

УДК 517.53

І. В. Андрусяк, П. В. Філевич

ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ, ПОКАЗНИК ЗБІЖНОСТІ НУЛІВ ЯКИХ Є ЦІЛИМ ЧИСЛОМ

I. V. Andrusyak, P. V. Filevych. *The growth of entire functions with zero sets having integer-valued exponent of convergence*, Mat. Stud. **32** (2009), 12–20.

Let $\zeta = (z_n)$ be a sequence of complex numbers tending to ∞ , $n_\zeta(r)$ be its counting function, τ_ζ be its exponent of convergence, $A(\zeta)$ be the class of entire functions whose zero sets coincide with ζ , be a function that is positive continuous and increasing to $+\infty$ on $\mathbb{R}$, and $\tau \in \mathbb{N}$. In particular, we prove the next assertion: for any sequence ζ with $\tau_\zeta = \tau$ there exists an entire function $f \in A(\zeta)$ such that $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{n_\zeta(r)\varphi(\ln n_\zeta(r))} = 0$ if and only if $\int_0^\infty dx/\varphi(x) < \infty$.

И. В. Андрусяк, П. В. Филевич. *Рост целых функций, показатель сходимости нулей которых — целое число* // Мат. Студії. — 2009. — Т.32, №1. — С.12–20.

Пусть $\zeta = (\zeta_n)$ — стремящаяся к ∞ последовательность комплексных чисел, $n_\zeta(r)$ — ее считающая функция, τ_ζ — ее показатель сходимости, $A(\zeta)$ — класс целых функций с нулями в точках ζ_n и только в них, φ — положительная, непрерывная, возрастающая к $+\infty$ на $\mathbb{R}$ функция, $\tau \in \mathbb{N}$. Доказано, в частности, такое утверждение: для того, чтобы для произвольной последовательности ζ из $\tau_\zeta = \tau$, существовала целая функция $f \in A(\zeta)$ такая, что $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{n_\zeta(r)\varphi(\ln n_\zeta(r))} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\int_0^\infty dx/\varphi(x) < \infty$.

1. Вступ. Нехай L — клас додатних, неперервних, зростаючих до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцій. Позначимо через A клас цілих функцій $f(z) \not\equiv 0$. Для $f \in A$ і кожного $r \geq 0$ покладемо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ і нехай $T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$ — характеристика Неванліни функції f .

Через $\mathcal{Z}$ позначимо клас комплексних послідовностей $\zeta = (\zeta_n)$ таких, що $0 < |\zeta_0| \leq |\zeta_1| \leq \dots$ і $\zeta_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Нехай $n_\zeta(r) = \sum_{|\zeta_n| \leq r} 1$ — лічильна функція, а

$$\tau_\zeta = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln n_\zeta(r)}{\ln r} \text{ — порядок функції } n_\zeta(r).$$

Скажемо, що $f \in A(\zeta)$, якщо і лише якщо $f \in A$ і послідовність нулів функції f , занумерована (з урахуванням кратностей) у порядку неспадання їх модулів, збігається з послідовністю ζ . За класичною теоремою Вейерштрасса [1] $A(\zeta) \neq \emptyset$ для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$.

Наступне твердження є наслідком з добре відомих класичних результатів у випадку $\tau_\zeta < \infty$, а також результатів В. Бергвайлера ([2]) і Дж. Майлза ([3]) у випадку $\tau_\zeta = +\infty$.

Теорема А. Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}$ і $\tau_\zeta \in [0, +\infty] \setminus \mathbb{Z}$. Тоді $(\exists f \in A(\zeta))$: $\lim_{r \rightarrow +\infty} \ln M_f(r)/n_\zeta(r) < \infty$.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 30D20.

Keywords: entire function, growth, convergence exponent, zero set
doi:10.30970/ms.32.1.12-20

© І. В. Андрусяк, П. В. Філевич, 2009

У цій статті розглядаємо задачу про мінімальне зростання функцій $f \in A(\zeta)$ у випадку цілого τ_ζ . Розглянемо спочатку випадок, коли $\tau_\zeta \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Нехай $\tau \in \mathbb{N}$, $\varphi \in L$. Для того, щоб для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ такої, що $\tau_\zeta = \tau$, існувала ціла функція $f \in A(\zeta)$, для якої

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{n_\zeta(r) \varphi(\ln n_\zeta(r))} = 0, \quad (1)$$

необхідно і досить, щоб

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\varphi(x)} < +\infty. \quad (2)$$

Теорема 1 є наслідком з наступної точнішої теореми.

Теорема 2. Нехай $\tau \in \mathbb{N}$. Тоді:

(i) для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ такої, що $\tau_\zeta = \tau$ і $\int_0^{+\infty} t^{-\tau-1} n_\zeta(t) dt = +\infty$, існує ціла функція $f \in A(\zeta)$ така, що для довільної $\varphi \in L$, яка задовольняє умову (2), виконується співвідношення (1);

(ii) для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ такої, що $\tau_\zeta = \tau$ і $\int_0^{+\infty} \frac{n_\zeta(t)}{t^{\tau+1}} dt < +\infty$, існують цілі функції $f, g \in A(\zeta)$ такі, що для довільної $\varphi \in L$, яка задовольняє умову (2),

$$\min \left\{ \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{n_\zeta(r) \varphi(\ln n_\zeta(r))}, \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_g(r)}{n_\zeta(r) \varphi(\ln n_\zeta(r))} \right\} = 0; \quad (3)$$

(iii) для довільної функції $\varphi \in L$, яка не задовольняє умову (2), існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ така, що $\tau_\zeta = \tau$ і для кожної цілої функції $f \in A(\zeta)$ виконується співвідношення

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{T_f(r)}{n_\zeta(r) \varphi(\ln n_\zeta(r))} = +\infty. \quad (4)$$

Нехай $\tau \in \mathbb{N}$. У зв'язку з теоремою 2 виникає питання, відповідь на яке нам не вдалось отримати.

Проблема. Чи для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ з $\tau_\zeta = \tau$ існує ціла функція $f \in A(\zeta)$ така, що для довільної $\varphi \in L$, яка задовольняє умову (2), виконується співвідношення (1)?

Для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ нехай

$$p_\zeta = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln n_\zeta(r)}{\ln \ln r} \text{ — логарифмічний порядок функції } n_\zeta(r).$$

У випадку $\tau_\zeta = 0$ обмежимося наступними двома теоремами.

Теорема 3. Нехай $p \in (0, +\infty]$. Тоді:

(i) для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ такої, що $p_\zeta = p$, існує ціла функція $f \in A(\zeta)$, для якої

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln n_\zeta(r)} \leq \frac{p+1}{p}; \quad (5)$$

(ii) існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ така, що $p_\zeta = p$ і для кожної цілої функції $f \in A(\zeta)$ виконується співвідношення

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln T_f(r)}{\ln n_\zeta(r)} \geq \frac{p+1}{p}. \quad (6)$$

Зауваження 1. Вважаємо, що $\frac{p+1}{p} = 1$, якщо $p = +\infty$.

Зауваження 2. У випадку $\tau_\zeta > 0$ необхідно $p_\zeta = +\infty$ і тому теорема 3 впливає з теорем А і 2. Тобто, теорема 3 вимагає доведення лише у випадку $\tau_\zeta = 0$.

Теорема 4. Для довільної функції $l \in L$ існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ така, що $p_\zeta = 0$ і для кожної $f \in A(\zeta)$ виконується співвідношення

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{T_f(r)}{l(n_\zeta(r))} = +\infty. \quad (7)$$

З теореми 4 можемо зробити висновок, що у випадку $p_\zeta = 0$ цілі функції з класу $A(\zeta)$ можуть зростати довільно швидко у порівнянні зі зростанням функції $n_\zeta(r)$.

Зазначимо, що, згідно з нерівністю $T_f(r) \leq \ln^+ M_f(r)$, скрізь в теоремах 2–4 $T_f(r)$ можна замінити на $\ln M_f(r)$ і навпаки.

Близькі до розглянутих тут задач розглядалися в [5–7].

2. Допоміжні результати. Нехай $p \in \mathbb{Z}_+$, а $E(z, p)$ — первинний множник Вейєрштрасса, тобто

$$E(z, 0) = 1 - z; \quad E(z, p) = (1 - z)e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Добре відомим є таке твердження (див., наприклад, [1, с. 76–78]).

Лема 1. Нехай $p \in \mathbb{Z}_+$, а $\zeta \in \mathcal{Z}$ така, що

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|\zeta_n|^{p+1}} < +\infty. \quad (8)$$

Тоді добуток Вейєрштрасса $f(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} E\left(\frac{z}{\zeta_n}, p\right)$ задає цілу функцію $f \in A(\zeta)$, для якої

$$\ln M_f(r) \leq C_p r^p \left(\int_0^r \frac{n_\zeta(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^{+\infty} \frac{n_\zeta(t)}{t^{p+2}} dt \right), \text{ де } C_0 = 1 \text{ і } C_p = 4(p+1)(2 + \ln p) \text{ } (p \in \mathbb{N}).$$

Зауваження 3. Умова (8) рівносильна ([1, с. 68]) до умови

$$\int_0^{+\infty} \frac{n_\zeta(t)}{t^{p+2}} dt < +\infty. \quad (9)$$

Лема 2. Нехай $p \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon > 0$, а послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ така, що виконується (9). Тоді існує додатна, неспадна, неперервна на $[|\zeta_0|, +\infty)$ функція h , для якої $h(r) \leq n_\zeta(r)$ і

$$\alpha(r) := \int_{|\zeta_0|}^r \frac{n_\zeta(t)}{t^{p+1}} dt \leq 2 \int_{|\zeta_0|}^r \frac{h(t)}{t^{p+1}} dt, \quad \beta(r) := \int_r^{+\infty} \frac{n_\zeta(t)}{t^{p+2}} dt \leq 2 \int_r^{+\infty} \frac{h(t)}{t^{p+2}} dt \quad (10)$$

для довільного $r \geq |\zeta_0|$.

Доведення. Нехай $r_j = |\zeta_j|$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Зауважимо, що функція $n_\zeta(t)$ є неперервною на $(0, +\infty)$ за винятком точок r_j , $j \in \mathbb{Z}_+$, які для цієї функції є точками розриву першого роду, а функції α і β є додатними на $(r_0, +\infty)$, причому на цьому інтервалі α зростає, а β спадає до 0.

Для кожного $j \in \mathbb{N}$ виберемо точку $s_j \in (r_j, r_{j+1})$ так, щоб виконувалась нерівність

$$\max \left\{ \int_{r_j}^{s_j} \frac{n_\zeta(t)}{t^{p+1}} dt, \int_{r_j}^{s_j} \frac{n_\zeta(t)}{t^{p+2}} dt \right\} \leq \frac{\min\{\alpha(r_1), \beta(r_{j+1})\}}{2^{j+2}}. \quad (11)$$

Покладемо $h(r) = n_\zeta(r)$, якщо $r \in [r_0, r_1)$ чи $r \in [s_j, r_{j+1})$ для деякого $j \in \mathbb{N}$, і нехай

$$h(r) = n_\zeta(r_j - 0) + \frac{r - r_j}{s_j - r_j} (n_\zeta(r_j) - n_\zeta(r_j - 0))$$

для всіх $r \in [r_j, s_j)$ і $j \in \mathbb{N}$. Тоді, як легко бачити, h є додатною, неспадною, неперервною на $[r_0, +\infty)$ функцією і $h(r) \leq n_\zeta(r)$, $r \geq r_0$. Крім того, для $r \in [r_0, r_1)$ маємо $\alpha(r) = \int_{r_0}^r t^{-p-1} h(t) dt$, а для довільного $r \geq r_1$, згідно з (11),

$$\alpha(r) - \int_{r_0}^r \frac{h(t)}{t^{p+1}} dt \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{r_j}^{s_j} \frac{n_\zeta(t) - h(t)}{t^{p+1}} dt \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha(r_1)}{2^{j+2}} = \frac{\alpha(r_1)}{4} \leq \frac{\alpha(r)}{4},$$

звідки випливає перша з нерівностей (10). Приймаючи $s_0 = r_0$ і скориставшись (11) ще раз, для довільних $m \in \mathbb{Z}_+$ і $r \in [r_m, r_{m+1})$ отримуємо

$$\beta(r) - \int_r^{+\infty} \frac{h(t)}{t^{p+2}} dt \leq \sum_{j=m}^{+\infty} \int_{r_j}^{s_j} \frac{n_\zeta(t) - h(t)}{t^{p+2}} dt \leq \sum_{j=m}^{+\infty} \frac{\beta(r_{j+1})}{2^{j+2}} \leq \beta(r_{m+1}) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+2}} \leq \frac{\beta(r)}{2},$$

звідки випливає друга з нерівностей (10). Лему доведено. $\square$

Нам потрібні також дві наступні прості леми.

Лема 3. Нехай функції $\psi_1, \psi_2 \in L$ такі, що $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi_j(x)} < +\infty$, $j \in \{1, 2\}$, а $\psi(x) = \min\{\psi_1(x), \psi_2(x)\}$. Тоді $\psi \in L$ і $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$.

Доведення. Нехай $E = \{x > 0: \psi_1(x) \leq \psi_2(x)\}$. Тоді

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} = \int_E \frac{dx}{\psi_1(x)} + \int_{(0, +\infty) \setminus E} \frac{dx}{\psi_2(x)} \leq \sum_{j=1}^2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi_j(x)} < +\infty.$$

$\square$

Лема 4. Для довільної функції $\varphi \in L$, яка задовольняє умову (2), існує функція $\psi \in L$ така, що $\psi(x) = o(\varphi(x))$, $x \rightarrow +\infty$, і $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$.

Доведення. Нехай $\alpha(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$. Тоді $\alpha(x) \downarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$, і $\int_0^{+\infty} \alpha(x) dx < +\infty$. Нехай $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ – довільна додатна зростаюча до $+\infty$ послідовність така, що

$$(k+1)\alpha(x_{k+1}) < k\alpha(x_k), \quad \int_{x_k}^{+\infty} \alpha(x) dx < \frac{1}{(k+1)2^k}.$$

$$\text{Покладемо } \beta(x) = \begin{cases} \alpha(x), & \text{якщо } x < x_1; \\ \min\{k\alpha(x_k); (k+1)\alpha(x)\}, & \text{якщо } x_k \leq x < x_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тоді $\beta(x)$ є незростаюча на $(-\infty; +\infty)$, бо $\beta(x_k) \geq \beta(x) \geq \beta(x_{k+1})$ для всіх $x \in [x_k, x_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}$. Справді,

$$\beta(x_k) = k\alpha(x_k) \geq \beta(x) \geq \min\{k\alpha(x_k); (k+1)\alpha(x_{k+1})\} = (k+1)\alpha(x_{k+1}) = \beta(x_{k+1}).$$

Крім того, $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \rightarrow +\infty$, і

$$\int_0^{+\infty} \beta(x) dx \leq \int_0^{x_1} \alpha(x) dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (k+1) \alpha(x) dx \leq \int_0^{+\infty} \alpha(x) dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

Залишається вибрати функцію $\psi \in L$ так, щоб $\psi(x) \sim 1/\beta(x)$, $x \rightarrow +\infty$. $\square$

Наведене далі твердження відоме як лема про піки Пойа (див., наприклад, [4, с. 155]).

Лема 5. Нехай $\alpha(r)$ і $\beta(r)$ — неперервні, додатні на $[a, +\infty)$ функції такі, що $\frac{\alpha(r)}{\beta(r)}$ — неспадна на $[a, +\infty)$ функція і $\lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha(r) = +\infty$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \beta(r) = 0$. Тоді множина тих $r \geq a$, для яких одночасно виконуються нерівності

$$\alpha(t) \leq \alpha(r) \quad (a \leq t \leq r), \quad \beta(t) \leq \beta(r) \quad (t \geq r),$$

є необмеженою.

Наступну лему [1, с. 338–341] застосуємо для доведення твердження (iii) теореми 2.

Лема 6. Нехай $p \in \mathbb{N}$. Якщо послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ є додатною і $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\zeta_n^p} = +\infty$, то $r^p = o(T_f(r))(r \rightarrow +\infty)$ для довільної цілої функції $f \in A(\zeta)$.

3. Доведення теорем.

Доведення теореми 2. Нехай $\tau \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ — фіксоване число, $\zeta \in \mathcal{Z}$ — довільна послідовність з $\tau_\zeta = \tau$.

Зрозуміло, що для послідовності ζ виконується умова $\int_{|\zeta_0|}^{+\infty} \frac{n_\zeta(t)}{t^{\tau+2}} dt < +\infty$. Згідно з лемами 1 і 2 добуток Вейєрштрасса $f(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} E\left(\frac{z}{\zeta_n}, \tau\right)$ задає цілу функцію $f \in A(\zeta)$, для якої

$$\ln M_f(r) \leq 2C_\tau r^\tau \left(\int_{|\zeta_0|}^r \frac{h_1(t)}{t^{\tau+1}} dt + r \int_r^{+\infty} \frac{h_1(t)}{t^{\tau+2}} dt \right), \quad r \geq |\zeta_0|, \quad (12)$$

де h_1 — додатна, неспадна, неперервна на $[|\zeta_0|, +\infty)$ функція така, що $h_1(r) \leq n_\zeta(r)$, $r \geq |\zeta_0|$.

Припустимо, що $\int_{|\zeta_0|}^{+\infty} \frac{n_\zeta(t)}{t^{\tau+1}} dt = +\infty$. Тоді за лемою 2

$$\int_{|\zeta_0|}^{+\infty} \frac{h_1(t)}{t^{\tau+1}} dt = +\infty. \quad (13)$$

Нехай $\varphi \in L$ — довільна функція, яка задовольняє умову (2). Доведемо, що для f і φ виконується співвідношення (1). За лемами 3 і 4 існує функція $\psi \in L$ така, що

$$\psi(x) = o(\min\{\varphi((\tau - 2\varepsilon)x), x^2\}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (14)$$

і для довільного $a \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення $K_1(a) := \int_a^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$.

Покажемо, що з (13) випливає рівність

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h_1(r)\psi(\ln r)}{r^\tau} = +\infty. \quad (15)$$

Справді, якщо (15) не виконується, то $\frac{h_1(r)\psi(\ln r)}{r^\tau} \leq K$, $r \geq |\zeta_0|$, де K — деяка стала, а тому

$$\int_{|\zeta_0|}^{+\infty} \frac{h_1(t)}{t^{\tau+1}} dt \leq K \int_{|\zeta_0|}^{+\infty} \frac{dt}{t\psi(\ln r)} = KK_1(\ln |\zeta_0|) < +\infty,$$

що суперечить (13). Крім того, з рівності $\tau_\zeta = \tau$ отримуємо

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h_1(r)}{r^{\tau+\varepsilon}} = 0. \quad (16)$$

Тоді за лемою 5, згідно з (15) і (16), множина E_1 тих $r \geq |\zeta_0|$, для яких одночасно виконуються нерівності

$$\frac{h_1(t)\psi(\ln t)}{t^\tau} \leq \frac{h_1(r)\psi(\ln r)}{r^\tau}, |\zeta_0| \leq t \leq r; \quad \frac{h_1(t)}{t^{\tau+\varepsilon}} \leq \frac{h_1(r)}{r^{\tau+\varepsilon}}, t \geq r, \quad (17)$$

є необмеженою. Зауважимо також, що за (14), (15) і першою з нерівностей (17) маємо

$$\frac{h_1(r)}{r^{\tau-\varepsilon}} \rightarrow +\infty, \quad E_1 \ni r \rightarrow +\infty. \quad (18)$$

Отже, якщо $E_1 \ni r \rightarrow +\infty$, то за (12), (17), (18) і (14) отримуємо

$$\begin{aligned} \ln M_f(r) &\leq 2C_\tau r^\tau \left(\int_{|\zeta_0|}^r \frac{h_1(t)\psi(\ln t)}{t^\tau} \frac{dt}{t\psi(\ln t)} + r \int_r^{+\infty} \frac{h_1(t)}{t^{\tau+\varepsilon}} \frac{dt}{t^{2-\varepsilon}} \right) \leq \\ &\leq 2C_\tau \left(h_1(r)\psi(\ln r) \int_{|\zeta_0|}^r \frac{dt}{t\psi(\ln t)} + h_1(r)r^{1-\varepsilon} \int_r^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\varepsilon}} \right) \leq \\ &\leq 2C_\tau h_1(r) \left(\psi(\ln r) K_1(\ln |\zeta_0|) + \frac{1}{1-\varepsilon} \right) = O(h_1(r)\psi(\ln r)) = \\ &= O\left(h_1(r)\psi\left(\frac{1}{\tau-\varepsilon} \ln h_1(r)\right)\right) = o(n_\zeta(r)\varphi(\ln n_\zeta(r))), \end{aligned}$$

звідки і випливає (1). Твердження (i) доведено.

Перейдемо до доведення твердження (ii). Нехай $\tau \in \mathbb{N}$, а для послідовності ζ виконуються умови $\tau_\zeta = \tau$ і $\int_{|\zeta_0|}^{+\infty} \frac{n_\zeta(t)}{t^{\tau+1}} dt < +\infty$. Згідно з лемами 1 і 2 добуток Вейєрштраса $g(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} E\left(\frac{z}{\zeta_n}, \tau-1\right)$ задає цілу функцію $g \in A(\zeta)$, для якої

$$\ln M_g(r) \leq 2C_{\tau-1} r^{\tau-1} \left(\int_{|\zeta_0|}^r \frac{h_2(t)}{t^\tau} dt + r \int_r^{+\infty} \frac{h_2(t)}{t^{\tau+1}} dt \right), \quad r \geq |\zeta_0|, \quad (19)$$

де h_2 — додатна, неспадна, неперервна на $[|\zeta_0|, +\infty)$ функція така, що $h_2(r) \leq n_\zeta(r)$, $r \geq |\zeta_0|$.

Нехай $\varphi \in L$ — довільна функція, яка задовольняє умову (2), а $\psi \in L$, $f \in A(\zeta)$ і h_1 — такі ж, як і при доведенні твердження (i). Доведемо, що для f , g і φ виконується співвідношення (3).

Прийmemo $h(r) = \max\{h_1(r), h_2(r)\}$. Тоді h — додатна, неспадна, неперервна на $[|\zeta_0|, +\infty)$ функція, для якої $h(r) \leq n_\zeta(r)$, $r \geq |\zeta_0|$.

Якщо

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(r)\psi(\ln r)}{r^\tau} = +\infty, \quad (20)$$

то, здійснюючи такі самі міркування як і в доведенні твердження (i), але з функцією h замість h_1 , легко встановлюємо правильність співвідношення (1).

Припустимо, що (20) не виконується і нехай $\alpha \in L$ — довільна функція така, що

$$\alpha(x) = o(\psi(x)), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (21)$$

і для довільного $a \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення $K_2(a) := \int_a^{+\infty} \frac{dx}{\alpha(x)} < +\infty$ (див. лему 4). Тоді

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(r)\alpha(\ln r)}{r^\tau} = 0. \quad (22)$$

Крім того, з рівності $\tau_\zeta = \tau$ отримуємо

$$\varlimsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(r)\alpha(\ln r)}{r^{\tau-\varepsilon}} = +\infty. \quad (23)$$

Тоді за лемою 5, згідно з (23) і (22), множина E_2 тих $r \geq |\zeta_0|$, для яких одночасно виконуються нерівності

$$\frac{h(t)\alpha(\ln t)}{t^{\tau-\varepsilon}} \leq \frac{h(r)\alpha(\ln r)}{r^{\tau-\varepsilon}} \quad (|\zeta_0| \leq t \leq r); \quad \frac{h(t)\alpha(\ln t)}{t^\tau} \leq \frac{h(r)\alpha(\ln r)}{r^\tau} \quad (t \geq r), \quad (24)$$

є необмеженою. Зауважимо також, що за (21), (14), (23) і першою з нерівностей (24) маємо

$$\frac{h(r)}{r^{\tau-2\varepsilon}} \rightarrow +\infty, \quad E_2 \ni r \rightarrow +\infty. \quad (25)$$

Отже, якщо $E_2 \ni r \rightarrow +\infty$, то за (19), (24), (25) і (14) отримуємо

$$\begin{aligned} \ln M_g(r) &\leq 2C_{\tau-1}r^{\tau-1} \left(\int_{|\zeta_0|}^r \frac{h(t)\alpha(\ln t)}{t^{\tau-\varepsilon}} \frac{dt}{t^\varepsilon \alpha(\ln t)} + r \int_r^{+\infty} \frac{h(t)\alpha(\ln t)}{t^\tau} \frac{dt}{t\alpha(\ln t)} \right) \leq \\ &\leq 2C_{\tau-1} \left(\frac{h(r)\alpha(\ln r)}{r^{1-\varepsilon}\alpha(\ln |\zeta_0|)} \int_{|\zeta_0|}^r \frac{dt}{t^\varepsilon} + h(r)\alpha(\ln r) \int_r^{+\infty} \frac{dt}{t\alpha(\ln t)} \right) = \\ &= 2C_{\tau-1}h(r)\alpha(\ln r) \left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\alpha(\ln |\zeta_0|)} \left(1 - \left(\frac{|\zeta_0|}{r} \right)^{1-\varepsilon} \right) + K_2(\ln r) \right) = \\ &= O(h(r)\alpha(\ln r)) = o\left(h(r)\psi\left(\frac{1}{\tau-2\varepsilon} \ln h(r) \right) \right) = o(n_\zeta(r)\varphi(\ln n_\zeta(r))), \end{aligned}$$

звідки випливає співвідношення

$$\varliminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_g(r)}{n_\zeta(r)\varphi(\ln n_\zeta(r))} = 0. \quad (26)$$

Отже, нами доведено, що для f , g і φ виконується одне зі співвідношень (1) чи (26), звідки і випливає (3). Твердження (ii) доведено.

Доведемо твердження (iii). Розглянемо довільну функцію $\varphi \in L$, для якої умова (2) не виконується. Зрозуміло, що

$$\varliminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = 0. \quad (27)$$

Покладемо $\zeta_n = ((n+1)\varphi(\ln(n+1)))^{1/\tau}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\zeta_n^\tau} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\varphi(\ln(n+1))} \geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\varphi(\ln(x+1))} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\varphi(t)} = +\infty.$$

За лемою 6 для довільної $f \in A(\zeta)$ отримуємо $r^\tau = o(T_f(r))$, $r \rightarrow +\infty$. Далі, якщо $r \in [\zeta_n, \zeta_{n+1})$, то $n_\zeta(r) = n+1$, а тому

$$n_\zeta(r)\varphi(\ln n_\zeta(r)) = (n+1)\varphi(\ln(n+1)) = \zeta_n^\tau \leq r^\tau = o(T_f(r)), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Отже, для довільної $f \in A(\zeta)$ виконується (4), і нам залишилось встановити, що $\tau_\zeta = \tau$. Справді, використовуючи (27), маємо

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \ln n_\zeta(r)/\ln r = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \ln n/\ln \zeta_{n-1} = \tau \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln \varphi(\ln n)}{\ln n}\right)^{-1} = \tau.$$

Теорему 2 доведено. $\square$

Доведення теореми 3. Нехай $p \in (0, +\infty]$, а $\zeta \in \mathcal{Z}$ — довільна послідовність з $p_\zeta = p$ і $\tau_\zeta = 0$ (див. зауваження 2). Тоді для послідовності ζ виконується умова $\int_{|\zeta_0|}^{+\infty} \frac{n_\zeta(t)}{t^2} dt < +\infty$. Згідно з лемами 1 і 2 добуток Вейєрштрасса $f(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} E\left(\frac{z}{\zeta_n}, 0\right)$ задає цілу функцію $f \in A(\zeta)$, для якої

$$\ln M_f(r) \leq 2 \left(\int_{|\zeta_0|}^r \frac{h(t)}{t} dt + r \int_r^{+\infty} \frac{h(t)}{t^2} dt \right), \quad r \geq |\zeta_0|, \quad (28)$$

де h — додатна, неспадна, неперервна на $[|\zeta_0|, +\infty)$ функція така, що $h(r) \leq n_\zeta(r)$, $r \geq |\zeta_0|$. Доведемо, що для функції f виконується співвідношення (5).

Вважаємо, не зменшуючи загальності, що $|\zeta_0| > 1$. Зафіксуємо довільне $q \in (0, p)$. З рівностей $p_\zeta = p$ і $\tau_\zeta = 0$ отримуємо $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(r)}{\ln^q r} = +\infty$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(r)}{\sqrt{r}} = 0$.

Тоді за лемою 5 множина E тих $r \geq |\zeta_0|$, для яких одночасно виконуються нерівності

$$\frac{h(t)}{\ln^q t} \leq \frac{h(r)}{\ln^q r}, |\zeta_0| \leq t \leq r; \quad \frac{h(t)}{\sqrt{t}} \leq \frac{h(r)}{\sqrt{r}}, t \geq r, \quad (29)$$

є необмеженою. Зрозуміло, що $\frac{h(r)}{\ln^q r} \rightarrow +\infty$, $E \ni r \rightarrow +\infty$. Отже, якщо $E \ni r \rightarrow +\infty$, то звідси, а також з (28) і (29) отримуємо

$$\begin{aligned} \ln M_f(r) &\leq 2 \left(\int_{|\zeta_0|}^r \frac{h(t)}{\ln^q t} \frac{\ln^q t}{t} dt + r \int_r^{+\infty} \frac{h(t)}{\sqrt{t}} \frac{dt}{t\sqrt{t}} \right) \leq 2 \left(\frac{h(r)}{\ln^q r} \int_{|\zeta_0|}^r \frac{\ln^q t}{t} dt + h(r) \sqrt{r} \int_r^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{h(r)}{\ln^q r} \frac{1}{q+1} (\ln^{q+1} r - \ln^{q+1} |\zeta_0|) + 2h(r) \right) = O(h(r) \ln r) = o\left((h(r))^{\frac{q+1}{q}}\right) = o\left((n_\zeta(r))^{\frac{q+1}{q}}\right), \end{aligned}$$

звідки маємо $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln n_\zeta(r)} \leq \frac{q+1}{q}$. Звідси, завдяки довільності $q \in (0, p)$ випливає (5).

Твердження (i) доведено.

Перейдемо до доведення твердження (ii). Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ покладемо $\zeta_n = \exp\left\{n^{\frac{1}{p}}\right\}$, якщо $p \in (0, +\infty)$, і $\zeta_n = \exp\left\{\exp\left\{\ln^{\frac{1}{2}}(n+1)\right\}\right\}$, якщо $p = +\infty$. Легко переконатись, що при $r \rightarrow +\infty$

$$n_\zeta(r) \sim \ln^p r \quad (p \in (0, +\infty)), \quad n_\zeta(r) \sim (\ln r)^{\ln \ln r} \quad (p = +\infty),$$

звідки для довільного $p \in (0, +\infty]$ отримуємо $p_\zeta = p$.

Нехай $N_\zeta(r) = \int_{|\zeta_0|}^r \frac{n_\zeta(t)}{t} dt$ — усереднена лічильна функція послідовності ζ . Враховуючи, що $n_\zeta(r) = r(N_\zeta(r))'_+$, за правилом Лопіталя при $r \rightarrow +\infty$ отримуємо

$$N_\zeta(r) \sim \frac{1}{p+1} \ln^{p+1} r \quad (p \in (0, +\infty)), \quad N_\zeta(r) \sim \frac{(\ln r)^{\ln \ln r + 1}}{2 \ln \ln r} \quad (p = +\infty).$$

Нехай $f \in A(\zeta)$ — довільна ціла функція. Оскільки за формулою Йєнсена ([1, с. 24])

$$N_\zeta(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(0)| \leq T_f(r) - \ln |f(0)|,$$

то звідси випливає (6), позаяк за побудовою $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln N_\zeta(r)}{\ln n_\zeta(r)} = \frac{p+1}{p}$, $p \in (0, +\infty]$. Теорему 3 доведено. $\square$

Доведення теореми 4. Нехай $l \in L$. Тоді l^{-1} є неперервною, додатною, зростаючою до $+\infty$ на $(l(0), +\infty)$ функцією. Прийнемо $h(r) = \min\{l^{-1}(r), \ln \ln r\}$ для всіх $r \geq \max\{l(0), e^2\}$ і розглянемо довільну послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ таку, що $n_\zeta(r) \leq h(\ln r)$, $r \geq r_0$ (наприклад, беремо за ζ додатну зростаючу послідовність, для якої $h(\ln \zeta_n) \geq n+1$). Зрозуміло, що $p_\zeta = 0$. Крім того, кожна ціла функція $f \in A(\zeta)$ є трансцендентною, а тому для неї $\ln r = o(T_f(r))$, $r \rightarrow +\infty$. Отже,

$$l(n_\zeta(r)) \leq l(h(\ln r)) \leq l(l^{-1}(\ln r)) = \ln r = o(T_f(r)), r \rightarrow +\infty,$$

тобто правильним є співвідношення (7). Теорему 4 доведено. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 592 с.
2. Bergweiler W. *Canonical products of infinite order*// J. reine angew. Math. — 1992. — V. 430. — P. 85–107.
3. Miles J. *On the growth of entire functions with zero sets having infinite exponent of convergence*// Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2002. — V. 27. — P. 69–90.
4. Хейман У. Мероморфные функции. — М.: Мир, 1966. — 288 с.
5. Andrusyak I. V., Filevych P. V. *The growth of an entire function with a given sequence of zeros*// Mat. Stud. — 2008. — V. 30, №2 — P. 115–124.
6. Sheremeta M. M. *A remark to the construction of canonical products of minimal growth*// Mat. fizika, analiz, geometriya. — 2004. — V. 11, №2 — P. 243–248.
7. Хабибуллин Б. Н. *Рост целых функций с заданными нулями и представление мероморфных функций*// Мат. заметки. — 2003. — Т. 73. — P. 120–134.

Національний університет "Львівська політехніка"
Львівський національний університет ветеринарної медицини
та біотехнології імені С.З.Гжицького
Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 10.11.2008
Після переробки 12.04.2009