

УДК 517.51

В. В. НЕСТЕРЕНКО

ПРО ДВА КЛАСИ ФУНКЦІЙ, ЯКІ ВОЛОДІЮТЬ ВЛАСТИВІСТЮ ГАНА

V. V. Nesterenko. *On two classes of functions with the Hahn property*, Mat. Stud. **31** (2009), 183–188.

We prove that mappings jointly quasi-continuous and nearly continuous with respect to the second variable have the Hahn property; and functions which are monotone with respect to the first variable and continuous with respect to the second variable also have the Hahn property.

В. В. Нестеренко. *О двух классах функций, обладающих свойством Гана* // Мат. Студії. – 2009. – Т.31, №2. – С.183–188.

Доказано, что отображения, которые совокупно квазинепрерывны и почти непрерывны относительно второй переменной и функции, монотонные относительно первой и непрерывные относительно второй переменной, обладают свойством Гана.

1. Властивість відображень $f: X \times Y \rightarrow Z$, для яких існує залишкова в X множина A , така, що множина $A \times Y$ міститься в множині $C(f)$ точок неперервності відображення f , називається *властивістю Гана*. В [1] Ж. Кальбрі та Ж. Труалік одержали теорему, яка вказує на те, що відображення з класу $CC(X \times Y, Z)$ нарізно неперервних відображень мають властивість Гана, коли X — топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z — метризовний простір. В. К. Маслюченко ([2]) переніс цей результат на випадок відображень з класів $\overline{CC}$, KC і $\overline{KC}$. Пізніше в [3] цей результат був розширений на функції з класу K_hC горизонтально квазинепрервних і неперервних відносно другої змінної відображень, а в [4] вони були покращені. У зв'язку з цими дослідженнями виник новий клас просторів. Кажуть ([2]), що топологічний простір Y є *простором Гана*, якщо для довільного топологічного простору X і довільного метризовного простору Z кожне відображення f з $\overline{CC}(X \times Y, Z)$, класу всіх відображень $f: X \times Y \rightarrow Z$, які неперервні відносно другої змінної і неперервні відносно першої змінної при значеннях другої змінної, що пробігає деяку скрізь щільну множину в Y , має властивість Гана. Кожний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, є простором Гана ([1]), але не навпаки ([4]).

В першій частині статті ми доводимо що відображення $f: X \times Y \rightarrow Z$, які сукупно квазинепрервні і майже неперервні відносно другої змінної при значеннях першої з деякої залишкової множини, мають властивість Гана за певних умов на простори.

Проф. О. Б. Скасків звернув нашу увагу на клас нарізно монотонних функцій $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, що природно виникає під час досліджень аналітичних функцій від декількох змінних. Зокрема, чи будуть такі функції *точково розривними* (точково розривними називаємо функції множина точок неперервності яких є скрізь щільною)? Тут ми даємо

2000 *Mathematics Subject Classification*: 54C08.

Keywords: Hahn property, jointly quasi-continuous mapping, nearly continuous mapping

doi:10.30970/ms.31.2.183-188

© В. В. Нестеренко, 2009

ствердну відповідь на це питання. Однак повний опис множини точок розриву таких функцій нам у даний час невідомий. У зв'язку з цими дослідженнями в поле нашого зору потрапив клас функцій $f: \mathbb{R} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, які монотонні відносно першої змінної і неперервні відносно другої змінної при значеннях першої з деякої залишкової множини. Виявляється, що цей клас також має властивість Гана за деяких умов на простір Y .

2. Нехай X і Y — топологічні простори, $f: X \rightarrow Y$ — відображення. Відображення f називається *квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу U точки x в X і для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує відкрита непорожня множина U_1 , така, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1) \subseteq V$. Відображення f називається *майже неперервним у точці* $x \in X$, якщо для будь-якого околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X , така, що $x \in \text{int } \overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$. Нехай Y — метричний простір. Позначимо через $\omega_f(A)$ коливання функції f на множині A . Функція $f: X \rightarrow Y$ називається *кліковою в точці* x_0 , якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного околу U точки x_0 в X існує відкрита непорожня множина U_1 , така, що $U_1 \subseteq U$ і $\omega_f(U_1) < \varepsilon$. Відображення f є *квазінеперервним, майже неперервним чи кліковим*, якщо воно є таким в кожній точці. Відображення $f: X \rightarrow Y$ називається *точково розривним*, якщо множина $C(f)$ є скрізь щільною в X . Добре відома така *характеризація квазінеперервності*: відображення $f: X \rightarrow Y$ квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої множини G в X і довільної множини A в X , такої, що $G \subseteq \overline{A}$ виконується включення $f(G) \subseteq \overline{f(A)}$. Позначимо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$.

Нам будуть потрібні наступні прості леми.

Лема 1. Нехай X — топологічний простір, Y — регулярний простір, відображення $f: X \rightarrow Y$ майже неперервне в точці $x_0 \in X$ і квазінеперервне. Тоді f неперервне в точці x_0 .

Доведення. Візьмемо довільний замкнений окіл V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y . Оскільки f майже неперервне в точці x_0 , то існує множина A в X , така, що $x_0 \in \text{int } \overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$. Тоді, з квазінеперервності відображення f маємо, що $f(\text{int } \overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{V} = V$. Отже, відображення f неперервне в точці x_0 . $\square$

Лема 2. Нехай X — топологічний простір, Y — метричний простір, функція $f: X \rightarrow Y$ майже неперервна і клікова. Тоді f неперервна.

Доведення. Нехай $|\circ - \circ|$ — метрика в просторі Y . Будемо міркувати від супротивного. Нехай функція f розривна в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді існує $\varepsilon > 0$, таке, що для довільного околу U точки x_0 в X існує точка $x_1 \in U$, що $|f(x_1) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Оскільки функція f майже неперервна в точці x_0 , то існує множина A_0 в X , така, що $x_0 \in \text{int } \overline{A_0}$ і $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для $x \in A_0$. Нехай $x_1 \in \text{int } \overline{A_0}$ і $|f(x_1) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. З майже неперервності функції f в точці x_1 випливає, що існує множина A_1 в X , така, що $x_1 \in \text{int } \overline{A_1}$ і $|f(x) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для $x \in A_1$. Оскільки функція f клікова, то існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq \text{int } \overline{A_0} \cap \text{int } \overline{A_1}$ і $\omega_f(G) < \frac{\varepsilon}{3}$. Виберемо точки $a_0 \in A_0 \cap G$ і $a_1 \in A_1 \cap G$. Тоді $|f(x_1) - f(x_0)| \leq |f(x_1) - f(a_1)| + |f(a_1) - f(a_0)| + |f(a_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Отримали суперечність. Отже, функція f неперервна. $\square$

3. Спочатку встановимо коли відображення $f: X \times Y \rightarrow Z$, які сукупно квазінеперервні і майже неперервні відносно другої змінної при значеннях першої з деякої залишкової множини, володіють властивістю Гана. Множина B топологічного простору Y

називається *множиною зліченного типу*, якщо існує така послідовність $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих в Y множин, що для кожної точки $y \in B$ система множин $\{V_n: y \in V_n\}$ є базою оточень точки y . Зауважимо, що коли простір задовольняє першу аксіому зліченності, то кожна одноточкова множина є множиною зліченного типу, а коли простір задовольняє другу аксіому зліченності, то кожна його підмножина є множиною зліченного типу.

Теорема 1. Нехай X та Y — топологічні простори, Z — метризовний простір, B — множина зліченного типу в Y , $f: X \times Y \rightarrow Z$ — сукупно казінеперервне відображення і f^x — майже неперервне для всіх x з деякої залишкової в X множини. Тоді існує залишкова в X множина A , така, що $A \times B \subseteq C(f)$.

Доведення. Для доведення теореми, згідно з лемою 1, достатньо встановити існування залишкової в X множини A , такої, що відображення f майже неперервне за сукупністю змінних в кожній точці множини $A \times B$. Будемо міркувати від супротивного. Нехай існує множина E_1 другої категорії в X , така, що для кожного $x \in E_1$ існує точка $y_x \in B$, що відображення f не є майже неперервним за сукупністю змінних в точці (x, y_x) . Зафіксуємо метрику $|\circ - \circ|$ в просторі Z , яка породжує його топологію. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існують $\varepsilon > 0$ і множина $E_2 = \{x \in E_1: (\forall O \subseteq X \times Y)(x, y_x) \in \text{int } \overline{O})(\omega_f(O) \geq \varepsilon)\}$ другої категорії в X .

Нехай M — це множина точок $x \in X$, для яких відображення f^x майже неперервне. Оскільки за умовою множина M залишкова, то множина $E = E_2 \cap M$ другої категорії в X . Розглянемо послідовність $\{V_n: n \in \mathbb{N}\}$ відкритих непорожніх множин в Y з означення множини зліченного типу, для множини B . Покладемо $A_n = \{x \in E: (y_x \in V_n)(\exists B_x \subseteq Y)(V_n \subseteq \overline{B_x})(\omega_{f^x}(B_x) < \frac{\varepsilon}{4})\}$. Легко бачити, що $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді існує номер n_0 , такий, що множина A_{n_0} десь щільна в X . Нехай $\overline{A_{n_0}} \supseteq U_0$, де U_0 — відкрита непорожня множина в X . Позначимо $V_0 = V_{n_0}$. Оскільки відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних, то існують відкриті непорожні множини U і V відповідно в X і Y , такі, що $U \times V \subseteq U_0 \times V_0$ і $\omega_f(U \times V) < \frac{\varepsilon}{4}$. Покладемо $O = \bigcup_{x \in U \cap A_{n_0}} (\{x\} \times B_x)$. Ця множина щільна в $U \times V_0$. Покажемо, що $\omega_f(O) < \varepsilon$. Візьмемо дві точки $p_i = (x_i, y_i) \in O$, де $i = 1, 2$. Нехай $q_i \in \{x_i\} \times (B_{x_i} \cap V)$, де $i = 1, 2$. Тоді

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(q_1)| + |f(q_1) - f(q_2)| + |f(q_2) - f(p_2)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Отже, $\omega_f(O) \leq \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$. Оскільки існує точка $x \in A_{n_0} \cap U \subseteq E_2$, то приходимо до суперечності. Теорему доведено. $\square$

Для доведення того, що сукупно квазінеперервні відображення, які майже неперервні відносно другої змінної, при значеннях першої змінної з деякої залишкової в X множини, мають властивість Гана, ми скористаємося запропонованим в [2] прийомом.

Теорема 2. Нехай X — топологічний простір, Y — сепарабельний з першою аксіомою зліченності простір Гана, Z — метризовний простір, $f: X \times Y \rightarrow Z$ — сукупно казінеперервне відображення і f^x — майже неперервне для всіх x з деякої залишкової в X множини. Тоді f має властивість Гана.

Доведення. Нехай спочатку X — берів простір. Зафіксуємо метрику на просторі Z , яка породжує його топологію. Оскільки простір Y сепарабельний, то існує множина

$Y_0 = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$, така, що $\overline{Y_0} = Y$. За теоремою 1 множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X для кожного $y \in Y$. Нехай M — це множина точок $x \in X$, для яких відображення f^x майже неперервне. Тоді множина $X_0 = M \cap \bigcap_{y \in Y_0} C_y(f)$ теж залишкова в X . Покладемо $g = f|_{X_0 \times Y}$. Відображення g^x майже неперервне і точково розривне (а тому, клікове) для всіх $x \in X_0$. Тому за лемою 2 відображення g^x неперервне для $x \in X_0$. Крім того, для кожного $y \in Y_0$ відображення g_y неперервне. Отже, $g \in \overline{CC}(X_0 \times Y, Z)$. Оскільки простір Y є простором Гана, то існує залишкова в X_0 множина A , така, що $A \times Y \subseteq C(g)$. А, оскільки $X \setminus A = (X \setminus X_0) \cup (X_0 \setminus A)$, множина $X \setminus X_0$ є першої категорії в X і множина $X_0 \setminus A$ є першої категорії в X_0 , а тому і в X , то множина $X \setminus A$ є першої категорії в X , звідки, A — залишкова в X . Отже, відображення f сукупно майже неперервне в кожній точці множини $A \times Y$. Якщо врахувати, що відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних, то скориставшись лемою 1 одержимо, що відображення f неперервне в кожній точці множини $A \times Y$.

Нехай тепер X — довільний топологічний простір. Згідно з теоремою Банаха про категорію простір X можна подати у вигляді диз'юнктного об'єднання $X_I \sqcup X_{II} \sqcup \Gamma$, де X_I — відкрита в X множина першої категорії, X_{II} — відкрита в X множина, яка є боровим простором в індукованій з X топології і Γ — замкнена ніде не щільна в X множина, що є межею множини X_{II} . Нехай $f_0 = f|_{X_{II} \times Y}$. Зрозуміло, що відображення f_0 сукупно квазінеперервне і f_0^x — майже неперервне для всіх x з деякої залишкової в X_{II} множини. Оскільки простір X_{II} берів, то за доведеним вище існує залишкова множина A в X_{II} , така, що $A \times Y \subseteq C(f_0)$. Множина A залишкова і в X , адже $X_{II} = X \setminus (X_I \cup \Gamma)$ залишкова в X . Оскільки X_{II} — відкрита множина, то $C(f_0) \subseteq C(f)$. Тому $A \times Y \subseteq C(f)$. $\square$

4. Спочатку переконаємося, що нарізно монотонна функція $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є точково розривною. Насправді ми встановимо трохи сильніший результат.

Теорема 3. *Нехай функція $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, така, що f_y монотонна для всіх y з деякої скрізь щільної в $\mathbb{R}$ множини і f^x монотонна для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тоді функція f точково розривна.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, що існують відкриті непорожні множини U і V в $\mathbb{R}$, такі, що функція f розривна в кожній точці з $U \times V$. Тоді існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина $E = \{p \in U \times V : \omega_f(p) \geq \varepsilon\}$ десь щільна. Нехай множина E щільна в $U_1 \times V_1$, де U_1 і V_1 відкриті непорожні множини в $\mathbb{R}$. Оскільки множина E замкнена, то $U_1 \times V_1 \subseteq E \subseteq U \times V$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база в $\mathbb{R}$. Розглянемо множини $A_n = \{x \in U_1 : \omega_{f^x}(V_n) < \frac{\varepsilon}{16}\}$. Оскільки монотонна функція точково розривна, то $U_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді існує номер n_0 , такий, що множина A_{n_0} щільна в деякій відкритій непорожній множині U_2 . Покладемо $V_0 = V_{n_0}$. Існує точка $y_0 \in V_0$, така, що функція f_{y_0} точково розривна. Тому існує невідроджений відрізок $[a, b]$ в U_2 , такий, що $a, b \in A_{n_0}$ і $\omega_{f_{y_0}}([a, b]) < \frac{\varepsilon}{16}$.

Виберемо довільний невідроджений відрізок $[c, d]$, такий, що $y_0 \in [c, d] \subseteq V_0$ і функції f_c і f_d монотонні. Покажемо, що $\omega_f([a, b] \times [c, d]) < \varepsilon$. Маємо

$$|f(a, c) - f(b, c)| \leq |f(a, c) - f(a, y_0)| + |f(a, y_0) - f(b, y_0)| + |f(b, y_0) - f(b, c)| < \frac{3\varepsilon}{16}$$

і подібно $|f(a, d) - f(b, d)| < \frac{3\varepsilon}{16}$. Оскільки функції f_c і f_d монотонні, то $|f(x', c) - f(x'', c)| < \frac{3\varepsilon}{16}$ і $|f(x', d) - f(x'', d)| < \frac{3\varepsilon}{16}$ для довільних точок $x', x'' \in [a, b]$. Тоді для довільного $x \in \mathbb{R}$

маємо

$$|f(x, c) - f(x, d)| \leq |f(x, c) - f(a, c)| + |f(a, c) - f(a, d)| + |f(a, d) - f(x, d)| < \frac{7\varepsilon}{16}.$$

Також з монотонності функції f^x для кожного $x \in \mathbb{R}$ і довільних $y', y'' \in [c, d]$ випливає, що $|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{7\varepsilon}{16}$. Тоді для довільних точок $p_i = (x_i, y_i) \in [a, b] \times [c, d]$, $i = 1, 2$ маємо

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(x_1, y_0)| + |f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0)| + |f(x_2, y_0) - f(p_2)| < \frac{15\varepsilon}{16}.$$

Отже, $\omega_f([a, b] \times [c, d]) \leq \frac{15\varepsilon}{16} < \varepsilon$. Оскільки $[a, b] \times [c, d] \subseteq E$, то одержуємо суперечність. $\square$

Тепер розглянемо функції $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, які монотонні відносно першої змінної і неперервні відносно другої змінної при значеннях першої з деякої залишкової множини.

Теорема 4. Нехай Y — топологічний простір, B — множина зліченного типу в Y , відображення $f: \mathbb{R} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ монотонне відносно першої змінної і неперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в $\mathbb{R}$. Тоді існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A , така, що $A \times B \subseteq C(f)$.

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай існує множина E_1 другої категорії в $\mathbb{R}$, така, що для кожного $x \in E_1$ існує точка $y_x \in B$, що відображення f не є неперервним за сукупністю змінних в точці (x, y_x) . Оскільки множина E_1 другої категорії, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина $E_2 = \{x \in E_1: \omega_f(\{(x, y_x)\}) \geq \varepsilon\}$ другої категорії в $\mathbb{R}$. Нехай M — це множина точок $x \in \mathbb{R}$, для яких відображення f^x неперервне. Оскільки за умовою множина M залишкова, то множина $E = E_2 \cap M$ другої категорії в $\mathbb{R}$. Розглянемо послідовність $\{V_n: n \in \mathbb{N}\}$ відкритих непорожніх множин в Y , які фігурують в означенні множини зліченного типу, для множини B . Покладемо $A_n = \{x \in E: (y_x \in V_n)(\omega_{f^x}(V_n) < \frac{\varepsilon}{8})\}$. Оскільки відображення f^x неперервне для $x \in E$, то $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді існує номер n_0 , такий, що множина A_{n_0} десь щільна в $\mathbb{R}$. Нехай $\overline{A_{n_0}} \supseteq U_0$, де U_0 — відкрита непорожня множина в X . Позначимо $V_0 = V_{n_0}$. Виберемо довільну точку $y_0 \in V_0$. Оскільки функція f_{y_0} монотонна, то множина її точок розриву не більш ніж зліченна. Тому існує невироджений відрізок $[a, b] \subseteq U_0$, такий, що $a, b \in A_{n_0}$ і $\omega_{f_{y_0}}([a, b]) < \frac{\varepsilon}{8}$.

Перевіримо, чи $\omega_f([a, b] \times V_0) < \varepsilon$. Виберемо довільну точку $y \in V_0$. Тоді

$$|f(a, y) - f(b, y)| \leq |f(a, y) - f(a, y_0)| + |f(a, y_0) - f(b, y_0)| + |f(b, y_0) - f(b, y)| \leq \frac{3\varepsilon}{8}.$$

Оскільки функція f_y монотонна для кожного $y \in V_0$, то для довільних точок $x', x'' \in [a, b]$ маємо, що $|f(x', y) - f(x'', y)| \leq \frac{3\varepsilon}{8}$. Виберемо довільні точки $p_i = (x_i, y_i) \in [a, b] \times V_0$, де $i \in \{1, 2\}$. Тоді

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(a, y_1)| + |f(a, y_1) - f(a, y_2)| + |f(a, y_2) - f(p_2)| \leq \frac{7\varepsilon}{8}.$$

Отже, $\omega_f([a, b] \times V_0) \leq \frac{7\varepsilon}{8} < \varepsilon$. Оскільки $A_{n_0} \cap [a, b] \neq \emptyset$, то одержали суперечність з припущенням. $\square$

Теорема 5. Нехай Y — сепарабельний з першою аксіомою зліченності простір Гана, відображення $f: \mathbb{R} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ монотонне відносно першої змінної і неперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в $\mathbb{R}$. Тоді відображення f має властивість Гана.

Доведення. Доведення цієї теореми подібне до доведення теореми 2. Зафіксуємо метрику на просторі Z , яка породжує його топологію. Оскільки простір Y сепарабельний, то існує множина $Y_0 = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$, така, що $\overline{Y_0} = Y$. Згідно з теоремою 4 множина $C_y(f) = \{x \in X: (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в $\mathbb{R}$ для кожного $y \in Y$. Нехай M — це множина точок $x \in \mathbb{R}$, для яких відображення f^x неперервне. Тоді множина $X_0 = M \cap \bigcap_{y \in Y_0} C_y(f)$ теж залишкова в $\mathbb{R}$. Покладемо $g = f|_{X_0 \times Y}$. Відображення g^x неперервне для всіх $x \in X_0$ і для кожного $y \in Y_0$ відображення g_y неперервне. Отже, $g \in \overline{CC}(X_0 \times Y, Z)$. Оскільки простір Y є простором Гана, то існує залишкова в X_0 множина A , така, що $A \times Y \subseteq C(g)$. А оскільки $\mathbb{R} \setminus A = (\mathbb{R} \setminus X_0) \cup (X_0 \setminus A)$, множина $\mathbb{R} \setminus X_0$ є першої категорії в $\mathbb{R}$ і множина $X_0 \setminus A$ є першої категорії в X_0 , а тому і в $\mathbb{R}$, то множина $X \setminus A$ є першої категорії в X , отже, A — залишкова в X .

Доведемо, що і відображення f неперервне в кожній точці множини $A \times Y$. Виберемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in A \times Y$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки відображення g неперервне в точці p_0 , то існують відкриті околиці U та V точок x_0 та y_0 відповідно в просторах $\mathbb{R}$ та Y , такі, що $\omega_g((U \cap A) \times V) < \frac{\varepsilon}{4}$. Оскільки для кожного $y \in V$ функція f_y монотонна і множина A щільна в U , то для довільних $x', x'' \in U$ маємо, що $|f(x', y) - f(x'', y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Візьмемо довільні точки $p_i = (x_i, y_i) \in U \times V$, де $i \in \{1, 2\}$. Тоді

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(x_0, y_1)| + |f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| + |f(x_0, y_2) - f(p_2)| \leq \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Звідси, $\omega_f((U \times V)) < \varepsilon$. Це означає, що функція f неперервна в точці p_0 . Отже, функція f має властивість Гана. $\square$

Автор висловлює щирю вдячність професору В.К. Маслюченку за постійну увагу до роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. J. Calbrix, J.-P. Troallic, *Applications separement continues*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. **288** (1979) 647–648.
2. В.К. Маслюченко, *Простори Гана і задача Діні*, Мат. методи і фіз.-мех. поля. **41** (1998) №4, 39–45.
3. В.К. Маслюченко, В.В. Нестеренко, *Сукупна неперервність та квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій*, Укр. мат. журн. **52** (2000) №12, 1711–1714.
4. В.В. Нестеренко, *Про властивість Гана*, Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 374. Математика. — Чернівці: Рута. — 2008. — С. 99–102.

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича
mathan@ukr.net

Надійшло 02.10.2008
Після переробки 10.12.2008