

УДК 517.5

Б. В. Винницький, Р. В. Хаць, М. І. Юрків

ПРО ВЛАСТИВОСТІ УСЕРЕДНЕНЬ ДІЙСНИХ ФУНКЦІЙ, ПОВ'ЯЗАНІ З ГОЛОМОРФНИМИ ФУНКЦІЯМИ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ

B. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats', M. I. Yurkiv. *On properties of averaging of the real-valued functions connected with holomorphic functions of regular growth*, Mat. Stud. **32** (2009), 86–89.

For a locally-integrable function ψ on the interval $[1; +\infty)$ we investigate the problem on interdependence between the conditions $\psi(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1})$ ($E \not\rightarrow t \rightarrow +\infty$), $\rho_1 \in (0; \rho)$, and

$$\int_1^r \frac{\psi(t)}{t} dt = \frac{\Delta}{\rho} r^\rho + o(r^{\rho_2}) \quad (r \rightarrow +\infty), \quad \rho_2 \in (0; \rho).$$

Б. В. Винницький, Р. В. Хаць, М. І. Юрків. *О свойствах усреднений действительных функций, связанные с голоморфными функциями регулярного роста* // Мат. Студії. – 2009. – Т.32, №1. – С.86–89.

Для локально интегрируемой на промежутке $[1; +\infty)$ функции ψ исследуется вопрос о взаимосвязи между условиями $\psi(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1})$ ($E \not\rightarrow t \rightarrow +\infty$), $\rho_1 \in (0; \rho)$, и

$$\int_1^r \frac{\psi(t)}{t} dt = \frac{\Delta}{\rho} r^\rho + o(r^{\rho_2}) \quad (r \rightarrow +\infty), \quad \rho_2 \in (0; \rho).$$

Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\rho, \rho_1 \in (0; +\infty)$ і функція $\psi: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є локально інтегрованою на $[1; +\infty)$. Тоді легко побачити, що з умови

$$\psi(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1}) \quad (t \rightarrow +\infty) \tag{1}$$

випливає, що

$$\Psi(r) := \int_1^r \frac{\psi(t)}{t} dt = \frac{\Delta}{\rho} r^\rho + o(r^{\rho_2}) \quad (r \rightarrow +\infty) \tag{2}$$

з $\rho_2 = \rho_1$. Якщо функція ψ є монотонною, то ([5, с. 143], [6, лема 2.3, с. 6]) з асимптотичного співвідношення (2), що виконується з деяким $\rho_2 \in (0; \rho)$, випливає співвідношення (1) з деяким $\rho_1 \in (0; \rho)$. У випадку ж $\rho_2 = \rho$ із співвідношення (2) отримуємо (1) з $\rho_1 = \rho$ ([1, с. 254], [2, с. 92]).

Якщо функція ψ не є монотонною, то (1) не обов'язково впливає з (2). Проте правильне таке твердження ([3, с. 194], [4, с. 46]).

Теорема А. Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$ і функція $\psi: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є локально інтегрованою на $[1; +\infty)$. Якщо виконується (2) з $\rho_2 = \rho$ і $\psi(t) \leq \Delta t^\rho + o(t^\rho)$ ($t \rightarrow +\infty$), то $\psi(t) = \Delta t^\rho + o(t^\rho)$ ($E \not\rightarrow t \rightarrow +\infty$), де $E \subset [0; +\infty)$ така множина, що (тут μ — лінійна міра Лебега на $\mathbb{R}$) $\mu(E \cap [0; r]) = o(r)$ ($r \rightarrow +\infty$).

Виникає природне запитання стосовно можливості отримання аналогу теореми А у випадку співвідношень (2) з $\rho_2 \in (0; \rho)$ та (1) з $\rho_1 \in (0; \rho)$. Потреба у такому твердженні

2000 *Mathematics Subject Classification*: 26A48, 30D15, 30D20.

Keywords: averaging property, holomorphic function, regular growth

doi:10.30970/ms.32.1.86-89

© Б. В. Винницький, Р. В. Хаць, М. І. Юрків, 2009

виникає при вивченні голоморфних у півплощині функцій покращеного регулярного зростання ([7, с. 304]). Доведені нижче теореми 1 і 2 показують, що потрібних аналогів нема.

Відомо ([4, с. 32]), що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |f(t)||}{(1+|t|)^{1+\gamma}} dt < +\infty$$

для кожного $\gamma > \max\{1; \rho\}$ і для кожної функції f , голоморфної у верхній півплощині, скінченного порядку ρ , де $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — кутові граничні значення функції f .

Теорема 1. Для будь-яких $\Delta \in [0; +\infty)$ і $\rho \in (0; +\infty)$ існує така функція $\psi: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, локально інтегровна на $[1; +\infty)$, що для кожного $\rho_1 \in (0; \rho)$ виконується

$$\psi(t) \leq \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1}), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$ виконується (2),

$$\psi(t) \leq \Delta t^\rho - t^\rho, \quad t \in E, \quad (4)$$

для деякої множини $E \subset [1; +\infty)$ нескінченної міри і

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\psi(t)|}{t^{1+\gamma}} dt < +\infty \quad (5)$$

для кожного $\gamma > \rho$.

Доведення. Можемо вважати, що $\Delta = 0$, бо в протилежному випадку розглянемо функцію $\tilde{\psi}(t) = \psi(t) - \Delta t^\rho$. Нехай $\beta \in (\max\{1/\rho; 1\}; +\infty)$, $\mu_k = k^\beta$, $t_k = \mu_k + k^{\beta-2}$, $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\mu_k; t_k]$ і $\psi(t) = \begin{cases} -t^\rho, & t \in E, \\ 0, & t \notin E. \end{cases}$ Тоді для кожного $\rho_1 \in (0; \rho)$ виконується (3), $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \mu_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta-2} = +\infty$, для цієї множини E виконується (4) і, очевидно, (5) також виконується. Далі, якщо $r \in [t_{n-1}; \mu_n)$, то

$$\begin{aligned} \Psi(r) &= \int_1^r \frac{\psi(t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\mu_k}^{t_k} \frac{\psi(t)}{t} dt = - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\mu_k}^{t_k} t^{\rho-1} dt = - \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{n-1} (t_k^\rho - \mu_k^\rho) = \\ &= - \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{n-1} ((k^\beta + k^{\beta-2})^\rho - k^{\beta\rho}) = - \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{n-1} k^{\beta\rho} ((1 + k^{-2})^\rho - 1) = -(1 + o(1)) \sum_{k=1}^{n-1} k^{\beta\rho-2} = \\ &= -(1 + o(1)) \frac{n^{\beta\rho-1}}{\beta\rho-1} = -(1 + o(1)) \frac{\mu_n^{\rho-1/\beta}}{\beta\rho-1} = -(1 + o(1)) \frac{r^{\rho-1/\beta}}{\beta\rho-1}, \quad r \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

бо

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha = (1 + o(1)) \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}, \quad n \rightarrow \infty, \quad \alpha > -1.$$

Нехай $r \in [\mu_n; t_n)$. Тоді

$$|r^\rho - \mu_n^\rho| \leq \mu_{n+1}^\rho - \mu_n^\rho = \beta\rho(1 + o(1))\mu_n^{\rho-1/\beta} \leq \beta\rho(1 + o(1))r^{\rho-1/\beta},$$

якщо $r \rightarrow +\infty$, і

$$\begin{aligned}\Psi(r) &= -\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\mu_k}^{t_k} t^{\rho-1} dt - \int_{\mu_n}^r t^{\rho-1} dt = -\frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{n-1} (t_k^\rho - \mu_k^\rho) - \frac{1}{\rho} (r^\rho - \mu_n^\rho) = \\ &= -(1+o(1)) \frac{n^{\beta\rho-1}}{\beta\rho-1} - \frac{1}{\rho} (r^\rho - \mu_n^\rho), \quad r \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Отже, така функція ψ задовольняє також умову (2). $\square$

Теорема 2. Для будь-яких $\Delta \in [0; +\infty)$ і $\rho \in (0; +\infty)$ існує така функція $\psi: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, локально інтегровна на $[1; +\infty)$, що для кожного $\rho_1 \in (0; \rho)$ виконується (3), для жодного $\rho_2 \in (0; \rho)$ не виконується (2), для кожного $\gamma > \rho$ виконується (5), і для деякого $\rho_3 \in (0; \rho)$ та деякої множини $E \subset [1; +\infty)$ скінченної міри

$$\psi(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_3}), \quad E \not\ni t \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Доведення. Вважаємо, що $\Delta = 0$. Нехай $\beta \in (0; 1)$, $\tilde{\rho} = \rho + 1/\beta$, $\mu_k = k^\beta$, $t_k = \mu_k + k^{\beta-2}$, $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\mu_k; t_k]$ і $\psi(t) = \begin{cases} 0, & t \notin E, \\ -t^{\tilde{\rho}}, & t \in E. \end{cases}$ Тоді для кожного $\rho_1 \in (0; \rho)$ виконується (3), $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \mu_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta-2} < +\infty$, і для цієї множини E виконується (6). Крім цього, $\beta\tilde{\rho} - 2 > -1$,

$$\begin{aligned}\Psi(\mu_n) &= \int_1^{\mu_n} \frac{\psi(t)}{t} dt = -\frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{n-1} ((k^\beta + k^{\beta-2})^{\tilde{\rho}} - k^{\beta\tilde{\rho}}) \\ &= -(1+o(1)) \frac{\mu_n^{\tilde{\rho}-1/\beta}}{\beta\tilde{\rho}-1} = -(1+o(1)) \frac{\mu_n^\rho}{\beta\tilde{\rho}-1}, \quad n \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

і, тому, для жодного $\rho_2 \in (0; \rho)$ не виконується (2). До того ж, $\beta(\tilde{\rho} - \gamma) - 2 < -1$,

$$(k^\beta + k^{\beta-2})^{\tilde{\rho}-\gamma} - k^{\beta(\tilde{\rho}-\gamma)} = (\tilde{\rho} - \gamma)(1+o(1))k^{\beta(\tilde{\rho}-\gamma)-2}, \quad k \rightarrow \infty,$$

$$\int_1^{\mu_{n-1}} \frac{|\psi(t)|}{t^{1+\gamma}} dt = \frac{1}{\tilde{\rho} - \gamma} \sum_{k=1}^{n-1} ((k^\beta + k^{\beta-2})^{\tilde{\rho}-\gamma} - k^{\beta(\tilde{\rho}-\gamma)}) = O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже, (5) також виконується. $\square$

Теорема 3. Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$ і функція $\psi: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є локально інтегровою на $[1; +\infty)$. Тоді, якщо виконується (3) для деякого $\rho_1 \in (0; \rho)$ і виконується (2) для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$, то для кожного $\rho_3 \in (\max\{\rho_1; \rho_2\}; \rho)$ виконується (6), де $E \subset [1; +\infty)$ така множина, що для кожного $\rho_4 \in (\max\{\rho_1; \rho_2\}; \rho_3)$

$$\int_{E \cap [1; r]} t^{\rho_4-1} dt = o(r^{\max\{\rho_1; \rho_2\}}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Доведення. Можемо вважати, що $\Delta = 0$. Нехай $E = \{t > 0: \psi(t) \leq -t^{\rho_4}\}$. Тоді, використовуючи (3), матимемо

$$\begin{aligned}\Psi(r) &= \left(\int_{E \cap [1; r]} + \int_{[1; r] \setminus E} \right) \frac{\psi(t)}{t} dt \leq - \int_{E \cap [1; r]} t^{\rho_4-1} dt + \int_{[1; r]} o(t^{\rho_1-1}) dt \\ &= - \int_{E \cap [1; r]} t^{\rho_4-1} dt + o(r^{\rho_1}), \quad r \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Звідси, врахувавши (2), одержуємо (7). Крім цього, $\psi(t) \geq -t^{\rho_4}$, $t \notin E$, і тому виконується (6). $\square$

Теорема 4. Для будь-яких $\Delta \in [0; +\infty)$ і $\rho \in (0; +\infty)$ існує локально інтегровна на $[1; +\infty)$ функція $\psi: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ така, що для кожного $\rho_1 \in (0; \rho)$ виконується (3), для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$ виконується (2) і для деякої множини $E \subset [1; +\infty)$ такої, що

$$\int_{E \cap [1; r]} t^{\rho-1} dt = o(r^{\max\{\rho_1; \rho_2\}}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (8)$$

виконується (4).

Доведення. Вважаємо, що $\Delta = 0$. Нехай $\beta \in (1/\rho; +\infty)$, $\mu_k = k^\beta$, $t_k = \mu_k + k^{\beta-2}$, $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\mu_k; t_k]$ і $\psi(t) = \begin{cases} -t^\rho, & t \in E, \\ 0, & t \notin E. \end{cases}$ Тоді (див. доведення теореми 1) $\Psi(r) \geq O(r^{\rho-1/\beta})$, $r \rightarrow +\infty$. Тому (2) виконується з будь-яким $\rho_2 \in (\rho - 1/\beta; \rho)$, (3) виконується з $\rho_1 = \rho_2$ і $\max\{\rho_1; \rho_2\} = \rho_2$. Крім цього (див. доведення теореми 1),

$$\int_{E \cap [1; r]} t^{\rho-1} dt = (1 + o(1)) \frac{r^{\rho-1/\beta}}{\beta\rho - 1} = o(r^{\rho_2}), \quad r \rightarrow +\infty,$$

і тому теорему 4 доведено. $\square$

Отже, в теоремі 3 множину $E \subset [1; +\infty)$ не можна замінити множиною, яка задовольняє умову (8).

ЛІТЕРАТУРА

1. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1968. – 320 с.
2. Levin B. Ya. Lectures on entire functions. – Transl. Math. Monographs, V.150. – Providence RI: Amer. Math. Soc., 1996. – 248 p.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
4. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
5. Винницький Б. В., Хаць Р. В. *Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку* // Матем. студії. – 2004. – Т. 21, №2. – С.140–150.
6. Хаць Р. В. Цілі функції покращеного регулярного зростання. – Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. н. – Львів, 2006. – 16 с.
7. Юрків М. І. *Про асимптотичні властивості голоморфних у півплощині функцій покращеного регулярного зростання* // Міжнар. матем. конф. ім. В. Скоробогата. Тези доп. – Львів, 2007. – С.304.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
Інститут фізики, математики та інформатики
khats@ukr.net

Надійшло 28.10.2007