

УДК 515.126, 517.91

Т. В. Будницька

ТОПОЛОГІЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ АФІННИХ ВІДОБРАЖЕНЬ, ЩО ДІЮТЬ З $\mathbb{H}$ В $\mathbb{H}$

Т. V. Budnitska. *Topological classification of affine maps from $\mathbb{H}$ to $\mathbb{H}$* , Mat. Stud. **31** (2009), 157–164.

The linear and affine maps from $\mathbb{H}$ to $\mathbb{H}$ are investigated. Necessary and sufficient conditions for a topological conjugacy of such maps are obtained.

Т. В. Будницькая. *Топологическая классификация аффинных отображений, действующих из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$* // Мат. Студії. – 2009. – Т.31, №2. – С.157–164.

Исследуются линейные и аффинные отображения из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$. Получены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности таких отображений.

1. Вступ. Множення кватерніонів не комутативне — вони утворюють тіло, яке позначають $\mathbb{H}$. Надалі $\mathbb{H} = \{x: x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4, \text{ де } x_s \in \mathbb{R}, s \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ та } i, j, k \text{ — “уявні одиниці”}\}$ — тіло кватерніонів; $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ — норма (модуль) кватерніона x .

Скрізь у статті матриці розглядаються над полем дійсних чисел.

Нехай $X = \mathbb{R}^n$ або $\mathbb{H}$.

Відображення $f, g: X \rightarrow X$ називаються *лінійно спряженими* (будемо позначати $f \overset{l}{\sim} g$), якщо існує бієктивне лінійне відображення $h: X \rightarrow X$ таке, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Відображення $f, g: X \rightarrow X$ називаються *топологічно спряженими* (будемо позначати $f \overset{t}{\sim} g$), якщо існує гомеоморфізм $h: X \rightarrow X$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Очевидно, що з лінійної спряженості випливає топологічна спряженість, навпаки не вірно.

Лінійними відображеннями, що діють з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, називаються відображення вигляду: $f(x) = ax$ та $\tilde{f}(x) = xa$, де $a, b, x \in \mathbb{H}$.

Під *афінним відображенням, що діє з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$* , будемо розуміти відображення вигляду: $f(x) = ax + b$ або $\tilde{f}(x) = xa + b$, де $a, b, x \in \mathbb{H}$.

У статті [1] дється класифікація, з точністю до топологічної спряженості, афінних відображень з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ та частини афінних відображень з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. У статті [2] отримано таку ж класифікацію всіх афінних відображень, що діють з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

Основний результат цієї статті — класифікація афінних відображень, що діють з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, з точністю до топологічної спряженості.

2. Топологічна класифікація лінійних відображень з $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$. Для класифікації лінійних відображень з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, з точністю до топологічної спряженості, використовуємо

2000 *Mathematics Subject Classification*: 37C15.

Keywords: affine map, topological classification, topological conjugacy

doi:10.30970/ms.31.2.157-164

© Т. В. Будницька, 2009

подібну класифікацію лінійних відображень з $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$, тому нагадаємо деякі відомі результати.

Якщо $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ лінійне відображення, $f(x) = Ax$, то для дійсної канонічної форми (ДКФ) J_A матриці A (див. [3]), визначимо матриці A_α , $\alpha = +, -, \infty, 0$, у відповідності з таблицею

Якщо матриця A_α є:	то її характеристичні числа λ задовольняють:
A_+	$0 < \lambda < 1$
A_-	$ \lambda > 1$
A_∞	$\lambda = 0$
A_0	$ \lambda = 1$

Відображення $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ називається *періодичним*, якщо $\exists k \in \mathbb{N}$ таке, що $f^k = \text{id}_{\mathbb{R}^4}$. Найменше таке число k називається *періодом* відображення f .

N.H. Kuiper, J.W. Robbin ([7], [8]) дали топологічну класифікацію неперіодичних лінійних відображень, що діють з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Сформулюємо цей результат для випадку $n = 4$.

Теорема 1 ([7], [8]). Нехай $f, g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x) = Ax$, $g(x) = Cx$ — лінійні неперіодичні відображення. Тоді

$$f \stackrel{t}{\sim} g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rank}(A_+) = \text{rank}(C_+), \text{sign}(\det(A_+)) = \text{sign}(\det(C_+)), \\ \text{rank}(A_-) = \text{rank}(C_-), \text{sign}(\det(A_-)) = \text{sign}(\det(C_-)), \\ A_\infty = C_\infty, A_0 = C_0. \end{cases}$$

S.E. Cappell та J.L. Shaneson ([4], [5], [6]), встановили, що для періодичних лінійних відображень, які діють з $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$, топологічна спряженість збігається з лінійною спряженістю.

Необхідною та достатньою умовою лінійної спряженості двох лінійних відображень є рівність дійсних канонічних форм матриць, що відповідають цим лінійним відображенням. Тому два періодичні лінійні відображення, що діють $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$, $f(x) = Ax$ та $g(x) = Cx$, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли $A_0 = C_0$.

Об'єднуючи цей результат з теоремою 1, для всіх лінійних відображень, що діють з $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$, отримує таке твердження.

Твердження 1. Нехай $f, g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x) = Ax$, $g(x) = Cx$ — лінійні відображення. Тоді

$$f \stackrel{t}{\sim} g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rank}(A_+) = \text{rank}(C_+), \text{sign}(\det(A_+)) = \text{sign}(\det(C_+)), \\ \text{rank}(A_-) = \text{rank}(C_-), \text{sign}(\det(A_-)) = \text{sign}(\det(C_-)), \\ A_\infty = C_\infty, A_0 = C_0. \end{cases}$$

2. Топологічна класифікація лінійних відображень з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$.

2.1. Топологічна класифікація відображень $f(x) = ax$, $\tilde{f}(x) = xa$, $a \in \mathbb{H}$. Оскільки $\mathbb{H}$ — тіло, то відображення, що діють з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, $f(x) = ax$ та $\tilde{f}(x) = xa$, $a \in \mathbb{H}$ — це різні відображення.

Лема 1. Відображення $f, \tilde{f}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$, $\tilde{f}(x) = xa$, $a \in \mathbb{H}$ — лінійно спряжені.

Доведення. Відображення $f, \tilde{f}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$, $\tilde{f}(x) = xa$, $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4 \in \mathbb{H}$, лінійно спряжені тоді і тільки тоді, коли відповідні лінійні відображення з $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$: $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax$, $\tilde{f}_{\mathbb{R}^4}(x) = Cx$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

$a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, — лінійно спряжені. Дійсні канонічні форми матриць A та C однакові, а саме мають вигляд

$$\begin{pmatrix} a_1 & -\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & -\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} & a_1 \end{pmatrix}.$$

Тому відображення $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax$ та $\tilde{f}_{\mathbb{R}^4}(x) = Cx$ лінійно спряжені. $\square$

Наслідок 1. Відображення $f, \tilde{f}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$, $\tilde{f}(x) = xa$, $a \in \mathbb{H}$ — топологічно спряжені.

2.2. Топологічна класифікація відображень вигляду $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{H}$. З топологічної класифікації лінійних відображень з $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$ випливає топологічна класифікація лінійних відображень з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$.

Лема 2. Нехай $f, g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$, $g(x) = cx$, де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$. Тоді

$$f \stackrel{t}{\sim} g \Leftrightarrow \text{або } \begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases}.$$

де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$.

Доведення. Відображення $f, g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$, $g(x) = cx$, $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли топологічно спряжені відповідні лінійні відображення з $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$, тобто коли

$$f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \text{де } a_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\text{та } g_{\mathbb{R}^4}(x) = Cx = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 \\ c_2 & c_1 & -c_4 & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_1 & -c_2 \\ c_4 & -c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \text{де } c_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

— топологічно спряжені.

Матриці A та C мають такі властивості:

- 1) характеристичні числа матриці A мають вигляд: $\lambda_A = a_1 \pm i\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$ кратності 2, а матриці C : $\lambda_C = c_1 \pm i\sqrt{c_2^2 + c_3^2 + c_4^2}$ теж кратності 2;
- 2) $|\lambda_A| = \|a\|$, $|\lambda_C| = \|c\|$; 3) ДКФ матриці A має вигляд

$$J_A = \begin{pmatrix} a_1 & -\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & -\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} & a_1 \end{pmatrix},$$

ДКФ матриці C має аналогічний вигляд;

- 4) J_A (аналогічно J_C) дорівнює тільки одній з матриць A_α , $\alpha = +, -, \infty, 0$, бо не може містити різні блоки з матриць із цього переліку.
- 5) $\text{rank}(J_A) = 4 = \text{rank}(J_C)$, для будь-яких ненульових матриць A та C ;
- 6) $\text{sign}(\det(J_A)) = \text{sign}((a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2) = \text{sign}((c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2)^2) = \text{sign}(\det(J_C))$, для будь-яких ненульових матриць A та C ;
- 7) $a = c = 0$ ($\lambda_A = \lambda_C = 0$) тоді і тільки тоді, коли J_A та J_C - нульові матриці;
- 8) якщо $\|a\| = \|c\| = 1$, де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$, то $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax \stackrel{t}{\sim} g_{\mathbb{R}^4}(x) = Cx$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = c_1$.

Справді, з 2)-ї властивості $|\lambda_A| = \|a\|$, $|\lambda_C| = \|c\|$. За твердженням 1, при $|\lambda_A| = |\lambda_C| = 1$, $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax \stackrel{t}{\sim} g_{\mathbb{R}^4}(x) = Cx$ тоді і тільки тоді, коли $A_0 = C_0$. Використовуючи четверту властивість, отримаємо $J_A = A_0$ та $J_C = C_0$.

Отже, якщо $\|a\| = \|c\| = 1$, то $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax \stackrel{t}{\sim} g_{\mathbb{R}^4}(x) = Cx$ тоді і тільки тоді, коли $J_A = J_C$. Тобто, доведення восьмої властивості зводиться до доведення такого факту:

$$\text{якщо } \|a\| = \|c\| = 1, \text{ то } J_A = J_C \Leftrightarrow a_1 = c_1.$$

Необхідність очевидна. Достатність випливає з того, що при $\|a\| = \|c\| = 1$ з рівності $a_1 = c_1$ випливає умова $a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$. Далі використовуємо третю властивість.

Властивість 8) доведено.

Об'єднуючи властивості 7) та 8), отримаємо: якщо $\|a\| = \|c\| = 1$ або $a = c = 0$, то

$$f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax \stackrel{t}{\sim} g_{\mathbb{R}^4}(x) = Cx \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases},$$

де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$.

Використовуючи цей результат, властивості 1)-6) та твердження 1 отримаємо, що відображення $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax$ та $g_{\mathbb{R}^4}(x) = Cx$ топологічно спряжені $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{або } \begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases},$$

де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$. Тобто $f, g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$, $g(x) = cx$, $a, c \in \mathbb{H}$ топологічно спряжені $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{або } \begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases},$$

де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$.

Лему доведено. $\square$

Зауваження 1. Лему 2 можна сформулювати у такому вигляді:

Нехай $f, g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$, $g(x) = cx$, де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$. Тоді $f \stackrel{t}{\sim} g \Leftrightarrow$ або $\begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}$, або $\begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}$, або $a = c = 0$, або $a_1 = c_1$.

Зауваження 2. Застосовуючи подібні міркування можна довести таке твердження:

Відображення $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\tilde{f}(x) = xa$, $\tilde{g}(x) = xc$, де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли

$$\text{або } \begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases}.$$

2.3. Топологічна класифікація відображень $f(x) = ax$ та $\tilde{g}(x) = xc$, $a, c \in \mathbb{H}$.

Лема 3. Нехай $f, \tilde{g} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$, $\tilde{g}(x) = xc$, де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$. Тоді

$$f \stackrel{t}{\sim} \tilde{g} \Leftrightarrow \text{або } \begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases}.$$

Доведення. Доведення випливає з тверджень підрозділів 3.1 та 3.2, позаяк за наслідком 1 відображення $\tilde{g}(x) = xc$ та $g(x) = cx$, $c \in \mathbb{H}$ — топологічно спряжені. Застосовуючи до відображень $f(x) = ax$ та $g(x) = cx$, $a, c \in \mathbb{H}$ лему 2, отримаємо необхідний результат. $\square$

Об'єднаємо все сказане вище у твердженні 2, яке дає класифікацію довільних лінійних відображень з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, з точністю до топологічної спряженості.

Твердження 2. Нехай $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$, $g(x) = cx$, $\tilde{f}(x) = xa$, $\tilde{g}(x) = xc$, де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$. Тоді $f \stackrel{t}{\sim} g \Leftrightarrow \tilde{f} \stackrel{t}{\sim} \tilde{g} \Leftrightarrow f \stackrel{t}{\sim} \tilde{g} \Leftrightarrow \tilde{f} \stackrel{t}{\sim} g \Leftrightarrow$ або $\begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}$, або $\begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}$, або $\begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases}$.

2.4. Геометрична інтерпретація лінійних відображень. Як зазначалося вище, два лінійні відображення з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ f та g будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли топологічно спряжені відповідні лінійні відображення з $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$, а саме $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax$ та $g_{\mathbb{R}^4}(x) = Cx$. Тобто тоді і тільки тоді, коли топологічно спряжені такі лінійні відображення $f'_{\mathbb{R}^4}(x) = J_A x$ та $g'_{\mathbb{R}^4}(x) = J_C x$, де J_A та J_C — ДКФ матриць A та C відповідно. Оскільки

$$J_A = \begin{pmatrix} a_1 & -\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & -\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} & a_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \|a\| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \|a\| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \|a\| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \|a\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\|a\|} & \frac{-\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{\|a\|} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{\|a\|} & \frac{a_1}{\|a\|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_1}{\|a\|} & \frac{-\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{\|a\|} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{\|a\|} & \frac{a_1}{\|a\|} \end{pmatrix},$$

то, позначивши $r = \|a\|$, $\cos \varphi = \frac{a_1}{\|a\|} = \frac{a_1}{r}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{\|a\|} = \frac{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{r}$, отримаємо

$$f'_{\mathbb{R}^4}(x) = J_A x = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Тобто під дією лінійного відображення $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax$, простір $\mathbb{R}^4$ можна розкласти в пряму суму $f_{\mathbb{R}^4}$ -інваріантних 2-вимірних підпросторів, а саме $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$. На кожному з яких $f_{\mathbb{R}^4}$ має однакову дію, а саме: кожен вектор обертає (проти годинникової стрілки) на кут φ , при цьому розтягуючи (або стискаючи) його довжину в r разів.

При $r > 1$ маємо розтяг та поворот; при $r < 1$ — стиск та поворот; при $r = 1$ — відображення $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax$ є поворотом. Тому твердження 2 може бути записане у такому вигляді.

Твердження 3. Нехай $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$, $g(x) = cx$, $\tilde{f}(x) = xa$, $\tilde{g}(x) = xc$, де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$. Якщо $r = \|a\|$, $\cos \varphi = \frac{a_1}{\|a\|}$,

$\rho = \|c\|$, $\cos \theta = \frac{c_1}{\|c\|}$, то будь-які два відображення з перерахованого вище списку будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли

$$\text{або } \begin{cases} 0 < r < 1 \\ 0 < \rho < 1 \end{cases}, \quad \text{або } \begin{cases} r > 1 \\ \rho > 1 \end{cases}, \quad \text{або } \varphi = \theta, \quad \text{або } \varphi = -\theta.$$

3. Критерій топологічної спряженості відображень $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{H}$, що діє з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ та $g(x) = Cx$, що діє з $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$. Оскільки відомо, що 4-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^4$ можна ототожнити з тілом кватерніонів $\mathbb{H}$ через співставлення:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \longleftrightarrow x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \in \mathbb{H}.$$

Тому виникає питання про топологічну спряженість відображень, що діють у цих просторах.

Теорема 2. Нехай $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{H}$ та $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $g(x) = Cx$, $C - 4 \times 4$ матриця. Відображення $f \stackrel{t}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли модулі всіх характеристичних чисел матриці C та $\|a\|$ одночасно або більші за 0 та менші від 1, або більші за 1, або дорівнюють 1, або матриця C та кватерніон a одночасно будуть нульовими. При цьому:

- а) якщо модулі всіх характеристичних чисел матриці C одночасно або більші за 0 та менші від 1, або більші за 1, то необхідно $\text{sign}(\det C) > 0$;
- б) якщо модулі всіх характеристичних чисел матриці C одночасно дорівнюють 1, то $J_C - \text{ДКФ}$ матриці C має складатися з двох блочних матриць розмірності 2×2 , кожній з яких відповідає кут повороту $\theta = \pm\varphi$.

Доведення. Відображення $g(x) = Cx$, що діє з $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$, буде топологічно спряжене з відображенням $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{H}$, що діє з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, тоді і тільки тоді, коли $g(x) = Cx$ буде топологічно спряжене з відповідним лінійним відображенням $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax$, що відповідає відображенню $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{H}$.

Застосовуючи до відображень $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax$ і $g(x) = Cx$ твердження 1, та використовуючи властивості відображення $f_{\mathbb{R}^4}(x) = Ax$ (які були детально описані при доведенні леми 2 та у підрозділі 3.4), отримуємо доведення теореми 2. $\square$

4. Топологічна класифікація афінних відображень з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$. Теорема 3 дає необхідні та достатні умови для топологічної спряженості афінного відображення та відповідного лінійного.

Теорема 3. Нехай $f, g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax$, $a, b \in \mathbb{H}$. Відображення $f \stackrel{t}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли існує $q \in \mathbb{H}$ таке, що $f(q) = q$.

Доведення. Необхідність. За умовою теореми $f(x) = ax + b$ та $g(x) = ax$, $a, b \in \mathbb{H}$ топологічно спряжені, тому ці відображення мають однакову кількість нерухомих точок.

Оскільки $g(x) = ax$, $a \in \mathbb{H}$ має принаймні 1 нерухому точку, (а саме $\tilde{x} = 0$), тому й відображення $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{H}$ теж має принаймні 1 нерухому точку (бо інакше f та g не топологічно спряжені).

Достатність. Розглянемо відображення $h: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $h(x) = x + q$, де q — нерухома точка відображення f (тобто $f(q) = q$). Відображення $f(x) = ax + b$ та $g(x) = ax$, $a, b \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені, бо $h(x)$ — гомеоморфізм, такий що $f = h \circ g \circ h^{-1}$. $\square$

Зауваження 3. Аналогічними міркуваннями можна довести, що:

Відображення $\tilde{f}, \tilde{g}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\tilde{f}(x) = xa + b$, $\tilde{g}(x) = xa$, $a, b \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли існує $\alpha \in \mathbb{H}$ таке, що $\tilde{f}(\alpha) = \alpha$.

Класифікацію, з точністю до топологічної спряженості, афінних відображень вигляду $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{H}$ дає наступна теорема.

Теорема 4. Нехай $f, g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{H}$. Тоді

$$f \stackrel{t}{\sim} g \Leftrightarrow \text{або } \begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases},$$

де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$; якщо $a = c = 1$, то b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

Доведення. Використаємо той факт, що топологічно спряжені відображення мають однакову кількість нерухомих точок та доведемо теорему для кожного класу афінних відображень у яких кількість нерухомих точок однакова.

Афінне відображення з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ може мати або 1 нерухому точку, або нескінченно багато (тобто бути тотожним відображенням), або взагалі їх не мати, тому розглянемо 3 випадки.

1. *Афінні відображення мають тільки по 1 нерухомій точці.* Довільне афінне відображення з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, $\varphi(x) = tx + n$ має тільки 1 нерухому точку, (а саме $x = (1 - t)^{-1}n$) тоді і тільки тоді, коли $t \neq 1$, $n \in \mathbb{H}$. Отже, відображення $f(x) = ax + b$ та $g(x) = cx + d$, що мають тільки по 1 нерухомій точці, за теоремою 3 топологічно спряжені з відповідними лінійними відображеннями, тобто

$f(x) = ax + b \stackrel{t}{\sim} r(x) = ax$, $a \in \mathbb{H} \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{H}$, $g(x) = cx + d \stackrel{t}{\sim} s(x) = cx$, $c \in \mathbb{H} \setminus \{1\}$, $d \in \mathbb{H}$. Легко бачити, що афінні відображення $f(x) = ax + b$ та $g(x) = cx + d$, що мають тільки по 1 нерухомій точці, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли топологічно спряжені $r(x) = ax$ та $s(x) = cx$, $a, c \in \mathbb{H} \setminus \{1\}$.

Для відображень $r(x) = ax$, $s(x) = cx$, де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H} \setminus \{1\}$, скориставшись лемою 2, отримаємо: $r(x) = ax \stackrel{t}{\sim} s(x) = cx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{або } \begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases}.$$

Отже, $f(x) = ax + b \stackrel{t}{\sim} g(x) = cx + d$, де $a, c \in \mathbb{H} \setminus \{1\}$, $b, d \in \mathbb{H} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{або } \begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases}.$$

2. *Афінні відображення мають нескінченно багато нерухомих точок.* Довільне афінне відображення з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, $\varphi(x) = tx + n$ має нескінченно багато нерухомих точок, тобто є тотожним відображенням, тоді і тільки тоді, коли $t = 1$ та $n = 0$.

Відображення $f(x) = ax + b$ та $g(x) = cx + d$, що мають нескінченно багато нерухомих точок, збігаються, бо $f(x) = g(x) = id_{\mathbb{H}}(x)$, а отже, є топологічно спряженими.

3. *Афінні відображення не мають нерухомих точок.* Довільне афінне відображення з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, $\varphi(x) = tx + n$ не має нерухомих точок тоді і тільки тоді, коли $t = 1$ та $n \neq 0$. Тобто афінне відображення з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, що не має нерухомих точок, має вигляд $\varphi(x) = x + n$, $n \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$.

Відображення $f(x) = x + b$ та $g(x) = x + d$, $b, d \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, які не мають нерухомих точок, завжди топологічно спряжені, бо існує гомеоморфізм $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $h(x) = db^{-1}x$, $b, d \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ такий, що $h \circ f = g \circ h$.

Підсумовуючи результати описаних вище трьох випадків, отримаємо, що

$$f(x) = ax + b \stackrel{t}{\sim} g(x) = cx + d, \text{ де } a, c \in \mathbb{H} \setminus \{1\}, b, d \in \mathbb{H}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{або } \begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases}.$$

Якщо $a = c = 1$, то відображення $f(x) = x + b$ та $g(x) = x + d$, $b, d \in \mathbb{H}$, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли вони є або одночасно тотожними відображеннями, або одночасно відмінними від тотожних (бо інакше відображення будуть мати різну кількість нерухомих точок).

Тобто $f(x) = x + b \stackrel{t}{\sim} g(x) = x + d$, де $b, d \in \mathbb{H} \Leftrightarrow b$ та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

Отже, $f(x) = ax + b \stackrel{t}{\sim} g(x) = cx + d$, де $a, c, b, d \in \mathbb{H} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{або } \begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases},$$

Якщо $a = c = 1$, то b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

Теорему 4 доведено. $\square$

Міркуючи подібно та використовуючи попередні результати, можна довести таку теорему.

Теорема 5. Нехай $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, $\tilde{f}(x) = xa + b$, $\tilde{g}(x) = xc + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{H}$. Тоді $f \stackrel{t}{\sim} g \Leftrightarrow \tilde{f} \stackrel{t}{\sim} \tilde{g} \Leftrightarrow f \stackrel{t}{\sim} \tilde{g} \Leftrightarrow \tilde{f} \stackrel{t}{\sim} g \Leftrightarrow$

$$\text{або } \begin{cases} 0 < \|a\| < 1 \\ 0 < \|c\| < 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} \|a\| > 1 \\ \|c\| > 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \end{cases},$$

де $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4 \in \mathbb{H}$; якщо $a = c = 1$, то b та d або одночасно дорівнюють 0, або одночасно відмінні від 0.

ЛІТЕРАТУРА

1. Будницька Т.В. *Класифікація топологічно спряжених афінних відображень* // Укр. мат. журн. – 2008. – здано до друку.
2. Будницька Т.В. *Топологічна класифікація афінних відображень з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$* // Нелінійні коливання – 2008. – здано до друку.
3. Палис Ж., ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 301 с.
4. Cappel S.E., Shaneson J.L. *Nonlinear similarity of matrices* // Bull. Amer. Math. Soc., New Series. – 1979. – V.1, №6. – P.899–902.
5. Cappel S.E., Shaneson J.L. *Non-linear similarity* // Ann. of Math. – 1981. – V.113. – P.315–355.
6. Cappel S.E., Shaneson J.L. *Non-linear similarity and linear similarity are equivariant below dimension 6* // Contemp. Math. – 1999. – V.231. – P.59–66.
7. Kuiper N.H., Robbin J.W. *Topological classification of linear endomorphisms* // Invent. Math. – 1973. – V.19, №2. – P.83–106.
8. Robbin J.W. *Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – V.78, №6. – P.923–952.

Інститут математики НАН України
 відділ топології
 01601, Київ-4, вул. Терещенківська, 3
 Budnitska_T@ukr.net

Надійшло 16.09.2008