

УДК 515.1

Є. О. Полулях

ПРО СІДЛОВІ ТОЧКИ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА ЗАМКНЕНОМУ ДВОВИМІРНОМУ ДИСКУ

Ye. O. Polulyakh. *On saddle points of continuous functions on the closed 2-disk*, Mat. Stud. **31** (2009), 172–182.

We discuss definitions of regular, critical and saddle points of continuous functions on the plane. Two different definitions of a regular point are given. The example is constructed of a continuous non-negative function on the closed 2-disk D^2 which vanishes at its boundary and has exactly two local extrema in $\text{Int}D^2$ and has no saddle points.

Е. А. Полулях. *О седловых точках непрерывных функций на замкнутом двумерном диске* // Мат. Студії. – 2009. – Т.31, №2. – С.172–182.

В работе обсуждаются определения регулярной, критической и седловой точки непрерывной функции на плоскости. Даются два различных определения регулярной точки. Строится пример непрерывной неотрицательной функции на замкнутом двумерном диске D^2 , которая равна нулю на границе диска, имеет в $\text{Int}D^2$ ровно два локальных экстремума и не имеет седловых точек.

1. Вступ. Нехай $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ — замкнений круг на площині, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція. Існує принаймні два різних способи визначення поняття регулярної точки неперервної функції.

Означення 1. Точка $x \in \text{Int}D$ називається *регулярною* для функції f , якщо існує такий відкритий окіл $U_x \ni x$, що для кожного $y \in U_x$ зв'язна компонента γ_y множини $U_x \cap f^{-1}(f(y))$, яка містить точку y , гомеоморфна до відкритого інтервалу $(0, 1)$.

Інший підхід дається таким означенням.

Означення 2. Точка $x \in \text{Int}D$ називається *регулярною* для функції f , якщо існує такий відкритий окіл $U_x \ni x$, що

- зв'язна компонента γ_x множини $U_x \cap f^{-1}(f(x))$, яка містить точку x , гомеоморфна до відкритого інтервалу $(0, 1)$;
- множина $U_x \setminus \gamma_x = U_x^- \cup U_x^+$ має дві компоненти зв'язності U_x^- і U_x^+ , причому $\forall y \in U_x^+ : f(x) < f(y)$ і $\forall y \in U_x^- : f(x) > f(y)$

Точки круга, що не є регулярними, називатимемо *критичними*.

Маючи означення регулярної точки неперервної функції f , визначимо поняття сідової точки.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 54C05, 54C50.

Keywords: saddle point, continuous function, closed 2-disk

doi:10.30970/ms.31.2.172-182

© Є. О. Полулях, 2009

Означення 3. Точка $x \in \text{Int}D$ називається *сідловою точкою* функції f , якщо існують такі відкритий окіл $U_x \ni x$ і гомеоморфізм $h: U_x \rightarrow \text{Int}D$, що

- при деякому $n > 1$ для компоненти зв'язності γ_x множини $U_x \cap f^{-1}(f(x))$, яка містить точку x , виконується рівність $h(\gamma_x) = h(U_x) \cap \{z \in \text{Int}D \mid \text{Re } z^n = 0\}$;
- кожна точка $y \in U_x \setminus \{x\}$ є регулярною точкою функції f .

Нагадаємо, що *локальним екстремумом* функції f називається точка x , яка має окіл U_x , такий що або для всіх $y \in U_x$ виконується нерівність $f(y) \leq f(x)$, або $f(y) \geq f(x)$ для кожного $y \in U_x$.

Розглянемо тепер неперервну функцію $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає двом додатковим вимогам:

- (i) $f(\partial D) = 0$, $f(x) > 0$ для всіх $x \in \text{Int}D$ (тут ∂D коло, яке є межею круга D);
- (ii) функція f має в $\text{Int}D$ точно два локальних екстремума.

За аналогією з гладким випадком виникає природне запитання: чи вірно, що неперервна функція f , яка відповідає вимогам (i) і (ii), має в $\text{Int}D$ хоча б одну сідлову точку?

Основною метою цієї статті є побудова неперервної функції $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає вимогам (i) і (ii) і не має в $\text{Int}D$ жодної сідлової точки незалежно від того, за допомогою якого з означень 1 або 2 визначаються її регулярні точки.

2. Побудова функції f з двома екстремумами і без сідлових точок. Розіб'ємо процес побудови f на декілька кроків за наступним планом.

Спочатку побудуємо неперервну функцію $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яка має точно три критичні точки — два локальні максимума $M_1 = (0, 1)$, $M_2 = (0, -1)$ і сідлову точку $S = (0, 0)$. Також подбаємо, щоб для деякого $c \in \mathbb{R}$ функція g мала лінію рівня $\gamma = g^{-1}(c)$, яка обмежує круг, що містить точки M_1 , M_2 і S .

Потім побудуємо ін'єктивне відображення $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times [-1, 1]$, яке є гомеоморфізмом на свій образ, і продовжимо обернене відображення $F^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ до неперервного відображення $\hat{F}$ так, щоб $\hat{F}(\{0\} \times [-1, 1]) = (0, 0)$.

Визначимо неперервну функцію $\hat{f} = g \circ \hat{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ і доведемо, що жодна точка відрізка $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times [-1, 1]$ не є ні локальним екстремумом, ні сідловою точкою функції $\hat{f}$.

Обмежимо $\hat{f}$ на замкнену область $\hat{D}$, межею якої є проста замкнена крива $\hat{\gamma} = F(\gamma) = (g \circ \hat{F})^{-1}(c) = \hat{f}^{-1}(c)$. Фіксуємо гомеоморфізм $H_0: \hat{D} \rightarrow \partial D$ і продовжимо його до гомеоморфізму $H: \hat{D} \rightarrow D$, скориставшись теоремою Шенфліса (див. [1, 2]).

Позначимо $f' = \hat{f} \circ H^{-1}: D \rightarrow \mathbb{R}$. Тоді функція $f(x) = f'(x) - c$, $x \in D$, має відповідати умовам (i) і (ii) і ні одна з її сингулярних точок не буде сідловою.

2.1. Функція g з двома локальними максимумами і однією сідловою точкою.

Нехай ρ — стандартна відстань на площині. Розглянемо функцію $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(z) = \max(1 - \rho(z, M_1), 1 - \rho(z, M_2)) = \begin{cases} 1 - \rho(z, M_1), & \text{якщо } \text{Im } z \geq 0, \\ 1 - \rho(z, M_2), & \text{якщо } \text{Im } z \leq 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що функція g неперервна, точки M_1 і M_2 є її локальними максимумами і кожна точка множини $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \times \{0\}$ є регулярною точкою цієї функції як в сенсі означення 1, так і в сенсі означення 2.

Щоб дослідити поведінку g в точках прямої $\mathbb{R} \times \{0\}$, знайдемо лінії рівня функції g .

Очевидно, що при $0 < c < 1$ множина $g_c = g^{-1}(c) = \{z | \rho(z, M_1) = 1 - c\} \cup \{z | \rho(z, M_2) = 1 - c\}$ є незв'язним об'єднанням двох кіл з центрами в точках M_1 і M_2 .

При $c = 0$ маємо

$$g_0 = \{z | \rho(z, M_1) = 1\} \cup \{z | \rho(z, M_2) = 1\} = \{z | |z - i| = 1\} \cup \{z | |z + i| = 1\}$$

і g_0 є об'єднанням двох кіл, які перетинаються в єдиній точці $S = 0$.

При $c < 0$ множина

$$g_c = \{z | \rho(z, M_1) = 1 - c, \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \{z | \rho(z, M_2) = 1 - c, \operatorname{Im} z \leq 0\}$$

складається з двох дуг зі спільними кінцями.

За теоремою Жордана про криву, при $c < 0$ проста замкнена крива g_c розбиває площину на дві зв'язні компоненти, одна з яких гомеоморфна до відкритого круга, а друга необмежена. Позначимо їх через $U_{g,c}^0$ і $U_{g,c}^\infty$, відповідно. Легко бачити, що

$$U_{g,c}^0 = \{z | g(z) > c\}, \quad U_{g,c}^\infty = \{z | g(z) < c\}.$$

Зі сказаного робимо висновок, що кожна точка множини $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\}$ є регулярною точкою функції g як в сенсі означення 1, так і в сенсі означення 2.

Точка ж $S = 0$ є сідловою точкою функції g . В означенні 3 для точки S треба взяти $n = 2$, $U_S = U_\varepsilon(S) = \{z | \rho(z, S) < \varepsilon\}$ при $\varepsilon \in (0, 1)$. Для того, щоб побудувати неперервне відображення h , яке б відповідало означенню 3, нам буде потрібне наступне твердження і його наслідок.

Лема 1. Нехай $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ і $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервні функції. Нехай $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], y \in [\min(\alpha(x), \beta(x)), \max(\alpha(x), \beta(x))]\}$. Відображення $G: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow K$,

$$G(x, t) = (x, t\beta(x) + (1 - t)\alpha(x)) \quad (1)$$

є факторним.

Наслідок 1. Нехай $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ і $\alpha_i, \beta_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, — неперервні функції. Нехай $K_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b], y \in [\min(\alpha_i(x), \beta_i(x)), \max(\alpha_i(x), \beta_i(x))]\}$, $C_i = \{x \in [a, b] | \alpha_i(x) = \beta_i(x)\}$, $i = 1, 2$.

Якщо $C_1 \subseteq C_2$, то відображення $H: K_1 \rightarrow K_2$,

$$H(x, y) = \begin{cases} \left(x, \frac{(y - \alpha_1(x))\beta_2(x) + (\beta_1(x) - y)\alpha_2(x)}{\beta_1(x) - \alpha_1(x)} \right), & \alpha_1(x) \neq \beta_1(x), \\ (x, \alpha_2(x)), & \alpha_1(x) = \beta_1(x), \end{cases} \quad (2)$$

неперервне.

Якщо $C_1 = C_2$, то H гомеоморфно відображає K_1 на K_2 .

Перед доведенням леми нагадаємо деякі топологічні поняття (див. [3]).

Нехай $h: X \rightarrow Y$ — деяке неперервне відображення. Нехай $\mathfrak{f}$ і $\mathfrak{h}$ — деякі розбиття просторів X і Y , відповідно, і відображення h переводить елементи розбиття $\mathfrak{f}$ в елементи розбиття $\mathfrak{h}$. тоді однозначно визначене і неперервне відображення $\operatorname{fact} h: X/\mathfrak{f} \rightarrow Y/\mathfrak{h}$, для якого комутативною є така діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \operatorname{pr}_X \downarrow & & \downarrow \operatorname{pr}_Y \\ X/\mathfrak{f} & \xrightarrow{\operatorname{fact} h} & Y/\mathfrak{h} \end{array}$$

Нехай тепер $\mathfrak{h}$ — розбиття простору Y на окремі точки, $\text{zer } h = \mathfrak{f}$ — розбиття простору X на прообрази точок простору Y . В цьому випадку $Y/\mathfrak{h} \cong Y$, а відображення $\text{fact } h$, для якого виконується рівність $h = \text{fact } h \circ \text{pr}_X$ називається *взаємно-однозначним фактором* відображення h . Неперервне відображення h називається *факторним*, якщо його взаємно-однозначний фактор є гомеоморфізмом (в цьому випадку простір Y можна розглядати як фактор-простір простору X за розбиттям $\text{zer } h$).

Доведення лемми 1. Легко бачити, що координатні відображення $\text{pr}_1 \circ G: (x, t) \mapsto x$ та $\varphi(x, t) = \text{pr}_2 \circ G(x, t) = t\beta(x) + (1-t)\alpha(x)$, $(x, t) \in [a, b] \times I$, неперервні, тому що можуть бути представлені як композиції неперервних відображень. Внаслідок цього і відображення G неперервне в кожній точці $(x, t) \in [a, b] \times I$.

Зрозуміло, що підпростір K площини $\mathbb{R}^2$ гаусдорфів і $G([a, b] \times I) = K$. Простір $[a, b] \times I$ є компактом, тому відображення G замкнене, а це є достатньою умовою його факторності (див.[3]). $\square$

Доведення наслідку 1. Розглянемо відображення $G_i: [a, b] \times I \rightarrow K_i$, $i = 1, 2$, які відповідають лемі 1. Можемо дивитися на простори K_i , як на фактор-простори простору $[a, b] \times I$ за розбиттями $\text{zer } G_i$, а G_i вважати відображеннями проекції.

Для кожного $x \in [a, b]$ при $x \notin C_i$ кожна точка відрізка $\{x\} \times I$ є елементом розбиття $\text{zer } G_i$, а при $x \in C_i$ весь відрізок $\{x\} \times I$ стає елементом $\text{zer } G_i$, $i = 1, 2$. Включення $C_1 \subseteq C_2$ гарантує нам, що розбиття $\text{zer } G_1$ є подрібненням розбиття $\text{zer } G_2$. Тому існує неперервне відображення $\hat{H}$, яке замикає комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} [a, b] \times I & \xrightarrow{\text{Id}} & [a, b] \times I \\ G_1 \downarrow & & \downarrow G_2 \\ K_1 & \xrightarrow{\hat{H} = \text{fact Id}} & K_2 \end{array}$$

Нехай $(x, t) \in [a, b] \times I$, $(x, y_i) = G_i(x, t)$, $i = 1, 2$. Тоді $\hat{H}(x, y_1) = (x, y_2)$. З формули (1) знаходимо $y_i - \alpha_i(x) = t(\beta_i(x) - \alpha_i(x))$, $i = 1, 2$.

$$\text{Якщо } \alpha_1(x) \neq \beta_1(x), \text{ то } t = (y_1 - \alpha_1(x)) / (\beta_1(x) - \alpha_1(x)) \text{ і}$$

$$y_2 = \frac{(y_1 - \alpha_1(x))\beta_2(x) + (\beta_1(x) - y_1)\alpha_2(x)}{\beta_1(x) - \alpha_1(x)}.$$

Якщо ж $\alpha_1(x) = \beta_1(x)$, то зі співвідношення $C_1 \subseteq C_2$ випливає, що $\alpha_2(x) = \beta_2(x)$ і $y_2 = \alpha_2(x)$.

Очевидно, для будь-якої точки $(x, y_1) \in K_1$ знайдеться її прообраз $(x, t) \in G_1^{-1}(x, y_1) \subseteq \{x\} \times I \subseteq [a, b] \times I$. Тому відображення $\hat{H} = \text{fact Id}$ відповідає формулі 2, тобто $\hat{H} = H$.

Якщо $C_1 = C_2$, то як легко бачити, розбиття $\text{zer } G_1$ і $\text{zer } G_2$ збігаються. Тому відображення H бієктивне. Множина $K_1 = G_1([a, b] \times I)$ є компактом (як образ компакту $[a, b] \times I$ в гаусдорфовому просторі K_1) і простір K_2 гаусдорфів, тому відображення H є гомеоморфізмом. $\square$

Повернемося до функції $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Доведемо, що точка $S = 0$ є сідловою для g . Ми вже перевірили, що всі близькі до S точки є регулярними для g , тому нам достатньо побудувати гомеоморфізм $h: U_S \rightarrow \mathbb{R}^2$, який заданий на деякому околі U_S точки S і відображає множину $g_0 \cap U_S$ на $h(U_S) \cap \{z \mid \text{Re } z^2 = 0\}$.

Розглянемо квадрат $[-1, 1] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ і неперервні функції $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \eta_1, \eta_2: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $\varphi_1(x) = -1 + \sqrt{1 - x^2}, \psi_1(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, \varphi_2(x) = -|x|, \psi_2(x) = |x|, \eta_1(x) = -1, \eta_2(x) = 1$.

Зрозуміло, що множина $\Theta_1 = \{(x, \varphi_1(x)) | x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, \psi_1(x)) | x \in [-1, 1]\}$ утворює перетин $([-1, 1] \times [-1, 1]) \cap g_0$, а множина $\Theta_2 = \{(x, \varphi_2(x)) | x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, \psi_2(x)) | x \in [-1, 1]\}$ утворює діагоналі квадрата $[-1, 1] \times [-1, 1]$ (перетин квадрата з множиною $\{z | \operatorname{Re} z^2 = 0\}$).

Застосуємо наслідок 1 послідовно до пар функцій η_1, φ_1 і η_1, φ_2 ; φ_1, ψ_1 і φ_2, ψ_2 ; ψ_1, η_2 і ψ_2, η_2 . Отримаємо розбиття квадрата на три замкнених області K_1^1, K_1^2, K_1^3 , і три гомеоморфізми $H_i: K_1^i \rightarrow K_2^i, i \in \{1, 2, 3\}$, які узгоджені на спільних частинах областей K_1^1, K_1^2, K_1^3 . Отже, коректно визначене неперервне взаємно-однозначне відображення $h: [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]^2, h(x, y) = H_i(x, y)$, якщо $(x, y) \in K_1^i$, і це відображення переводить множину Θ_1 в Θ_2 (див. рис. 1).

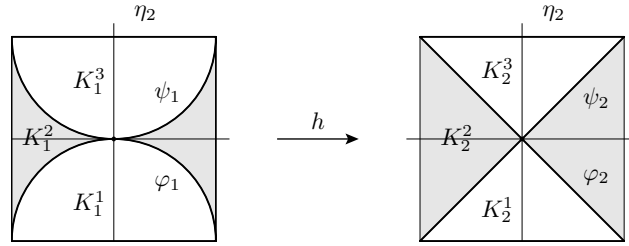


Рис. 1: Заштриховані області K_1^2 і K_2^2

2.2. Відображення $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Розглянемо наступні функції на відрізку $J = [-1, 1]$ $\tilde{\varphi}_1(x) = -1 - \sqrt{1 - x^2}, \varphi_1(x) = -1 + \sqrt{1 - x^2}, \tilde{\psi}_1(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}, \psi_1(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, \varphi_2(x) = -|x|, \psi_2(x) = |x|, \eta_1(x) = -1, \eta_2(x) = 1$, а також функції на множині $J \setminus \{0\}$ $\nu(x) = (1 - |x|)^2 \sin \frac{\pi}{x}, \nu_1(x) = \nu(x) - |x|, \nu_2(x) = \nu(x) + |x|$.

Графіки цих функцій наведені на рисунках 2 і 3.

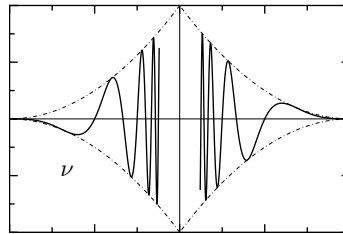
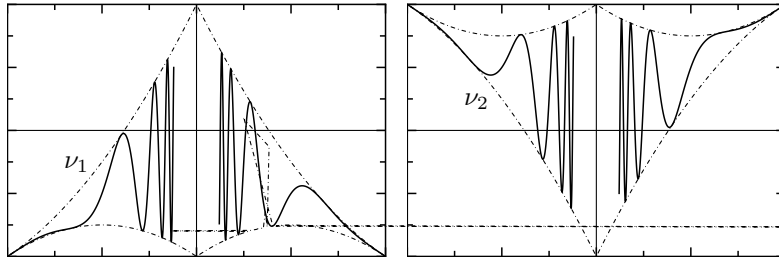


Рис. 2: Функція ν . Пунктиром показано функції $\pm(1 - |x|)^2$

Розглянемо також такі підмножини площини

$$\begin{aligned} K^- &= \{(x, y) | x \in J, y \in [\tilde{\varphi}_1(x), \varphi_2(x)]\}, & \hat{K}^- &= \{(x, y) | x \in J, y \in [\tilde{\varphi}_1(x), \eta_1(x)]\}, \\ K^+ &= \{(x, y) | x \in J, y \in [\psi_2(x), \tilde{\psi}_1(x)]\}, & \hat{K}^+ &= \{(x, y) | x \in J, y \in [\eta_2(x), \tilde{\psi}_1(x)]\}, \\ L &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | x \in J, y \in [\tilde{\varphi}_1(x), \tilde{\psi}_1(x)]\}. \end{aligned}$$

Рис. 3: Функції ν_1 і ν_2

Застосуємо наслідок 1 при $[a, b] = J$, $\alpha_1 = \tilde{\varphi}_1$, $\beta_1 = \varphi_2$, $\alpha_2 = \tilde{\varphi}_1$, $\beta_2 = \eta_1$. Отримаємо гомеоморфізм $F^-: K^- \rightarrow \hat{K}^-$, який для кожного $x \in J$ лінійно відображає відрізок $\{x\} \times [\tilde{\varphi}_1(x), \varphi_2(x)]$ на відрізок $\{x\} \times [\tilde{\varphi}_1(x), \eta_1(x)]$.

Подібно, при $\alpha_1 = \psi_2$, $\beta_1 = \psi_1$, $\alpha_2 = \eta_2$ і $\beta_2 = \psi_1$ наслідок 1 дасть нам гомеоморфізм $F^+: K^+ \rightarrow \hat{K}^+$. Розглянемо також гомеоморфізм $F_L = \text{Id}_L: L \rightarrow L$.

Розглянемо також для кожного $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ множини

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\min \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \right), \max \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \right) \right], \\ K_n^- &= \{(x, y) | x \in I_n, y \in [\varphi_2(x), \varphi_1(x)]\}, \hat{K}_n^- = \{(x, y) | x \in I_n, y \in [\eta_1(x), \nu_1(x)]\}, \\ K_n^0 &= \{(x, y) | x \in I_n, y \in [\varphi_1(x), \psi_1(x)]\}, \hat{K}_n^0 = \{(x, y) | x \in I_n, y \in [\nu_1(x), \nu_2(x)]\}, \\ K_n^+ &= \{(x, y) | x \in I_n, y \in [\psi_1(x), \psi_2(x)]\}, \hat{K}_n^+ = \{(x, y) | x \in I_n, y \in [\nu_2(x), \eta_2(x)]\}, \\ K_n &= K_n^- \cup K_n^0 \cup K_n^+ = \{(x, y) | x \in I_n, y \in [-|x|, |x|]\}, \\ \hat{K}_n &= \hat{K}_n^- \cup \hat{K}_n^0 \cup \hat{K}_n^+ = \{(x, y) | x \in I_n, y \in [-1, 1]\}. \end{aligned}$$

Нехай $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Для відрізка $[a, b] = I_n$ і функцій $\alpha_1 = \varphi_2$, $\beta_1 = \varphi_1$, $\alpha_2 = \eta_1$, $\beta_2 = \nu_1$ наслідок 1 дасть нам гомеоморфізм $F_n^-: K_n^- \rightarrow \hat{K}_n^-$, який при кожному $x \in I_n$ відображає відрізок $\{x\} \times [\varphi_2(x), \varphi_1(x)]$ лінійно на відрізок $\{x\} \times [\eta_1(x), \nu_1(x)]$.

Аналогічно, користуючись наслідком 1, спочатку для функцій φ_1 , ψ_1 , ν_1 , ν_2 , а потім для функцій ψ_1 , ψ_2 , ν_2 , η_2 , отримаємо відповідно гомеоморфізми $F_n^0: K_n^0 \rightarrow \hat{K}_n^0$, $F_n^+: K_n^+ \rightarrow \hat{K}_n^+$.

Помітимо, що гомеоморфізми F_n^- , F_n^0 і F_n^+ узгоджені на спільній частині області визначення, тобто $F_n^- = F_n^0$ на множині $K_n^- \cap K_n^0$ і $F_n^0 = F_n^+$ на множині $K_n^0 \cap K_n^+$. Тому визначене відображення $F_n: K_n \rightarrow \hat{K}_n$,

$$F_n(x, y) = \begin{cases} F_n^-(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in K_n^-, \\ F_n^0(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in K_n^0, \\ F_n^+(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in K_n^+. \end{cases}$$

Нагадаємо деякі факти з загальної топології (див. [3]).

Фундаментальним покриттям простору X називається таке покриття $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$, що довільна множина $U \subseteq X$ відкрита (замкнена) в X , коли для кожного $\alpha \in A$ множина $U \cap V_\alpha$ відкрита (замкнена) в просторі V_α в індукованій з X топології. Відомо, що кожне відкрите покриття, а також локально-скінчене замкнене покриття є фундаментальним.

Нехай $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — деяке покриття простору X і $\{\Theta_\alpha: V_\alpha \rightarrow Y\}_{\alpha \in A}$ — сім'я відображень, які узгоджені на спільній частині області визначення, тобто $\Theta_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = \Theta_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta}$,

якщо $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, $\alpha, \beta \in A$.

Нехай відображення $\Theta: X \rightarrow Y$ визначене за допомогою співвідношення $\Theta(x) = \Theta_\alpha(x)$, якщо $x \in V_\alpha$.

Тоді якщо всі Θ_α неперервні і покриття $\{V_\alpha\}$ фундаментальне, то і Θ неперервне.

Покриття K_n^-, K_n^0, K_n^+ множини K_n є замкненим і скінченим, тому воно фундаментальне і відображення F_n неперервне. Легко бачити, що F_n взаємно-однозначно відображає компакт K_n на $\hat{K}_n$, отже це відображення є гомеоморфізмом.

Розглянемо множини

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} K_n = \{(x, y) | x \in J \setminus \{0\}, y \in [-|x|, |x|]\},$$

$$\hat{K} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \hat{K}_n = \{(x, y) | x \in J \setminus \{0\}, y \in [-1, 1]\}.$$

Легко бачити, що сім'я множин $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ утворює локально-скінченне замкнене покриття простору K і сім'я відображень $\{F_n\}$ відповідає умовам

$$F_n|_{K_n \cap K_m} = F_m|_{K_n \cap K_m}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

(за побудовою $K_n \cap K_m \neq \emptyset$ тільки якщо $|m - n| \leq 1$). Тому покриття $\{K_n\}$ фундаментальне і відображення $F_K: K \rightarrow \hat{K}$,

$$F_K(x, y) = F_n(x, y), \quad \text{якщо } (x, y) \in K_n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

неперервне.

Кожне з відображень F_n є гомеоморфізмом K_n на $\hat{K}_n$, тому визначені неперервні відображення $\hat{F}_n = F_n^{-1}: \hat{K}_n \rightarrow K_n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Безпосередня перевірка показує, що виконуються співвідношення

$$\hat{F}_n|_{\hat{K}_n \cap \hat{K}_m} = \hat{F}_m|_{\hat{K}_n \cap \hat{K}_m}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Отже, визначене відображення $\hat{F}_K: \hat{K} \rightarrow K$,

$$\hat{F}_K(x, y) = \hat{F}_n(x, y), \quad \text{якщо } (x, y) \in \hat{K}_n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Як і вище, сім'я множин $\{\hat{K}_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ утворює фундаментальне покриття простору $\hat{K}$ і відображення $\hat{F}_K$ неперервне.

Якщо $(x, y) \in K_n$, то $F_K(x, y) \in \hat{K}_n$ і

$$\hat{F}_K \circ F_K(x, y) = \hat{F}_K \circ F_n(x, y) = \hat{F}_n \circ F_n(x, y) = F_n^{-1} \circ F_n(x, y) = (x, y).$$

Тому $\hat{F}_K \circ F_K = \text{Id}_K$.

Подібно, $F_K \circ \hat{F}_K = \text{Id}_{\hat{K}}$. Отже, $\hat{F}_K = F_K^{-1}$ і відображення $F_K: K \rightarrow \hat{K}$ є гомеоморфізмом.

Очевидно, $F_K|_{\{-1\} \times J} = F_{-1}|_{\{-1\} \times J} = \text{Id}; F_K|_{\{1\} \times J} = F_1|_{\{1\} \times J} = \text{Id}$. Тому виконуються співвідношення

$$F_K|_{K \cap L} = F_L|_{K \cap L}; F_K|_{K \cap K^\pm} = F^\pm|_{K \cap K^\pm}; F_L|_{K \cap K^\pm} = F^\pm|_{L \cap K^\pm}.$$

Позначимо

$$M^+ = K^+ \setminus \{(0,0)\}; \widehat{M}^+ = \widehat{K}^+ \setminus \{(0,1)\}; M^- = K^- \setminus \{(0,0)\}; \widehat{M}^- = \widehat{K}^- \setminus \{(0,-1)\}.$$

Очевидно, $F^\pm(M^\pm) = \widehat{M}^\pm$, тому визначене відображення (див. рис. 4)

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = K \cup M^+ \cup M^- \cup L \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$F(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{якщо } (x, y) \in L; \\ F^\pm(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in M^\pm; \\ F_K(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in K. \end{cases}$$

Набір множин $\{K, M^+, M^-, L\}$ є скінченним замкненим покриттям простору $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, тому це покриття фундаментальне і відображення F неперервне.

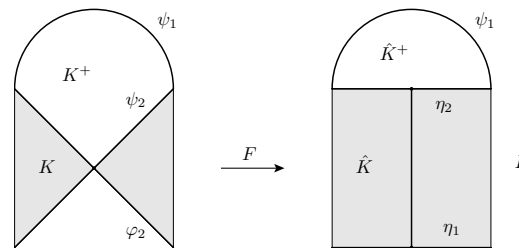


Рис. 4: Відображення F . Заштриховано області K і $\widehat{K}$

За побудовою $F(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \widehat{K} \cup \widehat{M}^+ \cup \widehat{M}^- \cup L = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J)$.

Як і вище перевіряється, що відображення F_L^{-1} , $(F^\pm)^{-1}$ і $\widehat{F}_K = F_K^{-1}$ узгоджені на перетині своїх областей визначення і покриття $\widehat{K}, \widehat{M}^+, \widehat{M}^-, L$ простору $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J)$ фундаментальне. Тому визначене і неперервне відображення $\widehat{F}_0: \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J) \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\widehat{F}_0(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{якщо } (x, y) \in L; \\ (F^\pm)^{-1}(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in \widehat{M}^\pm; \\ \widehat{F}_K(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in \widehat{K}. \end{cases}$$

Проста безпосередня перевірка показує, що $\widehat{F}_0(\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\widehat{F}_0 \circ F = \text{Id}$, $F \circ \widehat{F}_0 = \text{Id}$. Тому F гомеоморфно відображає $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ на $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J)$ і $\widehat{F}_0 = F^{-1}$.

Довизначимо відображення $\widehat{F}_0$ на $\{0\} \times J$ до відображення $\widehat{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ за допомогою співвідношення

$$\widehat{F}(x, y) = \begin{cases} \widehat{F}_0(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J); \\ (0, 0), & \text{якщо } (x, y) \in \{0\} \times J. \end{cases}$$

Перевіримо неперервність відображення $\widehat{F}$. Нехай $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — відкрита множина. Якщо $0 \notin U$, то $\widehat{F}^{-1}(U) = \widehat{F}_0^{-1}(U)$ — відкрита підмножина простору $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J)$, який сам є відкритим підпростором площини. Тому множина $\widehat{F}^{-1}(U)$ відкрита в $\mathbb{R}^2$.

Припустимо тепер, що $0 \in U$. За побудовою $F^\pm(0,0) = (0, \pm 1) = \widehat{F}^{-1}(0,0) \cap K^\pm$. Тому $\widehat{F}|_{\widehat{K}^\pm} = (F^\pm)^{-1}$ і існують такі $\delta^+, \delta^- > 0$, що $\widehat{F}^{-1}(U) \cap \widehat{K}^\pm \supseteq B_{\delta^\pm}(0, \pm 1)$. Тут $B_\varepsilon(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ — відкритий круг радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці z_0 .

Легко бачити, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $m \in \mathbb{N}$, для якого $V_m \subseteq B_\varepsilon(0,0)$, де

$$V_m = \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ |i| > m}} K_i,$$

тому існує таке $s \in \mathbb{N}$, що $\widehat{V}_s \subseteq \widehat{F}^{-1}(U)$, де

$$\widehat{V}_s = \widehat{F}^{-1}(V_s) = F(V_s) = \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ |i| > s}} \widehat{K}_i.$$

За побудовою $\widehat{V}_s = ((-1/s, 0) \cup (0, 1/s)) \times J$. Нехай $\delta = \min(\delta^+, \delta^-, 1/s)$. Тоді

$$\begin{aligned} B_\delta(\{0\} \times J) &= (B_\delta(0,1) \cap \widehat{K}^+) \cup (B_\delta(0,-1) \cap \widehat{K}^-) \cup \\ &\cup (((-\delta, 0) \cup (0, \delta)) \times J) \cup \widehat{F}^{-1}(0,0) \subseteq \widehat{F}^{-1}(U), \end{aligned}$$

і множина $\widehat{F}^{-1}(U)$ відкрита в $\mathbb{R}^2$, тому що вона є об'єднанням двох відкритих множин

$$\widehat{F}^{-1}(U) = \widehat{F}^{-1}(U \setminus \{(0,0)\}) \cup B_\delta(\{(0,0)\} \times J).$$

2.3. Функція $\widehat{f} = g \circ \widehat{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ не має сідлових точок. Відображення $\widehat{F}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times J} = F^{-1}$ є гомеоморфізмом на свій образ, тому точки $q_1 = \widehat{F}^{-1}(0,1) = F(0,1)$ і $q_2 = \widehat{F}^{-1}(0,-1) = F(0,-1)$ будуть локальними мінімумами функції $\widehat{f}$, а всі точки з множини $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J \cup \{q_1, q_2\})$ будуть регулярними точками цієї функції.

Доведемо, що множина $\{0\} \times J$ не містить локальних екстремумів функції $\widehat{f}$.

Нехай $y \in [-1, 1]$. Тоді рівняння $\sin(-\pi/x) = y$ має наступні розв'язки

$$x_m = x_m(y) = \frac{\pi}{2\pi m - \arcsin y}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $x_m \rightarrow \pm 0$ відповідно при $m \rightarrow \pm \infty$. Тому $\nu_1(x_m) = (1 - |x_m|)^2 y - |x_m| \rightarrow y$ і $\nu_2(x_m) = (1 - |x_m|)^2 y + |x_m| \rightarrow y$.

Отже, для кожної точки $(0, y) \in \{0\} \times J$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$, таке, що $\nu_1(x_m(y)), \nu_2(x_m(y)) \in B_\varepsilon(0, y)$ при всіх $m \in \mathbb{Z}$, $|m| > N$.

Розглянемо множини

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}^+(y, m) &= \{x_m\} \times ([-1, \nu_1(x_m)) \cup (\nu_2(x_m), 1]), \\ \widehat{\mu}^-(y, m) &= \{x_m\} \times (\nu_1(x_m), \nu_2(x_m)), \quad |m| > 1. \end{aligned}$$

За побудовою маємо

$$\begin{aligned} \mu^+(y, m) &= \widehat{F}(\widehat{\mu}^+(y, m)) = \{x_m\} \times ([-1, \varphi_1(x_m)) \cup (\psi_1(x_m), 1]) \subseteq g^{-1}((0, 1)), \\ \mu^-(y, m) &= \widehat{F}(\widehat{\mu}^-(y, m)) = \{x_m\} \times (\varphi_1(x_m), \psi_1(x_m)) \subseteq g^{-1}((-\infty, 0)). \end{aligned}$$

Тому $\hat{f}(z) > 0$ для всіх $z \in \hat{\mu}^+(y, m)$, та $\hat{f}(z) < 0$ для кожного $z \in \hat{\mu}^-(y, m)$.

Очевидно, при фіксованих $(0, y) \in \{0\} \times J$ і $\varepsilon > 0$, а також при достатньо великих по модулю $m \in \mathbb{Z}$ маємо $\hat{\mu}^\pm(y, m) \cap B_\varepsilon(0, y) \neq \emptyset$.

Отже, для кожної точки $(0, y) \in \{0\} \times J$ в її довільному околі знайдуться як точки, в яких функція $\hat{f}$ від'ємна, так і точки, в яких ця функція приймає додатні значення. Зважаючи на те, що $\hat{f}(\{0\} \times J) = g(0, 0) = 0$, робимо висновок, що множина $\{0\} \times J$ не містить локальних екстремумів функції $\hat{f}$ і єдиними локальними екстремумами цієї функції є точки q_1 і q_2 .

Розглянемо множину рівня $\hat{f}_0 = \hat{f}^{-1}(0) = \hat{F}^{-1}(g_0) = F(g_0) \cup \{0\} \times J$. Очевидно, що множина $g_0 = g^{-1}(0)$ є об'єднанням графіків функцій $\tilde{\varphi}_1, \varphi_1, \psi_1, \tilde{\psi}_1$ на відрізку $J = [-1, 1]$. Тому множина $\hat{f}_0$ є об'єднанням графіків функцій $\tilde{\varphi}_1, \psi_1$ на відрізку J , графіків ν_1, ν_2 на множині $[-1, 0) \cup (0, 1]$, а також множини $\{0\} \times J$.

За побудовою в околі множини $\{0\} \times J$ функції ν_1 і ν_2 мають поведінку таку ж, як $\sin(1/x)$, тому $\{0\} \times J$ є компонентою лінійної зв'язності множини $\hat{f}_0$ і для кожної точки $z \in \{0\} \times J$ і її достатньо малого відкритого околу U_z множина γ_z (компонента зв'язності точки z в множині $\hat{f}_0 \cap U_z$) належить до $\{0\} \times J$. Тому множина γ_z гомеоморфна або до інтервалу, або до напівінтервалу, і не може бути відображена на перетин деякого околу початку координат з множиною $\{z \mid \operatorname{Re} z^n = 0\}$ при $n \geq 2$.

Зі сказаного робимо висновок, що ні одна точка відрізка $\{0\} \times J$ не є сідловою для функції $\hat{f}$.

2.4. Функція f на крузі з двома локальними екстремумами і без сідлових точок. Розглянемо множину $\hat{f}_{-1} = \hat{f}^{-1}(-1) = \hat{F}^{-1}(g^{-1}(-1)) = F(g_{-1})$. Легко бачити, що $g_{-1} = g^{-1}(-1)$ є підмножиною L , тому $F(g_{-1}) = g_{-1}$ і $\hat{f}_{-1} = g_{-1}$.

В підрозділі ми встановили, що множина g_{-1} гомеоморфна до кола і обмежує круг $U_{g, -1}^0$, який містить обидва локальні екстремуми функції g і її сідлову точку $(0, 0) \in g^{-1}(0)$. За побудовою обидва екстремуми q_1 і q_2 функції $\hat{f}$ належать до множини

$$\{0\} \times ((\tilde{\varphi}_1(0), \eta_1(0)) \cup (\eta_2(0), \tilde{\psi}_1(0))) = \{0\} \times ((-2, -1) \cup (1, 2)),$$

яка лежить в $U_{g, -1}^0$.

Зафіксуємо гомеоморфізм $H_0: g_{-1} \rightarrow \partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ і, скориставшись теоремою Шенфліса (див. [1, 2]), продовжимо його до гомеоморфізму $H: g_{-1} \cup U_{g, -1}^0 \rightarrow D$. Розглянемо функцію $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \hat{f} \circ H^{-1}(x, y) + 1 = g \circ \hat{F} \circ H^{-1}(x, y) + 1$, $(x, y) \in D$. Очевидно, що $\partial D = f^{-1}(0)$ і $f(x, y) > 0$ для всіх $(x, y) \in \operatorname{Int} D$. За побудовою обидві точки $(F \circ H^{-1})^{-1}(0, 1) = H \circ F(0, 1) = H(q_1)$ і $(F \circ H^{-1})^{-1}(0, -1) = H \circ F(0, -1) = H(q_2)$ належать до $\operatorname{Int} D$. Тому функція f відповідає умовам (i) і (ii) з розділу.

Зрозуміло, що властивість точки бути сідловою точкою неперервної функції є топологічним інваріантом. Відображення H^{-1} є гомеоморфізмом і функція $\hat{f}$ не має сідлових точок. Тому функція $\hat{f} \circ H^{-1}$, а разом з нею і f , не мають сідлових точок в $\operatorname{Int} D$.

Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 1. Нехай D — стандартний замкнений круг на площині, ∂D — його межа. Існує неперервна функція $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає вимогам:

- (i) $f(\partial D) = 0$;
- (ii) $f(z) > 0$ для кожного $z \in \operatorname{Int} D$;
- (iii) f має в $\operatorname{Int} D$ точно два локальних екстремуми;

(iv) f не має сідлових точок в $\text{Int}D$.

3. Прикінцеві зауваження.

3.1. Неважко довести, що для функції $\hat{f}$ кожна точка множини $\{0\} \times (-1, 1)$ є регулярною в сенсі означення 1 (це є наслідком з того, що за побудовою при $c \neq 0$ кожна лінія рівня $\hat{f}^{-1}(c)$ в множині $\hat{K} \cup \hat{K}^+ \cup \hat{K}^-$ локально є графіком неперервної функції). Тому точки $(0, 1)$ і $(0, -1)$ є ізольованими критичними точками для $\hat{f}$, але вони не є ні локальними екстремумами, ні сідловими точками.

З іншого боку, вище доведено, що в сенсі означення 2 кожна точка відрізка $\{0\} \times [-1, 1]$ є критичною.

3.2. Розглянемо на площині множину $R = \{z \mid |z - i/2| = 1/2\} \cup \{z \mid |z - i| = 1\}$ і функцію $\tilde{g}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g}(z) = \pm \rho(z, R)$, $z \in \mathbb{C}$, причому знаки розставимо як на рисунку 5.

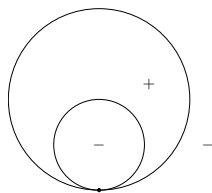


Рис. 5: Знаки функції $\tilde{g}$

Легко бачити, що ця функція має локальний максимум в точці $(0, 3/2)$, локальний мінімум в точці $(0, 1/2)$, точка $(0, 0)$ є її сідловою точкою, а всі інші точки регулярні як в сенсі означення 1, так і в сенсі означення 2.

Стартуючи з цієї функції, за допомогою описаного вище методу можна побудувати функцію $\tilde{f}: D \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає теоремі 1 і має один локальний максимум і один локальний мінімум в $\text{Int}D$.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. Н. А. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1964 – 214 pp.
2. Х. Цишанг, Э. Фогт, Х.-Д. Колдевай, *Поверхности и разрывные группы*: Пер. с англ. – М.: Наука, 1988. – 688 с.
3. В.А. Рохлин, Д.Б. Фукс, *Начальный курс топологии. Геометрические главы* – М.: Наука, 1977. – 488 с.

Інститут математики НАН України
polulyah@imath.kiev.ua

Надійшло 29.09.2008
Після переробки 21.02.2009