УДК 519.6

С. М. Шахно

МЕТОД СТЕФЕНСЕНА ЗА УЗАГАЛЬНЕНИХ УМОВ ЛІПШИЦЯ ДЛЯ ПОДІЛЕНИХ РІЗНИЦЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

S. M. Shakhno. *Steffensen method under the generalized Lipschitz conditions for the first-order divided differences*, Mat. Stud. **32** (2009), 90–95.

Convergence of the Steffensen method for solving nonlinear operator equations in the Banach spaces under the generalized Lipschitz condition for the first-order divided differences is investigated. Sufficient conditions for quadratic speed of convergence of this method are found. A uniqueness region for solution of the problem is determined.

С. М. Шахно. *Метод Стеффенсена при обобщенных условиях Липшица для разделенных разностей первого порядка.* // Мат. Студiї. – 2009. – Т.32, №1. – С.90–95.

Исследована сходимость метода Стеффенсена для решения нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах при обобщенных условиях Липшица для разделенных разностей первого порядка. Найдены достаточные условия, обеспечивающие квадратическую скорость сходимости этого метода, а также установлена область единственности решения задачи.

1. Вступ. Розглянемо рiвняння

$$F(x) = x - \varphi(x) = 0, \tag{1}$$

де φ — нелiнiйний оператор в просторi Банаха X. Популярним рiзницевим методом розв'язування нелiнiйних рiвнянь є метод Стефенсена

$$x_{n+1} = x_n - [F(x_n, \varphi(x_n))]^{-1} F(x_n), \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \tag{2}$$

де через $F(x, y) = I - \varphi(x, y)$ позначено подiлену рiзницю першого порядку оператора $F(x)$ [7], а I — одиничний оператор. Метод Стефенсена збiгається з методом хорд [2, 5, 7, 8], якщо тiльки на кожному кроцi за початковi наближення вибирати величини x_n, $\varphi(x_n)$ Теоретичнi дослiдження методу Стефенсена для скалярного випадку проведенi А. М. Островським [3]. На банаховий простiр цей метод узагальнив С. Ю. Ульм [4]. Виявляється, що за природних умов, узагальнений метод Стефенсена, як i метод Ньютона [1], має квадратичний порядок збiжностi, при цьому не використовуються похiднi оператора. У випадку, коли подiленi рiзницi нелiнiйного оператора $F(x)$ задовольняють умову Лiпшиця з невiд'ємною сталою L, метод Стефенсена для розв'язування нелiнiйних операторних рiвнянь в банаховому просторi дослiджувався в [2, 4]. В [6] розглянуто деяке узагальнення методу Стефенсена, однак дослiдження проведено за доволi жорстких обмежень на оператор $F(x)$, зокрема, вимагається обмеженiсть

2000 *Mathematics Subject Classification:* 65J15; 65H10.

норми другої похідної Фреше від F. У статті [9] при дослідженні методу Ньютона запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість сталої L використано деяку додатну інтегровну функцію. Нами в [8] запропоновано подібні узагальнені умови Ліпшиця для оператора поділеної різниці першого порядку і за цих умов досліджено збіжність методу хорд. У цій статті ми досліджуємо збіжність методу Стефенсена для операторних рівнянь за узагальнених умов Ліпшиця для перших поділених різниць нелінійного оператора $F(x)$. Деякі результати з [4] про локальну збіжність методу Стефенсена за умов Ліпшиця для поділених різниць першого порядку, як частковий випадок, випливають з отриманих тут тверджень.

2. Попередні означення і леми. Нехай F — оператор, визначений на відкритій опуклій підмножині D банахового простору X зі значеннями в X, і $x, y \in D$. Лінійний оператор $F(x,y)$, який задовольняє умову $F(x,y)(x-y) = F(x) - F(y)$, називатимемо *поділеною різницею першого порядку* від F за точками x і y. У випадку $x = y$ вважатимемо, що $F(x,x) = F'(x)$, де $F'(x)$ — похідна за Фреше оператора F у точці x.

Позначимо через $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ відкриту, а через $\overline{B}(x_0, r)$ — замкнену кулю радіуса r з центром в точці x_0.

У доведених у цій статті твердженнях, замість умов Ліпшиця на оператор поділеної різниці $F(x,y)$ вигляду

$$(\forall x, y, u, v \in D)\colon \quad \|F(x,y) - F(u,v)\| \le L(\|x-u\| + \|y-v\|)$$

(умова Ліпшиця в області D зі сталою L) та

$$(\forall x, y \in B(x_0, r))\colon \quad \|F(x,y) - F'(x_0)\| \le L(\|x-x_0\| + \|y-x_0\|)$$

(центральна умова Ліпшиця в кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L) будуть розглянуті умови, в яких праві частини умов будуть замінені відповідно на інтеграли $\int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(z)dz$ та $\int_0^{\|x-x_0\|+\|y-y_0\|} L(z)dz$, відповідно, де $L(z)$ — додатна інтегровна функція.

Надалі будемо припускати неперервність оператора $\varphi(x)$ в потрібній нам області.

Використовуючи теорему Банаха ([1]), ми отримуємо таке твердження.

Лема 1. *Нехай x^* таке, що існує $F'(x^*)^{-1}$, і при цьому F має поділені різниці $F(x,y) = I - \varphi(x,y)$, які задовольняють умови*

$$(\forall x, y \in B(x^*, \alpha r))\colon \quad \|F'(x^*)^{-1} F(x,y) - I\| \le \int_0^{\varrho(x)+\varrho(y)} L(z)dz$$

і

$$\|\varphi(x,y)\| \le M,$$

де $y = \varphi(x)$, L — додатна інтегровна функція, $\alpha = \max\{1; M\}$, $\varrho(x) = \|x - x^*\|$. Якщо r таке, що виконується умова $\displaystyle\int_0^{(1+M)r} L(z)dz \le 1$, то оператор $F(x,y)$ оборотний в кулі $B(x^*, \alpha r))$ і $\|F(x,y)^{-1}F'(x^*)\| \le \Big(1 - \displaystyle\int_0^{\varrho(x)+\varrho(y)} L(z)dz\Big)^{-1}$.

Доведення. Справді, з тотожності $F(x,y)^{-1}F'(x^*) = [I - (I - F'(x^*)^{-1}F(x,y))]^{-1}$, враховуючи умови леми, за теоремою Банаха отримуємо її твердження. □

Нам потрібна також така елементарна лема.

Лема 2. *Нехай $h(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t L(z)dz$, $0 \le t \le r$, де $L(u)$ — додатна і монотонно неспадна функція на $[0; r]$. Тоді $h(t)$ монотонно неспадна на проміжку $[0; r]$.*

3. Збіжність методу Стефенсена. Радіус області збіжності і порядок збіжності методу Стефенсена встановлює така теорема.

Теорема 1. *Нехай оператор F визначений в області D банахового простору X зі значеннями у банаховому просторі X. Припустимо, що: 1) рівняння (1) має розв'язок $x^* \in B(x^*, r) \subset D$ такий, що існує оборотна похідна Фреше $F'(x^*)$; 2) для всіх $x, y, z \in B(x^*, \alpha r) \subset D$ оператор F має поділені різниці $F(x, y) = I - \varphi(x, y)$, які задовольняють умови*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(z, x^*) - F(x, y))\| \leq \int_0^{\|x-z\|+\varrho(y)} L(z)dz, \quad i \quad \|\varphi(x, x^*)\| \leq M, \tag{3}$$

де $\alpha = \max\{1; M\}$, $\varrho(x) = \|x - x^*\|$ і L — неспадна; 3) $r > 0$ задовольняє нерівність

$$\int_0^{Mr} L(z)dz + \int_0^{(1+M)r} L(z)dz \leq 1\ ; \tag{4}$$

4) початкове наближення $x_0 \in B(x^*, r)$ задовольняє нерівність

$$\frac{qM}{\rho(\varphi(x_0))} \cdot \|x_0 - x^*\| < 1, \tag{5}$$

де $q = \Big(1 - \int_0^{\rho(x_0)+\rho(\varphi(x_0))} L(z)dz\Big)^{-1} \int_0^{\rho(\varphi(x_0))} L(z)dz$. Тоді послідовність (2) збігається до розв'язку x^* і справджується оцінка

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\rho(\varphi(x_0))}{qM} \Big(\frac{qM}{\rho(\varphi(x_0))} \|x_0 - x^*\|\Big)^{2^n},\ n \in \{1, 2, \ldots\}. \tag{6}$$

Доведення. Виберемо довільне $x_0 \in B(x^*, r)$, де r задовольняє умову (4), тоді $q < 1$. Справді, з монотонності L за лемою 2 одержуємо

$$q = \frac{\rho(\varphi(x_0)) \int_0^{\rho(\varphi(x_0))} L(z)dz}{\rho(\varphi(x_0))\Big(1 - \int_0^{\rho(\varphi(x_0))+\rho(x_0)} L(z)dz\Big)} \leq \frac{\rho(\varphi(x_0)) \int_0^{Mr} L(z)dz}{Mr\Big(1 - \int_0^{2r} L(z)dz\Big)} \leq \frac{\|x^* - x_0\|}{r} < 1.$$

Якщо $x_k \in B(x^*, r)$, то за рівністю (2) маємо

$$\begin{gathered} x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - F(x_k, \varphi(x_k))^{-1} F(x_k) = \\ = -[F(x_k, \varphi(x_k))^{-1} F(x^*, x^*)] F(x^*, x^*)^{-1} [F(x_k, x^*) - F(x_k, \varphi(x_k))](x_k - x^*). \end{gathered}$$

Тоді, використовуючи лему 1 та умови (3), отримаємо

$$\begin{gathered} \|x_{k+1} - x^*\| \leq \|F(x_k, \varphi(x_k))^{-1} F(x^*, x^*)\| \cdot \|F(x^*, x^*)^{-1} [F(x_k, x^*) - F(x_k, \varphi(x_k))] \times \\ \times (x_k - x^*)\| \leq \int_0^{\rho(\varphi(x_k))} L(z)dz \Big(1 - \int_0^{\rho(x_k)+\rho(\varphi(x_k))} L(z)dz\Big)^{-1} \rho(x_k), \\ \|\varphi(x_k) - x^*\| = \|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)\| \leq \|\varphi(x_k, x^*)\| \, \|x_k - x^*\| \leq M\|x_k - x^*\|. \end{gathered}$$

Поклавши вище $k = 0$, ми дістанемо, що

$$\begin{gathered} \|x_1 - x^*\| \leq q\|x_0 - x^*\| < \|x_0 - x^*\| \leq \alpha\|x_0 - x^*\|, \\ \|\varphi(x_1) - x^*\| \leq M\|x_1 - x^*\| < M\|x_0 - x^*\| \leq \alpha\|x_0 - x^*\|. \end{gathered}$$

Тобто, x_1 і $\varphi(x_1)$ належать до кулі $B(x^*, \alpha r)$. Це встановлює, що (2) можна повторити довільну кількість разів. За методом математичної індукції встановлюємо, що всі

x_k, $\varphi(x_k) \in B(x^*, \alpha r)$ і $\rho(x_k) = \|x_k - x^*\|$ та $\rho(\varphi(x_k)) = \|\varphi(x_k) - x^*\|$ монотонно спадають. Далі, для всіх $k \in \{0, 1, \dots\}$ ми маємо

$$\|x_{k+1} - x^*\| \le \frac{1}{\rho(\varphi(x_k))} \int_0^{\rho(\varphi(x_k))} L(z)dz \cdot \rho(\varphi(x_k))\rho(x_k) \Big(1 - \int_0^{\rho(x_k)+\rho(\varphi(x_k))} L(z)dz\Big)^{-1} \le$$
$$\le \frac{1}{\rho(\varphi(x_0))} \int_0^{\rho(\varphi(x_0))} L(z)dz \cdot \rho(\varphi(x_k))\rho(x_k) \Big(1 - \int_0^{\rho(x_0)+\rho(\varphi(x_0))} L(z)dz\Big)^{-1} =$$
$$= \frac{q}{\rho(\varphi(x_0))} \|\varphi(x_k) - x^*\| \|x_k - x^*\| \le \frac{qM}{\rho(\varphi(x_0))} \|x_k - x^*\|^2 =$$
$$= \frac{\rho(\varphi(x_0))}{qM} \Big(\frac{qM}{\rho(\varphi(x_0))} \|x_k - x^*\|\Big)^2 \le \dots \le \frac{\rho(\varphi(x_0))}{qM} \Big(\frac{qM}{\rho(\varphi(x_0))} \|x_0 - x^*\|\Big)^{2^{k+1}}.$$

Отже, отримали (6). □

Нерівність (6) вказує на те, що порядок збіжності методу Стефенсена дорівнює 2.

Наступна теорема встановлює область, в якій розв'язок рівняння (1) єдиний.

Теорема 2. *Нехай $F(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0$, $F'(x^*)^{-1}$ існує, F має поділені різниці $F(x, x^*) = I - \varphi(x, x^*)$ в $B(x^*, \alpha r)$, які задовольняють радіальну умову Ліпшиця з L у середньому*

$$(\forall x \in B(x^*, \alpha r)) \colon \quad \|F'(x^*)^{-1} F(x, x^*) - I\| \le \int_0^{\rho(x)} L(z)dz, \tag{7}$$

де $\rho(x) = \|x - x^*\|$, $\|\varphi(x, x^*)\| \le M$, $\alpha = \max\{1; M\}$ і L — додатна інтегровна функція. Нехай r задовольняє $\int_0^r L(z)dz \le 1$. Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок x^* в $B(x^*, r)$.

Доведення. Припустимо, що $x^{**} \in B(x^*, r)$, $x^{**} \ne x^*$, також розв'язок рівняння (1). Тоді $F'(x^*)^{-1} F(x^{**}) = 0$. Отже,

$$x^{**} - x^* = x^{**} - x^* - F'(x^*)^{-1} F(x^{**}) = -F'(x^*)^{-1} [F(x^{**}) - F(x^*) - F'(x^*)(x^{**} - x^*)] =$$
$$= -F'(x^*)^{-1} [F(x^{**}, x^*) - F(x^*, x^*)](x^{**} - x^*) = -[F'(x^*)^{-1} F(x^{**}, x^*) - I](x^{**} - x^*).$$

Тоді, за умови (7), отримаємо

$$\|x^{**} - x^*\| \le \int_0^{\rho(x^{**})} L(z)dz \cdot \|x^{**} - x^*\| < \int_0^r L(z)dz \cdot \|x^{**} - x^*\| \le \|x^{**} - x^*\|,$$

що суперечить нашому припущенню. Отже, $x^{**} = x^*$. Теорему 2 доведено. □

При вивченні методу Стефенсена традиційними є припущення, що поділені різниці першого порядку задовольняють умову Ліпшиця. Вважаючи, що $L(z) \equiv L$, тобто є сталою, ми отримаємо з теорем 1 та 2 такі наслідки.

Наслідок 1. *Припустимо, що $F(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0$, $F'(x^*)^{-1} = [I - \varphi'(x^*)]^{-1}$ існує, F має поділені різниці, які задовольняють умову Ліпшиця*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(z, x^*) - F(x, y))\| \le L(\|x - z\| + \|y - x^*\|)$$

та $\|\varphi(x, x^*)\| \le M \quad (\forall x, y, z \in B(x^*, \alpha r))$, $\alpha = \max\{1; M\}$, де $y = \varphi(x)$, L, M — додатні числа і $r = \frac{1}{(1+2M)L}$. Нехай виконується (5), де $q = \dfrac{L\|\varphi(x_0) - x^*\|}{1 - L(\|\varphi(x_0) - x^*\| + \|x_0 - x^*\|)}$. Тоді метод Стефенсена (2) збігається для всіх $x_0 \in B(x^*, r)$ і виконується (6).

Наслідок 2. *Припустимо, що* $F(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0$, $F'(x^*)^{-1}$ *існує,* F *має поділені різниці* $F(x, x^*) = I - \varphi(x, x^*)$ *в* $B(x^*, \alpha r)$, *які задовольняють радіальну умову Ліпшиця*

$$\|F'(x^*)^{-1}F(x, x^*) - I\| \le L\|x - x^*\|$$

і $\|\varphi(x, x^*)\| \le M$, *де* $\alpha = \max\{1, M\}$, L *і* M *— додатні числа, і* $r = \frac{1}{L}$. *Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок* x^* *у відкритій кулі* $B(x^*, r)$.

У теоремі 1 умови формулюються в околі розв'язку x^*, який, зазвичай, нам невідомий, і, тому ці умови є складними для перевірки. Наступна теорема містить умови в околі початкового наближення x_0.

Теорема 3. *Нехай* F *— нелінійний оператор, визначений у області* D *банахового простору* X *зі значеннями у цьому ж просторі. Припустимо, що: 1) рівняння (1) має розв'язок* $x^* \in \overline{B}(x_0, r) \subset D$*; 2) для всіх* $x, y, z \in \overline{B}(x_0, (1+\alpha)r)$ *виконуються оцінки* $\|F(x, y)^{-1}\| \le K$, $\|\varphi(x, y)\| \le M$, $\|\varphi(x, y) - \varphi(x, z)\| \le \int_0^{\|y-z\|} L(z)dz$, *причому* $\alpha = \max\{lr, M\}$, L *— неспадна функція; 3)* $lr < 1$, *де* $l = K\Lambda M$, $\Lambda = \int_0^{\varrho(\varphi(x_0))} L(z)dz/\varrho(\varphi(x_0))$.
Тоді розв'язок рівняння (1) у кулі $\overline{B}(x_0, r)$ *єдиний і послідовність (2) збігається до* x^* *зі швидкістю*

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{1}{l}(lr)^{2^n}, \quad n \in \{0, 1, \ldots\}. \tag{8}$$

Доведення. При $n = 0$ оцінка (8) виконується на основі умови 1), причому x_0 і $\varphi(x_0)$ належать до кулі $\overline{B}(x_0, (1+\alpha)r)$. Справді,

$$\|x_0 - \varphi(x_0)\| = \|x_0 - x^* - \varphi(x_0) + \varphi(x^*)\| = \|\varphi(x_0, x^*)(x_0 - x^*)\| + \|x_0 - x^*\| \le$$
$$\le (1 + M)r \le (1 + \alpha)r.$$

З тотожності $x_{n+1} - x^* = F(x_n, \varphi(x_n))^{-1}[\varphi(x_n, x^*) - \varphi(x_n, \varphi(x_n))](x_n - x^*)$, враховуючи, що за лемою 2 функція $\frac{1}{t}\int_0^t L(z)dz$ неспадна, отримаємо

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le K\int_0^{\varrho(\varphi(x_n))} L(z)dz\|x_n - x^*\| \le K \cdot \frac{\int_0^{\varrho(\varphi(x_n))} L(z)dz}{\varrho(\varphi(x_n))}\varrho(\varphi(x_n))\|x_n - x^*\| \le$$

$$\le K \cdot \frac{\int_0^{\varrho(\varphi(x_0))} L(z)dz}{\varrho(\varphi(x_0))}\|\varphi(x_n) - x^*\| \cdot \|x_n - x^*\| \le K\Lambda M \cdot \|x_n - x^*\|^2,\ n \in \{0, 1, \ldots\}. \tag{9}$$

Користуючись методом математичної індукції з оцінок (9) отримуємо (8).

Оцінка (9) правильна за припущення, що елементи x_n і $\varphi(x_n)$ належать до замкненої кулі $\overline{B}(x_0, (1+\alpha)r)$. Але

$$\|x_n - x_0\| = \|x_n - x^*\| + \|x^* - x_0\| \le \tfrac{1}{l}(lr)^{2^n} + r \le (1 + lr)r \le (1 + \alpha)r$$

і

$$\|\varphi(x_n) - x_0\| \le \|\varphi(x_n) - \varphi(x^*) + x^* - x_0\| \le \|\varphi(x_n, x^*)(x_n - x^*)\| + \|x^* - x_0\| \le$$
$$\le Mlr^2 + r < (1 + M)r \le (1 + \alpha)r.$$

З попереднього випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Якщо рівняння (1) мало б в кулі $\overline{B}(x_0, r)$ ще один розв'язок $x^{**} \ne x^*$, то аналогічно можна було б довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^{**}$. На основі єдиності граничного елемента збіжної послідовності $\{x_n\}$ розв'язок у кулі $\overline{B}(x_0, r)$ єдиний. Теорему 3 доведено. □

Зауважимо, що у випадку $L(u) \equiv \Lambda$ теорема 3 збігається з теоремою 2 з [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука. – 1984. – 752 с.
2. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир. – 1975. – 558 с.
3. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений со многими неизвестными. – М.: ИЛ. – 1963. – 558 с.
4. Ульм С.Ю. *Обобщение метода Стеффенсена для решения нелинейных операторных уравнений* // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. – 1964. – Т.4, №6. – С. 1093–1097.
5. Шахно С.М. *Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь* // Мат. студії. – 2004, – Т.22, №1. – С. 79–86.
6. Amat S., Busquier S., Candella V. *A class of quasi-Newton generalized Steffensen methods on Banach spaces* // J. Comput. Appl. Math. – 2002. – V.149. – P. 397–406.
7. Argyros I.K. *On an Algorithm for Solving Nonlinear Operator Equation* // Zeitschr. für Anal. und ihre Anwend. – 1991. – V. 10, №1. – P. 83–92.
8. Shakhno S.M. *On the Secant method under generalized Lipschitz conditions for the divided difference operator* // 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Zürich, Juli 16-20, 2007, Abstracts for ICIAM 07. – P. 445.
9. Wang X. *Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space* // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2000. – V.20. – P. 123–134.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
факультет прикладної математики та інформатики

Надійшло 31.08.2007
Після переробки 1.03.2009