

УДК 517.53

О. Ю. ЗАДОРЖНА, О. Б. СКАСКІВ

ПРО ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків. *On the domains of convergence of the double random Dirichlet series*, Mat. Stud. **32** (2009), 81–85.

We establish relations between the domains of convergence and absolute convergence of the double random Dirichlet series.

О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків. *Об областях сходимости случайных двойных рядов Дирихле* // Мат. Студії. – 2009. – Т.32, №1. – С.81–85.

Устанавливаются соотношения между областями сходимости и абсолютной сходимости двойных случайных рядов Дирихле.

Вступ. Нехай $(\lambda_n^{(1)}), (\lambda_m^{(2)})$ — дві зростаючі до $+\infty$ послідовності невід'ємних чисел і (a_{nm}) — послідовність комплексних чисел. Розглянемо подвійний ряд Діріхле вигляду

$$F(s_1, s_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} \exp\{s_1 \lambda_n^{(1)} + s_2 \lambda_m^{(2)}\}, \quad s_j = \sigma_j + it_j \quad (j \in \{1, 2\}). \quad (1)$$

Нехай $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ — пара додатних чисел, таких що

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \ln m}{\tau_1 \lambda_n^{(1)} + \tau_2 \lambda_m^{(2)}} \leq 1. \quad (2)$$

Через $\mathbf{G}_c(F)$, $\mathbf{G}_a(F)$ позначимо відповідно області збіжності та абсолютної збіжності ряду (1), а $G_c(F) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \operatorname{Re} z, z \in \mathbf{G}_c(F)\}$, $G_a(F) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \operatorname{Re} z, z \in \mathbf{G}_a(F)\}$ — їхні сліди в $\{x \in \mathbb{R}^2 : x = \operatorname{Re} z, z \in \mathbb{C}^2\}$, а через $G_\mu(F)$ позначимо область існування максимального члена $\mu(\sigma_1, \sigma_2) = \max\{|a_{nm}| \exp\{\sigma_1 \lambda_n^{(1)} + \sigma_2 \lambda_m^{(2)}\} : n, m > 0\}$ ряду Діріхле, тобто множину таких $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$, що $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < \infty$.

Області $\mathbf{G}_c(F)$, $\mathbf{G}_a(F)$, $G_\mu(F)$ опуклі, а абсциси координат точок, що належать до їхніх меж називаються відповідно спряженими абсцисами збіжності, абсолютної збіжності та спряженими абсцисами існування максимального члена. Так, наприклад, точка $(\sigma_{c1}, \sigma_{c2})$ є парою спряжених абсцис збіжності ряду (1), якщо ряд збігається у кожній області вигляду $\{(s_1, s_2) : \operatorname{Re} s_1 < \sigma_{c1}, \operatorname{Re} s_2 < \sigma_{c2}\}$ і кожна з областей вигляду $\{(s_1, s_2) : \operatorname{Re} s_1 < \sigma_1^0, \operatorname{Re} s_2 < \sigma_2^0\}$, де або $\sigma_1^0 > \sigma_{c1}$ і $\sigma_2^0 \geq \sigma_{c2}$, або $\sigma_1^0 \geq \sigma_{c1}$ і $\sigma_2^0 > \sigma_{c2}$, містить точки, у яких ряд розбіжний.

Зрозуміло, що $G_a \subset G_c \subset G_\mu$, а також відомо, що ([1]) $G_\mu \subset G_a + \tau$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — ймовірнісний простір. Для дійсної або комплексної випадкової величини ξ покладемо $\mathbf{M}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$ — її математичне сподівання та $\mathbf{D}\xi =$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 30B50.

Keywords: convergence domain, double random Dirichlet series, absolute convergence domain

doi:10.30970/ms.32.1.81-85

© О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків, 2009

$\mathbf{M}(|\xi - M\xi|^2)$ — дисперсія. Дійсну випадкову величину ξ назвемо симетричною, якщо $H_\xi(x) = H_{-\xi}(x)$, де $H_\xi(x)$ та $H_{-\xi}(x)$ — функції розподілу випадкових величин ξ та $-\xi$ відповідно. Зрозуміло, що у цьому випадку $\mathbf{M}\xi = 0$. Комплексну випадкову величину ξ називаємо симетричною, якщо розподіли випадкових векторів $\xi = (\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Im} \xi)$ та $-\xi = (-\operatorname{Re} \xi, -\operatorname{Im} \xi)$ збігаються. Розглянемо випадковий ряд Діріхле

$$F_\omega(s_1, s_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \eta_{nm} a_{nm} \exp\{s_1 \lambda_n^{(1)} + s_2 \lambda_m^{(2)}\}, \quad (3)$$

де (η_{nm}) — послідовність випадкових величин.

Основний результат статті міститься у такій теоремі, яка є аналогом теореми 1 з [2], встановленої для звичайних рядів Діріхле.

Теорема. Нехай (η_{nm}) — послідовність незалежних симетричних випадкових величин, таких що $c_1 \leq |\eta_{nm}(\omega)| \leq c_2$, майже напевно (м.н.), де $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$, для всіх $n, m \geq 0$. Тоді для випадкового ряду Діріхле (3) м.н.

$$G_c(F_\omega) \subset \left(\left(G_a(F_\omega) + \frac{\tau}{2} \right) \cap G_\mu(F_\omega) \right). \quad (4)$$

Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Нехай

$$G(s_1, s_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}^2 \exp\{2s_1 \lambda_n^{(1)} + 2s_2 \lambda_m^{(2)}\}. \quad (5)$$

Лема. Для рядів Діріхле (1) і (5)

$$G_a(G) \subset \left((G_a(F) + \frac{\tau}{2}) \cap G_\mu(F) \right). \quad (6)$$

Доведення лема. Нехай $(\gamma_1, \gamma_2) \in G_a(G)$, тобто ряд (5) збігається абсолютно у точці (γ_1, γ_2) . Очевидно, що тоді $(\gamma_1, \gamma_2) \in G_\mu(F)$.

Доведемо, що $(\gamma_1, \gamma_2) \in \overline{G_a(F)} + \frac{\tau}{2}$. Оскільки $G_a(G), G_a(F)$ — відкриті, то звідси отримаємо, що $G_a(G) \subset G_a(F) + \frac{\tau}{2}$. Отже, міркуючи від супротивного, припустимо, що $(\gamma_1, \gamma_2) \notin \overline{G_a(F)} + \frac{\tau}{2}$. Тоді для (γ_1, γ_2) існує точка $(\sigma_{a1} + \frac{\tau_1}{2}, \sigma_{a2} + \frac{\tau_2}{2}) \in \partial(G_a(F) + \frac{\tau}{2})$ така, що $\sigma_{ai} + \frac{\tau_i}{2} < \gamma_i$, $i \in \{1, 2\}$. Нехай

$$\delta_i = \frac{1}{3}(\gamma_i - \sigma_{ai} - \frac{\tau_i}{2}) > 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

З умови (2) випливає, що $\ln n + \ln m \leq (\tau_1 + \delta_1)\lambda_n^{(1)} + (\tau_2 + \delta_2)\lambda_m^{(2)}$, $n + m \geq k_0$. Тоді

$$\begin{aligned} & \sum_{n+m=k_0}^{\infty} \exp\{-(\tau_1 + 2\delta_1)\lambda_n^{(1)} - (\tau_2 + 2\delta_2)\lambda_m^{(2)}\} \leq \\ & \leq \sum_{n+m=k_0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\tau_1 + 2\delta_1}{\tau_1 + \delta_1}(\tau_1 + \delta_1)\lambda_n^{(1)} - \frac{\tau_2 + 2\delta_2}{\tau_2 + \delta_2}(\tau_2 + \delta_2)\lambda_m^{(2)}\right\} < \sum_{n+m=k_0}^{\infty} (nm)^{-A} < \infty, \end{aligned} \quad (7)$$

де $A = \min\{\frac{\tau_1 + 2\delta_1}{\tau_1 + \delta_1}, \frac{\tau_2 + 2\delta_2}{\tau_2 + \delta_2}\} > 1$. Крім того,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |a_{nm}|^2 \exp\{2(\gamma_1 - \delta_1)\lambda_n^{(1)} + 2(\gamma_2 - \delta_2)\lambda_m^{(2)}\} < \infty, \quad (8)$$

позаяк у точці (γ_1, γ_2) ряд (5) абсолютно збіжний. Враховуючи (7), (8) та нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=0}^{\infty} |a_{nm}| \exp\{(\sigma_{a1} + \delta_1)\lambda_n^{(1)} + (\sigma_{a2} + \delta_2)\lambda_m^{(2)}\} = \\ & = \sum_{n,m=0}^{\infty} |a_{nm}| \exp\{(\gamma_1 - \delta_1)\lambda_n^{(1)} + (\gamma_2 - \delta_2)\lambda_m^{(2)}\} \exp\left\{-\frac{\tau_1+2\delta_1}{2}\lambda_n^{(1)} - \frac{\tau_2+2\delta_2}{2}\lambda_m^{(2)}\right\} \leq \\ & \leq \left(\sum_{n,m=0}^{\infty} |a_{nm}|^2 \exp\{2(\gamma_1 - \delta_1)\lambda_n^{(1)} + 2(\gamma_2 - \delta_2)\lambda_m^{(2)}\}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left(\sum_{n,m=0}^{\infty} \exp\{-(\tau_1 + 2\delta_1)\lambda_n^{(1)} - (\tau_2 + 2\delta_2)\lambda_m^{(2)}\}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Тобто ряд (1) збігається у точці $(\sigma_{a1} + \delta_1, \sigma_{a2} + \delta_2)$, а це суперечить тому, що $(\sigma_{a1}, \sigma_{a2})$ є парою спряжених абсцис абсолютної збіжності ряду (1). $\square$

Нам буде потрібна така теорема.

Теорема А ([3, с.53], теорема 7). Нехай (θ_{nm}) – послідовність незалежних симетричних випадкових величин і $\theta'_{nm}(\omega) = \begin{cases} \theta_{nm}(\omega), & |\theta_{nm}(\omega)| \leq 1, \\ \frac{\theta_{nm}(\omega)}{|\theta_{nm}(\omega)|}, & |\theta_{nm}(\omega)| > 1. \end{cases}$ Ряд $\sum_{n,m=0}^{\infty} \theta_{nm}$ збігається м.н. тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbf{D}\theta'_{nm}$.

Доведення теореми. Доведемо спочатку, що $G_c(F_\omega) \subset G_a(G)$ м.н., тобто якщо ряд (3) збігається, то ряд (5) збігається абсолютно. Нескладно перевірити, що

$$\theta_{nm} = \eta_{nm} a_{nm} \exp\{s_1 \lambda_n^{(1)} + s_2 \lambda_m^{(2)}\}$$

є послідовністю комплексних незалежних симетричних випадкових величин, при цьому симетричними випадковими величинами є $\text{Re } \theta_{nm} = \eta_{nm} \text{Re} \left(a_{nm} \exp\{s_1 \lambda_n^{(1)} + s_2 \lambda_m^{(2)}\} \right)$ та $\text{Im } \theta_{nm} = \eta_{nm} \text{Im} \left(a_{nm} \exp\{s_1 \lambda_n^{(1)} + s_2 \lambda_m^{(2)}\} \right)$, а тому $\mathbf{M}\theta_{nm} = \mathbf{M}\text{Re } \theta_{nm} + i\mathbf{M}\text{Im } \theta_{nm} = 0$.

Нехай $(s_1, s_2) \in \mathbf{G}_c(F_\omega)$ (м.н.). Тоді за теоремою А $\sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbf{D}\theta'_{nm} < +\infty$. Нехай $K = \mu(\sigma_1, \sigma_2, F)$, $\sigma_1 = \text{Re } s_1$, $\sigma_2 = \text{Re } s_2$. Оскільки

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbf{D}\theta'_{nm} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbf{M}|\theta'_{nm}|^2 = \\ & = \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(|a_{nm}|^2 \exp\{2\sigma_1 \lambda_n^{(1)} + 2\sigma_2 \lambda_m^{(2)}\} \int_{|\theta_{nm}| \leq 1} |\eta_{nm}|^2 P(d\omega) + \int_{|\theta_{nm}| > 1} 1 P(d\omega) \right) < +\infty, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbf{D}\theta'_{nm} > \sum_{n,m=0}^{\infty} \min\{c_1^2, 1/K\} |a_{nm}|^2 \exp\{2\sigma_1 \lambda_n^{(1)} + 2\sigma_2 \lambda_m^{(2)}\} \cdot \\ & \cdot \left(\int_{|\theta_{nm}| \leq 1} P(d\omega) + \int_{|\theta_{nm}| > 1} P(d\omega) \right). \end{aligned}$$

Тому, ряд (5) збігається абсолютно у точці (σ_1, σ_2) , тобто, м.н. $G_c(F_\omega) \subset G_a(G)$. Звідси, за лемою отримуємо $G_c(F_\omega) \subset G_a(G) \subset ((G_a(F) + \frac{\tau}{2}) \cap G_\mu(F))$. Залишається зауважити, що м.н. $G_a(F) = G_a(F_\omega)$, $G_\mu(F) = G_\mu(F_\omega)$. $\square$

Розглянемо ряд

$$\tilde{F}_\omega(s_1, s_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \xi_{nm} \exp\{s_1 \lambda_n^{(1)} + s_2 \lambda_m^{(2)}\}. \quad (9)$$

Наслідок 1. Нехай (ξ_{nm}) — послідовність симетричних незалежних випадкових величин на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Тоді для випадкового ряду Діріхле (9) м.н. виконується

$$G_c(\tilde{F}_\omega) \subset \left(\left(G_a(\tilde{F}_\omega) + \frac{\tau}{2} \right) \cap G_\mu(\tilde{F}_\omega) \right). \quad (10)$$

Доведення наслідку 1. Нехай (ε_{nm}) — послідовність Радемахера ([3, с.10]) на ймовірнісному просторі $(\Omega', \mathcal{A}', P')$. На ймовірнісному просторі $(\Omega' \times \Omega, \mathcal{A}' \times \mathcal{A}, P' \times P)$ розглянемо ряд

$$F_{(\omega', \omega)}(s_1, s_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \varepsilon_{nm} \xi_{nm} \exp\{s_1 \lambda_n^{(1)} + s_2 \lambda_m^{(2)}\}.$$

За теоремою Фубіні $G_\mu(F_{(\omega', \omega)}) = G_\mu(\tilde{F}_\omega)$ і $G_a(F_{(\omega', \omega)}) = G_a(\tilde{F}_\omega)$ м.н., та $G_c(F_{(\omega', \omega)}) = G_c(\tilde{F}_\omega)$ м.н. за принципом редукції ([3, с.20]). Для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$ і для майже всіх $\omega' \in \Omega'$ за лемою,

$$G_c(F_{(\omega', \omega)}) \subset \left(\left(G_a(F_{(\omega', \omega)}) + \frac{\tau}{2} \right) \cap G_\mu(F_{(\omega', \omega)}) \right). \quad (11)$$

Звідси випливає твердження наслідку 1. □

Наслідок 2. Нехай (ξ_{nm}) — послідовність незалежних випадкових величин на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Тоді для випадкового ряду Діріхле (9) можливі дві ситуації: або виконуються вкладення (10), або існує ряд Діріхле F вигляду (1) для якого м.н. $G_c(F) = G_c(\tilde{F}_\omega)$, $G_a(F) = G_a(\tilde{F}_\omega)$, $G_\mu(F) = G_\mu(\tilde{F}_\omega)$ такий, що для ряду $F_\omega^* = \tilde{F}_\omega - F$ м.н.

$$G_c(F_\omega^*) \subset \left(\left(G_a(F_\omega^*) + \frac{\tau}{2} \right) \cap G_\mu(F_\omega^*) \right).$$

Доведення наслідку 2. Нехай $\eta_{nm}(\omega', \omega) = \xi_{nm}(\omega) - \xi_{nm}(\omega')$ для кожного $n, m \geq 0$ і $(\omega', \omega) \in \Omega \times \Omega$. Тоді (η_{nm}) — послідовність симетричних незалежних випадкових величин на ймовірнісному просторі $(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \times \mathcal{A}, P \times P)$. Розглянемо ряд

$$F_{(\omega', \omega)}(s_1, s_2) = F_\omega(s_1, s_2) - F_{\omega'}(s_1, s_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (\xi_{nm}(\omega) - \xi_{nm}(\omega')) \exp\{s_1 \lambda_n^{(1)} + s_2 \lambda_m^{(2)}\}.$$

За доведенням наслідку 1 для цього ряду вірні вкладення (11) на $\Omega \times \Omega$. За оберненою теоремою Фубіні, існує фіксована точка $\omega' \in \Omega$ така, що для майже всіх $\omega \in \Omega$ і для ряду $F(s_1, s_2) = F_{\omega'}(s_1, s_2)$ виконуються співвідношення

$$G_c(F) = G_c(\tilde{F}_\omega), \quad G_a(F) = G_a(\tilde{F}_\omega), \quad G_\mu(F) = G_\mu(\tilde{F}_\omega)$$

та вкладення (11). Наслідок 2 доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Задорожна О. Ю., Мулява О. М. *Про спряжені абсциси збіжності кратного ряду Діріхле* // Мат. студії. – 2007. – Т.28, №1. – С.29–36.
2. Filevych P.V *On relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series.* // Мат. студії. – 2003. – Т.20, №1. – С.33–39.
3. Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды. – М.: Мир, 1973. – 302 с.

Львівський національний університет імені Івана Франка
механіко-математичний факультет
olzadorozhna@gmail.com
matstud@franko.lviv.ua

Надійшло 14.09.2008