

УДК 515.12

І. Д. ГЛУШАК

ОПТИМАЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ ЄМНОСТЕЙ НА МЕТРИЧНОМУ КОМПАКТІ

I. D. Hlushak. *Optimal approximations of capacities on a metric compactum*, Mat. Stud. **31** (2009), 115–121.

For a capacity on a metric compactum an optimal approximation by a $\cup$ -capacity (or by a $\cap$ -capacity) w.r.t. a Prohorov-style metric is constructed. A method is also presented for optimal approximation of a capacity on a metric compactum by a capacity on a fixed closed subspace.

И. Д. Глушак. *Оптимальные приближения емкостей на метрическом компакте* // Мат. Студії. – 2009. – Т.31, №2. – С.115–121.

Для произвольной емкости на метрическом компакте описаны строение и способ построения ближайшей относительно метрики в стиле Прохорова емкости из класса $\cup$ -емкостей (или $\cap$ -емкостей). Предложен метод оптимального приближения произвольной емкости на метрическом компакте емкостью на фиксированном замкнутом подпространстве.

Вступ. Запроваджені Шоке ([1]) ємності знайшли широке застосування у математичній фізиці, економіко-математичному моделюванні, теорії випадкових процесів та інших галузях науки (див. [2, 3]). Це спонукало до їх систематичного вивчення засобами функціонального аналізу, топології та алгебри ([4, 5]). Останнім часом окреслився підхід до вивчення ємностей засобами теорії топологічних функторів у категорії компактів. М.М.Зарічним та О.Р.Никифорчиним [6] побудовано функтор ємностей з дійсними значеннями у категорії компактів і вивчено його властивості. Зокрема, доведено, що він є функторіальною частиною монади, і описано метрики на просторі ємностей на метричному компактi у сенсі Прохорова та у сенсі Канторовича-Рубінштейна. В [7] доведено, що два класи ємностей простішої будови, а саме $\cup$ -ємностей (також названих *sup-мірами* чи *мірами можливості*) та $\cap$ -ємностей (*мір необхідності*), породжують підфунктори функтора ємностей і навіть підмонади монади ємностей. Там же доведено, що кожному ємності на компактi можна отримати дією множення монади на $\cup$ -ємність на просторі $\cap$ -ємностей (і, симетрично, на $\cap$ -ємність на просторі $\cup$ -ємностей). Водночас, множення монади ємностей, діючи на $\cup$ -ємність на просторі $\cup$ -ємностей, дає тільки $\cup$ -ємності (подібно для $\cap$ -ємностей). Тому можна вести мову тільки про *наближення* довільної ємності $\cup$ - чи $\cap$ -ємностями. Цю статтю присвячено пошуку найкращого наближення $\cup$ -ємністю довільної ємності на метричному компактi. Оскільки існує ізометрія простору ємностей на метричному компактi на себе, що відображає $\cup$ -ємності

2000 *Mathematics Subject Classification*: 18B30, 54B30.

Дослідження підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України, проект Ф25.1/099.

Keywords: capacity, metric compactum, optimal approximation

doi:10.30970/ms.31.2.115-121

© І. Д. Глушак, 2009

в $\cap$ -ємності і навпаки, то одночасно буде отримано спосіб знаходження найкращого наближення довільної ємності $\cap$ -ємністю. Запропоновано також метод оптимального наближення довільної ємності на метричному компактті ємністю на фіксованому замкненому підпросторі, що може бути корисним при наближеному розв'язуванні задач, пов'язаних з ємностями.

1. Допоміжні факти і поняття. *Компактом* називаємо (не обов'язково метризовний) компактний гаусдорфів топологічний простір. Якщо ж компактна топологія породжена деякою фіксованою метрикою, то такий компакт називаємо метричним. Вважаємо, що топологія на дійсній прямій $\mathbb{R}$ та одиничному відрізку $I = [0; 1]$ є стандартною. Розглядаємо тільки відкриті околиці. Пишемо $A \subset_{\text{cl}} X$ чи $A \subset_{\text{op}} X$, якщо A — відповідно, замкнена чи відкрита підмножина простору X . Тотожне відображення множини X в себе позначаємо 1_X . Для компакта X позначаємо $\text{exr } X$ множину всіх непорожніх замкнених підмножин X .

Надалі, якщо на множині X обрано метрику d , то відстань від точки $x \in X$ до непорожньої множини $A \subset X$ визначаємо формулою $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$.

Для $\varepsilon > 0$ і точки a в метричному просторі (X, d) кулю з центром a і радіусом ε позначаємо $B_\varepsilon(a)$. Якщо $\varepsilon > 0$, і A — множина в X , то позначаємо $\bar{O}_\varepsilon(A) = \{x \in X \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$. Зокрема, $\bar{O}_\varepsilon(\{a\}) = \bar{B}_\varepsilon(a)$ — це замкнена куля з центром a і радіусом ε .

Вслід за [6], називаємо функцію $c: \text{exr } X \cup \{\emptyset\} \rightarrow I$ *ємністю* на компактті X , якщо виконуються такі властивості (F, G — довільні замкнені підмножини простору X):

- 1) $c(\emptyset) = 0, c(X) = 1$;
- 2) якщо $F \subset G$, то $c(F) \leq c(G)$ (монотонність);
- 3) якщо $c(F) < a$, то існує така відкрита множина $U \supset F$, що для кожної замкненої множини G , що лежить в U , виконується $c(G) < a$ (напівнеперервність згори).

Продовжуємо ємність c на всі відкриті множини в X за формулою

$$c(U) = \sup\{c(F) \mid F \subset_{\text{cl}} X, F \subset U\}.$$

У [6] доведено, що множина MX всіх ємностей на компактті X теж є компактом, якщо задати топологію на MX передбазою з усіх множин вигляду

$$O_-(F, a) = \{c \in MX \mid c(F) < a\}, \text{ де } F \subset_{\text{cl}} X, a \in \mathbb{R},$$

$$\text{і } O_+(U, a) = \{c \in MX \mid c(U) > a\} = \{c \in MX \mid \text{існує компакт } F \subset U, c(F) > a\}, \text{ де } U \subset_{\text{op}} X, a \in \mathbb{R}.$$

Якщо топологія на компактті X визначена метрикою d , то топологія на MX визначена такою метрикою ([6])

$$\hat{d}(c, c') = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall F \subset_{\text{cl}} X \ c(\bar{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c'(F), c'(\bar{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c(F)\}.$$

Якщо c — ємність на X , то в [6] доведено, що функція $\varkappa X(c)$, означена на $\text{exr } X \cup \{\emptyset\}$ формулою $\varkappa X(c)(F) = 1 - c(X \setminus F)$, теж є ємністю. Називаємо її *ємністю*, *двоїстою* чи *спряженою* до c . Відображення $\varkappa X: MX \rightarrow MX$ є гомеоморфізмом, інволюцією, а також ізометрією, якщо X — метричний компакт.

Ємність $c \in MX$ називаємо $\cap$ -ємністю (сар-ємністю або *мірою необхідності*, *necessity measure*) [7], якщо для всіх $A, B \subset_{\text{cl}} X$ виконується $c(A \cap B) = \min\{c(A), c(B)\}$.

Множину всіх $\cap$ -ємностей на компактті X позначаємо $M_\cap X$. У [7] доведено, що $M_\cap X$ замкнена у MX і тому є компактом у індукованій топології.

Подібно, ємність $c \in MX$ називаємо $\cup$ -ємністю (суп-ємністю, також *мірою можливості*, *possibility measure*, чи *sup-мірою*, див. [7, 5]), якщо для всіх $A, B \subseteq X$ виконується $c(A \cup B) = \max\{c(A), c(B)\}$. Множина $M_\cup X$ всіх $\cup$ -ємностей на компактi X теж ([7]) є замкнутою в MX . У [7] також доведено, що ємність c на компактi X є $\cap$ -ємністю, якщо і тільки якщо двоїста ємність $c' = \kappa X(c)$ є $\cup$ -ємністю. Обмеження відображення κX на підпростори $M_\cup X$ та $M_\cap X$ є взаємно оберненими гомеоморфізмами $M_\cup X \rightarrow M_\cap X$ і $M_\cap X \rightarrow M_\cup X$.

2. Наближення $\cup$ -ємностями та $\cap$ -ємностями. Надалі вважаємо, що (X, d) — метричний компакт, і на MX розглядається описана вище метрика $\hat{d}$. Знайдемо для довільної ємності $c \in MX$ найближчу (чи одну з найближчих) відносно метрики $\hat{d}$ $\cup$ -ємність. Спершу опишемо згадану вище ізометрію.

Твердження 1. Для довільних ємностей $c_1, c_2 \in MX$

$$\hat{d}(c_1, c_2) = \hat{d}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2),$$

де $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ — ємності, двоїсті до c_1 та c_2 .

Доведення. Нерівність $\hat{d}(c_1, c_2) \leq \varepsilon$ рівносильна до системи

$$\begin{cases} c_1(\overline{O_\varepsilon}(F)) + \varepsilon \geq c_2(F), \\ c_2(\overline{O_\varepsilon}(F)) + \varepsilon \geq c_1(F), \end{cases} \quad (1)$$

для кожної множини $F \in \exp X$. Аналогічно $\hat{d}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \leq \delta$, якщо для кожної $F \in \exp X$ виконуються нерівності

$$\begin{cases} \tilde{c}_1(\overline{O_\delta}(F)) + \delta \geq \tilde{c}_2(F), \\ \tilde{c}_2(\overline{O_\delta}(F)) + \delta \geq \tilde{c}_1(F). \end{cases} \quad (2)$$

Позначимо через E множину тих $\varepsilon \geq 0$, що для довільної замкнутої множини $F \subset X$ виконуються нерівності (1), а через Δ — множину тих $\delta \geq 0$, при яких виконано (2). Згідно означення метрики на просторі ємностей $\hat{d}(c_1, c_2) = \inf E$, $\hat{d}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = \inf \Delta$.

Припустимо, що $\varepsilon \in E$, і покажемо, що $\varepsilon \in \Delta$. Ємність $\tilde{c}_1$ — двоїста до c_1 , тому $\tilde{c}_1(\overline{O_\varepsilon}(F)) = 1 - c_1(X \setminus \overline{O_\varepsilon}(F)) = 1 - \sup\{c_1(G) \mid G \in \exp X, G \cap \overline{O_\varepsilon}(F) = \emptyset\}$. Зауважимо, що $G \cap \overline{O_\varepsilon}(F) = \emptyset$ рівносильне до $\overline{O_\varepsilon}(G) \cap F = \emptyset$. Згідно другої нерівності з (1) $\sup\{c_1(G) \mid G \in \exp X, \overline{O_\varepsilon}(G) \cap F = \emptyset\} \leq \sup\{c_2(\overline{O_\varepsilon}(G)) \mid G \in \exp X, \overline{O_\varepsilon}(G) \cap F = \emptyset\} + \varepsilon$. Покладемо $G' = \overline{O_\varepsilon}(G)$, тоді $\sup\{c_1(G) \mid \overline{O_\varepsilon}(G) \cap F = \emptyset\} \leq \sup\{c_2(G') \mid G' \cap F = \emptyset\} + \varepsilon$. А, отже, $1 - \sup\{c_1(G) \mid G \cap \overline{O_\varepsilon}(F) = \emptyset\} + \varepsilon \geq 1 - (\sup\{c_2(G') \mid G' \cap F = \emptyset\} + \varepsilon) + \varepsilon = 1 - c_2(X \setminus F) = \tilde{c}_2(F)$. Отже, виконується перша нерівність з (2).

Аналогічно доводимо, що з першої нерівності з (1) випливає друга нерівність з (2) для $\delta = \varepsilon$. Це означає, що $\varepsilon \in \Delta$, тобто $E \subset \Delta$. З іншого боку, аналогічно отримуємо $\Delta \subset E$, тому $\Delta = E$, і $\hat{d}(c_1, c_2) = \hat{d}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$. $\square$

Отже, κX є ізометрією $(MX, \hat{d})$ на себе, і його обмеження на $M_\cap X$ є ізометрією на $M_\cup X$.

Для довільної ємності $c \in MX$ і чисел $\alpha \in I$ та $\varepsilon > 0$ позначимо

$$B_\varepsilon^\alpha = \{x \in X \mid c(\overline{B_\varepsilon}(x)) \geq \alpha - \varepsilon\}.$$

Лема 1. Для довільних $c \in MX$, $\alpha \in I$ та $\varepsilon > 0$ множина B_ε^α замкнена в X . Якщо $\alpha < \beta$, то $B_\varepsilon^\alpha \supset B_\varepsilon^\beta$. Крім того, $B_\varepsilon^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} B_\varepsilon^\beta$ для всіх $\alpha \in I$, $B_\varepsilon^0 = X$.

Доведення. Нехай $x \in X \setminus B_\varepsilon^\alpha = \{x \in X \mid c(\overline{B}_\varepsilon(x)) < \alpha - \varepsilon\}$. Згідно властивості напівнеперервності згори знайдеться така множина $U \subset X$, що $U \supset \overline{B}_\varepsilon(x)$ і для кожної замкненої множини $F \subset U$ виконується $c(F) < \alpha - \varepsilon$. Оберемо таке $\varepsilon_1 > 0$, що $B_{\varepsilon+\varepsilon_1}(x) \subset U$, тоді для кожного елемента $x' \in B_{\varepsilon_1}(x)$ отримуємо $\overline{B}_\varepsilon(x') \subset B_{\varepsilon+\varepsilon_1}(x) \subset U$, звідки $c(\overline{B}_\varepsilon(x')) < \alpha - \varepsilon$ і $B_{\varepsilon_1}(x) \subset X \setminus B_\varepsilon^\alpha$, що означає $X \setminus B_\varepsilon^\alpha \subset X$. Інші властивості є очевидними. $\square$

Співставимо кожному значенню $\alpha \in I$ деяку множину $A^\alpha \in \text{exp } X$ так, щоб $A^\alpha \supset A^\beta$ для $\alpha < \beta$, $A^0 = X$, $A^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} A^\beta$ для всіх $\alpha \in I$. Виходячи з незростаючої системи замкнених множин $\{A^\alpha\}_{\alpha \in I}$, означимо функцію c_0 формулою:

$$c_0(F) = \max\{\alpha \in I \mid F \cap A^\alpha \neq \emptyset\}. \quad (*)$$

де F — довільна замкнена в X множина. У [7] доведено, що c_0 є $\cup$ -ємністю, і кожну $\cup$ -ємність можна отримати у такий спосіб.

Оскільки ємність c_0 однозначно визначається системою множин $\{A^\alpha\}_{\alpha \in I}$, то задача побудови ємності $c_0 \in M_\cup X$ вигляду (*), для якої $\widehat{d}(c, c_0) \leq \varepsilon$, при деякому визначеному $\varepsilon \geq 0$ рівносильна до відшукування відповідних множин A^α .

Лема 2. Якщо для ємності $c \in MX$, $\cup$ -ємності c_0 , визначеної системою множин $\{A^\alpha\}_{\alpha \in I}$, та $\varepsilon > 0$ виконується $\widehat{d}(c, c_0) \leq \varepsilon$, то множини A^α задовольняють вимоги:

- 1) $A^\alpha \subset B_\varepsilon^\alpha$;
- 2) якщо $F \subset X$, $F \cap \overline{O}_\varepsilon A^\alpha = \emptyset$, то $c(F) < \alpha + \varepsilon$.

Доведення. Для виконання $\widehat{d}(c, c_0) \leq \varepsilon$ необхідно і досить, щоб для всіх $F \in \text{exp } X$ виконувались нерівності

$$\begin{cases} c_0(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c(F), \\ c(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c_0(F). \end{cases} \quad (3)$$

Зауважимо, що $c_0(\{x\}) \geq \alpha$ для кожного елемента $x \in A^\alpha$, тому згідно з другою нерівністю з (3) маємо $c(\overline{O}_\varepsilon(\{x\})) + \varepsilon = c(\overline{B}_\varepsilon(x)) + \varepsilon \geq \alpha$, тобто $c(\overline{B}_\varepsilon(x)) \geq \alpha - \varepsilon$, звідки $A^\alpha \subset B_\varepsilon^\alpha$.

Якщо $F \cap \overline{O}_\varepsilon A^\alpha = \emptyset$, то за першою нерівністю з (3) $c(F) \leq c_0(\overline{O}_\varepsilon F) + \varepsilon < \alpha + \varepsilon$. $\square$

Припустимо, що $\widehat{d}(c, c_0) \leq \varepsilon$ для деякої $c_0 \in M_\cup X$. Тоді для відповідних множин A^α виконано пункти 1), 2) леми 2. Враховуючи попередню лему, маємо: якщо $F \subset X$,

$F \cap \overline{O}_\varepsilon B_\varepsilon^\alpha = \emptyset$, то $c(F) < \alpha + \varepsilon$.

Задамо ємність $c_\varepsilon^\cup \in M_\cup X$ формулою

$$c_\varepsilon^\cup(F) = \max\{\alpha \in I \mid F \cap B_\varepsilon^\alpha \neq \emptyset\},$$

де F — довільна замкнена в X множина.

Лема 3. Виконується нерівність $\widehat{d}(c, c_\varepsilon^\cup) \leq \varepsilon$.

Доведення. Нехай $c_\varepsilon^\cup(\overline{O}_\varepsilon(F)) < \alpha$ для замкненої непорожньої множини $F \subset X$ і деякого $\alpha \in I$, тоді $\overline{O}_\varepsilon(F) \cap B_\varepsilon^\alpha = \emptyset$, звідки $F \cap \overline{O}_\varepsilon(B_\varepsilon^\alpha) = \emptyset$. Отже, $c(F) < \alpha + \varepsilon$ для всіх $\alpha > c_\varepsilon^\cup(\overline{O}_\varepsilon(F))$. Звідси випливає $c(F) \leq c_\varepsilon^\cup(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon$.

Нехай тепер $c(\overline{O}_\varepsilon(F)) < \alpha - \varepsilon$ для деякого $\alpha \in I$, тоді F не може містити жодної точки $x \in B_\varepsilon^\alpha$, бо в іншому випадку отримуємо $\overline{O}_\varepsilon(F) \supset \overline{B}_\varepsilon(x)$, і $c(\overline{O}_\varepsilon(F)) \geq c(\overline{B}_\varepsilon(x)) \geq \alpha - \varepsilon$

— суперечність. Отже, $c_\varepsilon^\cup(F) \leq \alpha$ для всіх $\alpha > c(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon$, звідки $c_\varepsilon^\cup(F) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon$. Об'єднуючи отримані нерівності, отримуємо $\widehat{d}(c_\varepsilon^\cup, c) \leq \varepsilon$, що і потрібно було довести. $\square$

Неважко перевірити, що твердження останньої леми правильне і для $\varepsilon = 0$.

Теорема 1. Для кожної ємності c на метричному компактi X відстань від c до підпростору $M_\cup X$ дорівнює найменшому з $\varepsilon \geq 0$, для яких нерівність $c(F) < \alpha + \varepsilon$ виконується для всіх $\alpha \in I$, $F \subset X$, $F \cap \overline{O}_\varepsilon B_\varepsilon^\alpha = \emptyset$. Для такого ε найбільша з тих ємностей $c_0 \in M_\cup X$, що $\widehat{d}(c_0, c) = \varepsilon$, визначається формулою $c_0 = c_\varepsilon^\cup(F) = \sup\{\alpha \in I \mid F \cap B_\varepsilon^\alpha \neq \emptyset\}$ для кожної замкненої множини $F \subset X$.

Враховуючи твердження 1, ємність $c_0 \in M_\cap X$, найближчу до довільної ємності $c \in MX$, можна знайти так: знаходимо ємність $c_\varepsilon^\cup \in M_\cup X$, найближчу до $c' = \varkappa X(c)$, і переходимо до двоїстої ємності: $c_0 = \varkappa X(c_\varepsilon^\cup)$. Неважко також виписати умови і вираз для c_0 , але через громіздкість ми їх пропускаємо.

3. Наближення ємностями, визначеними на замкненому підпросторі. Розглянемо задачу наближення довільної ємності c на компактi X ємностями, визначеними на деякому замкненому підпросторі X_0 простору X . Нехай $c_0 \in MX_0$, звідки $c_0(X_0) = 1$. Ємність c_0 на підпросторі X_0 вважаємо продовженою на X формулою: $c_0(F) = c_0(F \cap X_0)$ для $F \subset X$.

Для ємності $c \in MX$ та фіксованого $\varepsilon \geq 1 - c(\overline{O}_\varepsilon(X_0))$ означимо ємність $c_\varepsilon^+ \in MX_0$ формулою

$$c_\varepsilon^+(F) = \begin{cases} \min\{c(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon, 1\}, & F \neq \emptyset, F \subset_{\text{cl}} X_0, \\ 0, & F = \emptyset. \end{cases}$$

Для того, щоб довести, що c_ε^+ справді є ємністю, достатньо перевірити неперервність згори (монотонність очевидна). Нехай $F \neq \emptyset$ і $c_\varepsilon^+(F) < a \leq 1$, що рівносильне до $c(\overline{O}_\varepsilon(F)) < a - \varepsilon$. Тоді існує такий окіл $U_1 \supset \overline{O}_\varepsilon(F)$, що $c(H_1) < a - \varepsilon$ для кожної замкненої множини $H_1 \subset U_1$. Покладемо $U = X_0 \setminus \overline{O}_\varepsilon(X_0 \setminus U_1)$, тоді $U \subset_{\text{ор}} X_0$, $U \supset F$.

Крім того, для довільної замкненої множини $H \subset U$ виконується $H \cap \overline{O}_\varepsilon(X \setminus U_1) = \emptyset$, тобто $\overline{O}_\varepsilon(H) \subset U_1$, звідки $c(\overline{O}_\varepsilon(H)) < a - \varepsilon$.

Означимо ємність c_ε^- як $(\widetilde{c}_\varepsilon^+)$. Зауважимо, що c_ε^- є ємністю при $\varepsilon \geq 1 - \widetilde{c}(\overline{O}_\varepsilon(X_0))$, тобто при $\varepsilon \geq c(X \setminus \overline{O}_\varepsilon(X_0))$. Неважко перевірити, що для $V \subset_{\text{ор}} X_0$

$$c_\varepsilon^-(V) = \begin{cases} 1, & V = X_0, \\ \max\{0, c(X \setminus \overline{O}_\varepsilon(X_0 \setminus V)) - \varepsilon\}, & V \neq X_0. \end{cases}$$

Якщо $F \subset_{\text{cl}} X_0$, то $c_\varepsilon^-(F) = \inf\{c_\varepsilon^-(V) : V \subset_{\text{ор}} X_0, V \supset F\}$.

Лема 4. $\widehat{d}(c, MX_0) \leq \varepsilon$ тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються умови:

1) $\varepsilon \geq 1 - c(\overline{O}_\varepsilon(X_0))$ та $\varepsilon \geq c(X \setminus \overline{O}_\varepsilon(X_0))$; 2) $c_\varepsilon^- \leq c_\varepsilon^+$.

Доведення. Нехай $\widehat{d}(c, c_0) \leq \varepsilon$ для деякої ємності $c_0 \in MX_0$, тоді за твердженням 1 для кожної множини $F \subset X$ виконуються нерівності

$$\begin{cases} c_0(F) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon, \\ \widetilde{c}_0(F) \leq \widetilde{c}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon, \end{cases} \quad \text{які рівносильні до} \quad \begin{cases} c_0(F \cap X_0) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon, \\ c_0(X_0 \setminus F) \geq c(X \setminus \overline{O}_\varepsilon(F)) - \varepsilon. \end{cases}$$

Прийmemo $F = X_0$. Тоді повинно виконуватись

$$\begin{cases} c(\overline{O}_\varepsilon(X_0)) \geq 1 - \varepsilon, \\ c(X \setminus \overline{O}_\varepsilon(X_0)) \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (4)$$

Отже, при фіксованому $\varepsilon \geq 0$ існує хоча б одна ємність $c_0 \in MX_0$, для якої $\widehat{d}(c, c_0) \leq \varepsilon$ тільки тоді, коли для підпростору X_0 виконується (4).

Звідси, якщо $\widehat{d}(c, c_0) \leq \varepsilon$, то $\varepsilon \geq 1 - c(\overline{O}_\varepsilon(X_0))$ та $\varepsilon \geq c(X \setminus \overline{O}_\varepsilon(X_0))$, тому $c_\varepsilon^+ \in MX_0$ та $c_\varepsilon^- \in MX_0$. Доведемо, що $c_0(F) \leq c_\varepsilon^+(F)$ для кожної множини $F \subset_{\text{cl}} X_0$. Справді, $c_0(F) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon$, тоді $c_0(F) \leq \min\{c(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon, 1\}$ тобто $c_0 \leq c_\varepsilon^+$. Крім того, $\widehat{d}(\widetilde{c}, \widetilde{c}_0) \leq \varepsilon$, тому для кожної $F \subset_{\text{cl}} X_0$ виконується нерівність $\widetilde{c}_0(F) \leq \widetilde{c}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon$, а, отже, $\widetilde{c}_0(F) \leq \widetilde{c}_\varepsilon^+(F)$, звідки $c_0 \geq \widetilde{(\widetilde{c}_\varepsilon^+)} = c_\varepsilon^-$.

І навпаки, якщо $c_\varepsilon^- \leq c_0 \leq c_\varepsilon^+$, тобто для кожної множини $G \subset X$ істинні нерівності $c_0(G \cap X_0) \leq c_\varepsilon^+(G \cap X_0) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(G \cap X_0)) + \varepsilon \leq c(\overline{O}_\varepsilon(G)) + \varepsilon$ та $c_0(G \cap X_0) \geq c_\varepsilon^-(G \cap X_0) = \widetilde{(\widetilde{c}_\varepsilon^+)}(G \cap X_0)$, то $\widetilde{c}_0(G \cap X_0) \leq \widetilde{c}_\varepsilon^+(G \cap X_0) \leq \widetilde{c}(\overline{O}_\varepsilon(G \cap X_0)) + \varepsilon \leq \widetilde{c}(\overline{O}_\varepsilon(G)) + \varepsilon$, звідки $\widehat{d}(c_0, c) \leq \varepsilon$. $\square$

Наслідок 1. Для довільної ємності $c \in MX$ та $\varepsilon \geq 0$, що задовольняє умови леми 4, виконується: 1) $\widehat{d}(c, c_\varepsilon^+) \leq \varepsilon$; 2) $\widehat{d}(c, c_\varepsilon^-) \leq \varepsilon$; 3) $\widehat{d}(c, c_0) \leq \varepsilon$ для ємності $c_0 \in MX_0$, — тоді і тільки тоді, коли $c_\varepsilon^- \leq c_0 \leq c_\varepsilon^+$.

Лема 5. Нехай (X, τ) — компакт, $\nu = \{X \setminus U : U \in \tau\}$, $\mathcal{D} \subset \tau \times \nu$ — така сім'я пар множин, що для кожних множин $F \subset_{\text{cl}} X$ та $U \subset_{\text{ор}} X$, $F \subset U$ існує така пара $(V, H) \in \mathcal{D}$, що

$$F \subset V \subset H \subset U.$$

Тоді для довільних ємностей $c_1, c_2 \in MX$ нерівність $c_1 \leq c_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $c_1(V) \leq c_2(H)$ для кожної пари $(V, H) \in \mathcal{D}$.

Нескладне доведення леми 5 пропускаємо. Очевидно, що сім'ї

$$\mathcal{D}_1 = \{(V, \text{Cl } V) : V \in \tau\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(\text{Int } G, G) : G \in \nu\}$$

задовольняють умови леми 5, звідки випливає такий наслідок.

Наслідок 2. Для ємностей $c_1, c_2 \in MX$ нерівність $c_1 \leq c_2$ істинна тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов: 1) $c_1(U) \leq c_2(\text{Cl } U)$ для кожної $U \subset_{\text{ор}} X$; 2) $c_1(\text{Int } F) \leq c_2(F)$ для кожної $F \subset_{\text{cl}} X$.

Теорема 2. Відстань від ємності $c \in MX$ до підпростору MX_0 дорівнює

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \varepsilon \geq 0 : c(\overline{O}_\varepsilon(X_0)) + \varepsilon \geq 1, c(X \setminus \overline{O}_\varepsilon(X_0)) \leq \varepsilon, c(X \setminus \overline{O}_\varepsilon(X_0 \setminus U)) - \varepsilon \leq c(\overline{O}_\varepsilon(\text{Cl } U)) + \varepsilon \quad (\forall U \subset_{\text{ор}} X_0) \right\}.$$

Найближчі до $c \in MX$ ємності c_0 з підпростору MX_0 визначаються нерівністю $c_{\varepsilon_0}^- \leq c_0 \leq c_{\varepsilon_0}^+$.

Доведення. Доведемо, що для кожної множини $G \subset_{\text{cl}} X, G \neq X$ та $0 < a \leq 1$ множина

$$W_a^c(G) = \{\varepsilon \geq 0 : c(\overline{O}_\varepsilon(G)) < a - \varepsilon\}$$

є відкритою в I . Нехай $\varepsilon \in W_a^c(G)$, тоді знайдеться таке $b > 0$, що $c(\overline{O}_\varepsilon(G)) < b < a - \varepsilon$. З неперервності згори ємності випливає, що існує такий окіл U множини $\overline{O}_\varepsilon(G)$

та $\varepsilon_1 > \varepsilon$, що $U \supset \overline{O}_{\varepsilon_1}(G) \supset \overline{O}_{\varepsilon}(G)$ і $c(\overline{O}_{\varepsilon_1}(G)) < b$. Оберемо довільне $\varepsilon_2 > \varepsilon$, для якого $b < a - \varepsilon_2 < a - \varepsilon$. Якщо $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, то $a - \varepsilon > a - \varepsilon_1 > a - \varepsilon_2 > b$, звідки, $c(\overline{O}_{\varepsilon_1}(G)) < a - \varepsilon_1$. Якщо $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$, то $c(\overline{O}_{\varepsilon_2}(G)) \leq c(\overline{O}_{\varepsilon_1}(G)) < b < a - \varepsilon_2$. Тому, поклавши $\varepsilon' = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, отримаємо: $c(\overline{O}_{\varepsilon'}(G)) < a - \varepsilon'$. Зауважимо, що для будь-якого $\delta < \varepsilon$ виконується нерівність $c(\overline{O}_{\delta}(G)) \leq c(\overline{O}_{\varepsilon}(G)) < a - \varepsilon < a - \delta$. Отже, $[0; \varepsilon)$ — відкритий окіл точки ε , який належить до множини $W_a^c(G)$. Тому можна стверджувати, що множина $E_{X_0} = \{\varepsilon \geq 0: c(\overline{O}_{\varepsilon}(X_0)) \geq 1 - \varepsilon, c(X \setminus \overline{O}_{\varepsilon}(X_0)) \leq \varepsilon\}$ є замкнутою. Справді,

$$\begin{aligned} I \setminus E_{X_0} &= \{\varepsilon \geq 0 \mid c(\overline{O}_{\varepsilon}(X_0)) < 1 - \varepsilon \text{ or } c(X \setminus \overline{O}_{\varepsilon}(X_0)) > \varepsilon\} = \\ &= \{\varepsilon \geq 0 \mid c(\overline{O}_{\varepsilon}(X_0)) < 1 - \varepsilon \text{ or } \tilde{c}(\overline{O}_{\varepsilon}(X_0)) < 1 - \varepsilon\} = W_1^c(X_0) \cup W_1^{\tilde{c}}(X_0) \underset{\text{op}}{\subset} I. \end{aligned}$$

Далі, для $U \underset{\text{op}}{\subset} X_0$, $U \neq X_0$ побудуємо множину

$$E_U = \{\varepsilon \geq 0: c(X \setminus \overline{O}_{\varepsilon}(X_0 \setminus U)) - \varepsilon \leq c(\overline{O}_{\varepsilon}(\text{Cl } U)) + \varepsilon\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I \setminus E_U &= \{\varepsilon \geq 0 \mid \exists a \in (0, 1) \ c(X \setminus \overline{O}_{\varepsilon}(X_0 \setminus U)) - \varepsilon > a > c(\overline{O}_{\varepsilon}(\text{Cl } U)) + \varepsilon\} = \\ &= \{\varepsilon \geq 0: c(X \setminus \overline{O}_{\varepsilon}(X_0 \setminus U)) - \varepsilon > a\} \cup \{\varepsilon \geq 0: c(\overline{O}_{\varepsilon}(\text{Cl } U)) < a - \varepsilon\} = \\ &= \{\varepsilon \geq 0: \tilde{c}(\overline{O}_{\varepsilon}(X_0 \setminus U)) < 1 - a - \varepsilon\} \cup \{\varepsilon \geq 0: c(\overline{O}_{\varepsilon}(\text{Cl } U)) < a - \varepsilon\} = \\ &= W_{1-a}^{\tilde{c}}(X_0 \setminus U) \cup W_a^c(\text{Cl } U) \underset{\text{op}}{\subset} I, \end{aligned}$$

тобто $E_U \underset{\text{cl}}{\subset} I$. Отже, множина $E = E_{X_0} \cap \left(\bigcap_{U \underset{\text{op}}{\subset} X_0} E_U \right)$ замкнена в I і непорожня, оскільки

містить $\max\{\sup\{d_H(F, X): F \underset{\text{cl}}{\subset} X_0\}; 1\}$. Тому в E існує найменший елемент ε_0 , який за лемою 4 та наслідком 2 і є шуканою відстанню $\widehat{d}(c, MX_0)$. Застосування наслідку 1 завершує доведення. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. G. Choquet, *Theory of Capacity*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **5** (1953-1954) 131–295.
2. L. Epstein, T. Wang, “Beliefs about beliefs” without probabilities, *Econometrica*, **64** (1996) №5, 1343–1373.
3. D. Schmeidler, *Subjective Probability and Expected Utility without Additivity*, *Econometrica*, **57** (1989) 571–587.
4. Zhou Lin, *Integral representation of continuous comonotonically additive functionals*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998) №5, 1811–1822.
5. G.L. O’Brien, W. Verwaat, *How subsadditive are subadditive capacities?* Comment. Math. Univ. Carolin. **35** (1994) №2, 311–324.
6. M.M. Zarichnyi, O.R. Nykyforchyn, *Capacity functor in the category of compacta*, Mat. Sb. **199** (2008) №2, 3–26.
7. I.D. Hlushak, O.R. Nykyforchyn, *Submonads of the capacity monad*, Carpathian J. Math. **24** (2008) №1, 56–67.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
факультет математики та інформатики,
вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 20.12.2008
Після переробки 24.02.2009