,p\}$ то $f_j\in H(\Lambda_1^{(j)},\Phi),j\in\{1,\dots,p\}$.

Нехай тепер

$$F(x_1,x_2,\dots,x_p)=\prod_{j=1}^p f_j(x_j).$$

Для $x\in E\colon=\big\{x=(x_1,\dots,x_p)\colon x_1\in E^{(1)},\ x_1\ge\max\big\{x_2,x_3,\dots,x_p\big\}\big\}$ за нерівністю (19) та нерівністю Коші, ми отримуємо

$$\ln F(x)=\sum_{j=1}^p\ln f_j(x_j)\ge(1+d)\ln\mu(x_1,f_1)+\sum_{j=2}^p\ln\mu(x_j,f_j)\ge$$
$$\ge\Big(1+\frac{d}{p}\Big)\sum_{j=1}^p\ln\mu(x_j,f_j)=(1+h)\ln\mu(x,F),\quad h=\frac{d}{p}.$$

Оскільки, за нерівністю (20)

$$\ln\mu(x,F)\le\sum_{i=1}^p\ln\mu(x_i,f_i)\le p\ln\mu(x_1,f_1)\le\frac{p}{\eta}x_1\Phi(x_1)\le\frac{p}{\eta}|x|\Phi(|x|),$$

то $F\in H(\Lambda_p,\Phi)$. Залишається зауважити, що

$$\tau_p(E\cap B_p(R))=\int\limits_{E\cap B_p(R)}\frac{dx_1\dots dx_p}{|x|^{p-1}}\ge\int\limits_{E^{(1)}\cap[0,\frac{R}{\sqrt{p}}]}dx_1\int\limits_0^{x_1}dx_2\cdots\int\limits_0^{x_1}\frac{dx_p}{|x|^{p-1}}\ge$$
$$\ge\int\limits_{E^{(1)}\cap[0,\frac{R}{\sqrt{p}}]}\frac{x_1^{p-1}}{|x|^{p-1}}dx_1\ge p^{-(p-1)/2}\int\limits_{E^{(1)}\cap[0,\frac{R}{\sqrt{p}}]}\frac{x_1^{p-1}}{x_1^{p-1}}dx_1=p^{-(p-1)/2}\operatorname{meas}\big(E^{(1)}\cap[0,R/\sqrt{p}]\big).$$

Отже, при $p\ge 2$

$$\varlimsup_{R\to+\infty}\frac{\tau_p(E\cap B_p(R))}{R}\ge p^{-p/2}\varlimsup_{R\to+\infty}\frac{\operatorname{meas}(E^{(1)}\cap[0,\frac{R}{\sqrt{p}}])}{\big(R/\sqrt{p}\big)}=p^{-p/2}\mathcal{D}E\ge Cp^{-p/2}>0.$$

Теорему 2 доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. *The best possible description of exceptional set in Borel's relation for multiple Dirichlet series*// Mat. Stud. – 2008. – V.30, №2. – C.189–194.
2. Скасків О.Б., Орищин О.Г. *Узагальнення теореми Бореля для кратних рядів Діріхле* // Матем. студії. – 1997. – Т.8, №1. – С.43–52.
3. Скасків О.Б., Тракало О.М. *Про виняткову множину у співвідношенні Бореля для цілих подвійних рядів Діріхле* // Матем. студії. – 2001. – Т.15, №2. – С.163–172.
4. Filevych P.V. *Asymptotic relations between the means of Dirichlet series and their applications* // Mat. Stud. – V.19, №2. – P.127–140.
5. Гречанюк Н.И. *О поведении максимального члена кратного ряда Дирихле,задающего целую функцию* // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.41, №8. – С.1047–1053.
6. Скасків О.Б., Тракало О.М. *Асимптотичні оцінки інтегралів типу Лапласа*// Матем. студії. – 2002. – Т.18, №2. – С.125–146.
7. Скасків О.Б., Трусевич О.М. *Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів*// Препринт №17-1. – Львів: ІППММ НАН України, 1999. – 18с.
8. Тракало О. *Про співвідношення типу Бореля для кратних рядів Діріхле*// Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 2001. – Вип.59. – С.66–73.
9. Шеремета М.М. *Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* // Мат. заметки. – 1987. – Т.42, №2. – С.215–226
10. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993.
11. Тракало О., Скасків О. Виняткова множина у співвідношенні Бореля для кратних рядів Діріхле// International conference "Analysis and Topology" Lviv, May 26—June 7, 2008: Book of abstracts. – Lviv, 2008. – P.101.
12. Скасків О.Б. Асимптотичні властивості аналітичних функцій, представлених степеневими рядами і рядами Діріхле: Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – Львів, 1995.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет
zikrach.dm@gmail.com
matstud@franko.lviv.ua

Надійшло 12.01.2009
Після переробки 7.08.2009