

УДК 517.5

Я. В. Васильків, О. Я. Бродяк

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ВЕЛИЧИНОЮ РОДУ І ПОРЯДКАМИ ПОЙЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ З АСИМЕТРИЧНИМ РОЗПОДІЛОМ НУЛІВ

Ya. V. Vasylykiv, O. Ya. Brodyak. *Relations between the value of genus and Polya orders of entire functions with asymmetrically distributed zeros*, Mat. Stud. **31** (2009), 56–64.

Sharp relations between the value of genus and Polya orders of entire functions with asymmetrically distributed zeros are obtained.

Я. В. Васильків, О. Я. Бродяк. *Соотношения между величиной рода и порядками Поля целых функций с асимметрическим распределением нулей* // Мат. Студії. – 2009. – Т.31, №1. – С.56–64.

Установлены точные соотношения между величиной рода и порядками Поля целых функций с асимметрическим распределением нулей.

Вступ. Основними характеристиками, що описують зростання цілої функції $f(z) \neq \text{const}$ при $|z| \rightarrow +\infty$ є функції ([1, 3])

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

де $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$, $x > 0$. Добре відомо, (див., наприклад, [3], с.54) що для всіх $\alpha > 1$, $r > 0$

$$T(r, f) \leq \log M(r, f) \leq \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} T(\alpha r, f). \quad (1)$$

В свою чергу, швидкість зростання функцій $\log M(r, f)$ і $T(r, f)$ описують звичайними порядками та порядками за Поля відповідно. Нагадаємо їх означення. Нехай $\lambda(r)$ — *функція зростання*, тобто додатна неспадна необмежена, визначена на $(0, +\infty)$ функція. Величини (див. [1], гл.1, §1, [8])

$$\mu[\lambda] = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ \lambda(r)}{\log r}, \quad \rho[\lambda] = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ \lambda(r)}{\log r}$$

називають нижнім порядком та порядком функції λ , а величини

$$\mu_*[\lambda] = \liminf_{r, A \rightarrow +\infty} \frac{\log \lambda(Ar) - \log \lambda(r)}{\log A}, \quad \rho^*[\lambda] = \limsup_{r, A \rightarrow +\infty} \frac{\log \lambda(Ar) - \log \lambda(r)}{\log A}$$

— нижнім порядком та порядком за Поля функції λ . При цьому (див. [1], с.13, [8, 9])

$$0 \leq \mu_*[\lambda] \leq \mu[\lambda] \leq \rho[\lambda] \leq \rho^*[\lambda] \leq +\infty$$

і всі можливі комбінації знаків " $<$ " і " $=$ " у цих співвідношеннях можна реалізувати. Рівносильне означення величин $\rho^*[\lambda]$ та $\mu_*[\lambda]$ полягає в тому (див. [1], с.43, [8]), що

2000 *Mathematics Subject Classification*: 34B05.

Keywords: Polya order, entire function, asymmetrically distributed zeros

doi:10.30970/ms.31.1.56-64

© Я. В. Васильків, О. Я. Бродяк, 2009

точна верхня (нижня) грань порядків піків Пойя для даної функції λ збігається з $\rho^*[\lambda]$ (з $\mu_*[\lambda]$ відповідно). Точні означення, формулювання, а також доведення цього факту можна знайти в [8]. Зауважимо (див. [1], с.44), що

$$\rho^*[\lambda] < +\infty \Leftrightarrow \lambda(2r) = O(\lambda(r)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Скрізь надалі, функції зростання λ для яких $\rho^*[\lambda] < +\infty$ називатимемо функціями *помірного зростання* (*moderate growth*).

В цій статті ми встановимо точні співвідношення між величиною роду цілої функції f з спеціальним розподілом нулів (див. умову (10)) та порядками за Пойя її характеристик $T(r, f)$ і $\log M(r, f)$. Наші міркування базуються на елементарних, але, на наш погляд, важливих твердженнях (див. леми 1 та 2) і простому попередньому аналізу (див. лему 3) коефіцієнтів Фур'є-Стільтьєса

$$n_k(r, \mathcal{Z}) = \sum_{|a_j| \leq r} \left(\frac{\bar{a}_j}{|a_j|} \right)^k$$

послідовності нулів $\mathcal{Z} = \{a_j\}$ цілої функції f , які входять у зображення (див. співвідношення (7)) коефіцієнтів $l_k(r, f)$ розвинення в ряд Фур'є

$$\log f(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} l_k(r, f) e^{ik\theta}$$

функції $\log f$, визначеної у сенсі співвідношення

$$\log f(z) = \int_0^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi + \log f(0), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{z = ta_j : t \geq 1, a_j \in f^{-1}(0)\}.$$

Отримані нами результати можна розглядати як доповнення до результатів, отриманих в роботах [10]–[16].

1. Означення і допоміжні твердження. Нехай $\mathcal{Z} = \{a_j\}$ — послідовність відмінних від нуля комплексних чисел з єдиною точкою скупчення на нескінченності роду $q - 1$, тобто $q = \min\{p \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{+\infty} |a_j|^{-p} < +\infty\}$. Нехай також ([1, 3])

$$n(r, \mathcal{Z}) = \sum_{|a_j| \leq r} 1, \quad N(r, \mathcal{Z}) = \int_0^r \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t} dt, \quad r > 0,$$

— лічильна та неванлінна лічильна функції послідовності $\mathcal{Z}$. Крім того, нехай

$$\lambda(r) = r^{q-1} \int_0^r \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^q} dt + r^q \int_r^{+\infty} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt, \quad r > 0, \quad (3)$$

— функція зростання Бореля-Валірона (див. [1], с.35).

Для функції $\lambda(r)$ маємо таку лему.

Лема 1. Якщо $\lambda(r)$ — функція зростання Бореля-Валірона (3), то

$$q - 1 \leq \mu_*[\lambda] \leq \rho^*[\lambda] \leq q.$$

Доведення. Маємо $\lambda(r) = (q - 1)r^{q-1} \int_0^r \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^q} dt + r^q \int_r^{+\infty} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt$. Зауважимо, що

$$r\lambda'(r) = (q - 1)^2 r^{q-1} \int_0^r \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^q} dt + q^2 r^q \int_r^{+\infty} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt - N(r, \mathcal{Z}).$$

Отже, $q-1 \leq r\lambda'(r)/\lambda(r) \leq q$ для всіх $q \in \mathbb{N}$, $r > 0$. Звідси та з рівності $\log(\lambda(Ar)/\lambda(r)) = \int_r^{Ar} \frac{t\lambda'(t)}{\lambda(t)} \frac{dt}{t}$ випливає, що $q-1 \leq \frac{\log \lambda(Ar) - \log \lambda(r)}{\log A} \leq q$ для всіх $r > 0$, $A > 1$. Тому $q-1 \leq \mu_*[\lambda] \leq \rho^*[\lambda] \leq q$, що завершує доведення лема 1. $\square$

Наступні два очевидні співвідношення для функції зростання Бореля–Валірона (3) будуть використані нами в подальшому

$$r^{q-1} = o(\lambda(r)) \quad \text{і} \quad \lambda(r) = o(r^q) \quad (r \rightarrow +\infty). \quad (4)$$

Нехай $f(z)$ — ціла функція з нулями $\mathcal{Z}(f) = \{a_j\}$ і $\log f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k z^k$ в деякому околі точки $z = 0$, $f(0) = 1$. Нехай також при $r > 0$ і $k \in \mathbb{Z}$

$$l_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log f(re^{i\theta}) d\theta, \quad c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

$$n_k(r, f) := n_k(r, \mathcal{Z}(f)), \quad n(r, f) := n_0(r, f), \quad N(r, f) = \int_0^r n(t, f) t^{-1} dt.$$

Очевидно, що для всіх $r > 0$ і $k \in \mathbb{Z}$

$$|n_k(r, f)| \leq n(r, f). \quad (5)$$

Співвідношення для $c_k(r, f)$ і $l_k(r, f)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$ мають вигляд (див. [4]–[7])

$$l_0(r, f) = c_0(r, f) = N(r, f),$$

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2} \gamma_k r^k + \frac{1}{2k} \sum_{|a_j| \leq r} \left[\left(\frac{r}{a_j} \right)^k - \left(\frac{\bar{a}_j}{r} \right)^k \right] = \frac{1}{2} \gamma_k r^k + \frac{1}{2} \int_0^r \left[\left(\frac{r}{t} \right)^k + \left(\frac{t}{r} \right)^k \right] \frac{n_k(t, f)}{t} dt, \quad (6)$$

$$l_k(r, f) = \gamma_k r^k + \frac{1}{k} \sum_{|a_j| \leq r} \left(\frac{r}{a_j} \right)^k - \frac{1}{k} n_k(r, f) = \gamma_k r^k + r^k \int_0^r \frac{n_k(t, f)}{t^{k+1}} dt. \quad (7)$$

Співставляючи (6) та (7) нескладно зауважити, що при $k \in \mathbb{N}$, $r > 0$ виконується

$$l_k(r, f) = 2c_k(r, f) + \frac{1}{k} \sum_{|a_j| \leq r} \left(\frac{\bar{a}_j}{r} \right)^k - \frac{1}{k} n_k(r, f) = 2c_k(r, f) - \int_0^r \left(\frac{t}{r} \right)^k \frac{n_k(t, f)}{t} dt.$$

У статті [7] (нерівність (13)) за допомогою цієї рівності встановлено таке твердження.

Лема 2. Нехай $f(z) \not\equiv \text{const}$ — ціла функція, $f(0) = 1$. Тоді для всіх $k \in \mathbb{N}$, $r > 0$

$$|l_k(r, f)| \leq 4T(r, f) - N(r, f) \leq 4T(r, f). \quad (8)$$

Для $p \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2p}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2p} - \varepsilon$ розглянемо сектор

$$D_p(\eta) = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r \geq 0, |\theta| \leq \eta\}.$$

Означення 1. Якщо при деяких $p \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2p}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2p} - \varepsilon$ і всіх $r > 0$ виконується

$$\sum_{|a_j| \leq r, a_j \notin D_p(\eta)} 1 \leq \frac{\sin(p\varepsilon)}{2(1 + \sin(p\varepsilon))} n(r, \mathcal{Z}), \quad (9)$$

то будемо говорити, що у функції $f(z)$ нулі (p, η, ε) -асиметрично розподілені.

Зокрема, якщо всі нулі $\mathcal{Z}(f) = \{a_j\}$ цілої функції $f(z)$ лежать в $D_p(\eta)$, то f має (p, η, ε) -асиметрично розподілені нулі. Зауважимо, що умова (9) рівносильна до умови

$$\sum_{|a_j| \leq r, a_j \notin D_p(\eta)} 1 \leq \frac{\sin(p\varepsilon)}{2 + \sin(p\varepsilon)} \sum_{|a_j| \leq r, a_j \in D_p(\eta)} 1.$$

Правильна така елементарна лема.

Лема 3. Нехай послідовність $\mathcal{Z} = \{a_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} |a_j| = +\infty$ така, що для неї виконується умова (9) при деяких $p \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2p}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2p} - \varepsilon$ і всіх $r > 0$. Тоді для всіх $r > 0$, $k \in \{1, 2, \dots, p\}$

$$\operatorname{Re} n_k(r, \mathcal{Z}) \geq \frac{1}{2} \sin(p\varepsilon) n(r, \mathcal{Z}), \quad (10)$$

$$|\operatorname{Im} n_k(r, \mathcal{Z})| \leq \frac{1}{2} \sqrt{3 + \cos^2(p\varepsilon)} n(r, \mathcal{Z}). \quad (11)$$

Доведення. Нехай $a_j = |a_j|e^{i\theta_j}$. Враховуючи умову (9) і те, що функція $\cos \theta$ парна і спадає на $[0, \pi/2]$, для всіх $r > 0$ і $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} n_k(r, \mathcal{Z}) &= \sum_{|a_j| \leq r, a_j \in D_p(\eta)} \cos(k\theta_j) + \sum_{|a_j| \leq r, a_j \notin D_p(\eta)} \cos(k\theta_j) \geq \sin(p\varepsilon) \sum_{|a_j| \leq r, a_j \in D_p(\eta)} 1 - \\ &- \sum_{|a_j| \leq r, a_j \notin D_p(\eta)} 1 = \sin(p\varepsilon) n(r, \mathcal{Z}) - (1 + \sin(p\varepsilon)) \sum_{|a_j| \leq r, a_j \notin D_p(\eta)} 1 \geq \frac{1}{2} \sin(p\varepsilon) n(r, \mathcal{Z}), \end{aligned}$$

тобто отримуємо (10). Співвідношення (11) негайно випливають з співвідношень (5) та (10). $\square$

Зауваження 1. А. А. Гольдберг ввів і дослідив ([10, 17], див. також [3], с.338) класи мероморфних функцій з розділеними нулями і полюсами. Нагадаємо це означення, причому, обмежимося лише випадком цілих функцій. Нехай $f(z)$ — ціла функція з нулями $\mathcal{Z} = \{a_j\}$, $f(0) = 1$, $p \in \mathbb{N}$, $\eta \in [0, \pi/2p)$ і $S_p(\eta) = \bigcup_{\nu=0}^{p-1} \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r \geq 0, \left| \theta - \frac{2\nu}{p}\pi \right| \leq \eta \right\}$. Якщо виконується $\sum_{a_j \notin S_p(\eta)} |a_j|^{-p} < +\infty$, то говорять, що нулі у функції $f(z)$ (p, η) -розділені.

Виконуються такі твердження

Теорема А ([3], с.338). Якщо у цілої функції $f(z)$, $f(0) = 1$, нулі (p, η) -розділені, то існує границя $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-p} T(r, f)$, скінченна або нескінченна.

Наслідок В ([3], с.338, с.341). Нехай нулі $f(z)$, $f(0) = 1$, (p, η) -розділені. Тоді:

- i) якщо $\mu[T] < p$, то $\rho[T] \leq p$;
- ii) якщо $\liminf_{r \rightarrow +\infty} r^{-p} T(r, f) < +\infty$, то $p \int_0^{+\infty} t^{-p-1} n(t, f) dt = \sum_{j=1}^{+\infty} |a_j|^{-p} < +\infty$;
- iii) якщо $\int_0^{+\infty} t^{-p-1} n(t, f) dt = +\infty$, то $r^p = o(T(r, f))$, $r \rightarrow +\infty$.

Наслідок С ([3], с.342). Нехай $f(z)$ — ціла функція скінченного нижнього порядку $\mu[T]$ з додатними нулями. Тоді ріст $f(z)$ не вищий від мінімального типу порядку $E(\mu[T]) + 1$. Якщо $\mu[T]$ натуральне число, то існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-\mu[T]} T(r, f)$. Принаймні завжди числа $\rho[T]$ і $\mu[T]$ належать до одного відрізка $[l - 1, l]$, $l \in \mathbb{N}$. Тут $E(x)$ — ціла частина числа x .

Оскільки з умови (9) негайно випливають нерівності

$$\sum_{|a_j| \leq r, a_j \in D_p(\eta)} 1 \geq \frac{2 + \sin(p\varepsilon)}{2(1 + \sin(p\varepsilon))} n(r, \mathcal{Z}) \geq \frac{3}{4} n(r, \mathcal{Z}),$$

то за очевидних змін у доведеннях з [10] отримуємо, що всі наведені вище результати А. А. Гольдберга є правильними і для цілих функцій з асиметрично розподіленими нулями. Крім того, отримуємо наступне твердження.

Лема 4. Нехай $f(z)$ — ціла функція, нулі $\mathcal{Z}(f) = \{a_j\}$ якої (p, η, ε) -асиметрично розподілені при деяких $p \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2p}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2p} - \varepsilon$, $f(0) = 1$. Тоді для всіх $r > 0$, $k \in \{1, 2, \dots, p\}$

$$|l_k(r, f)| \geq \frac{1}{2} \sin(p\varepsilon) \int_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n(t, f)}{t} dt + r^k \operatorname{Re} \gamma_k.$$

Твердження цієї леми негайно випливає з співвідношень (7), (10) і елементарної нерівності $|l_k(r, f)| \geq \operatorname{Re} l_k(r, f)$.

2. Основні результати. Спочатку зауважимо, що довільна послідовність додатних чисел $\mathcal{Z} = \{a_j\}$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j = +\infty \in (p, \eta, \varepsilon)$ -асиметрично розподіленою для довільних $p \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2p}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2p} - \varepsilon$. При цьому, $n_k(r, \mathcal{Z}) = n(r, \mathcal{Z})$ для всіх $r > 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому вартий уваги такий екстремальний випадок, який розглянемо в наступному твердженні.

Теорема 1. Нехай $\mathcal{Z} = \{a_j\}$ — довільна послідовність додатних чисел роду $q - 1$, $q \in \mathbb{N}$,

$$f(z) = e^{P(z)} \Pi(z), \quad (12)$$

де $\Pi(z) = \prod_{j=1}^{+\infty} E\left(\frac{z}{a_j}, q - 1\right)$ — канонічний добуток Вейерштраса роду $q - 1$, а $P(z) = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_q z^q$, $\{\gamma_1, \dots, \gamma_q\} \subset \mathbb{C}$. Тоді $T(r, f)$ та $\log M(r, f)$ є функціями помірнього зростання і справедливі наступні співвідношення:

1^о якщо $\gamma_q = 0$, то

$$q - 1 \leq \mu_*[T] \leq \rho^*[T] \leq q, \quad (13)$$

$$q - 1 \leq \mu_*[\log M] \leq \rho^*[\log M] \leq q; \quad (14)$$

2^о якщо $\gamma_q \neq 0$, то при $r \rightarrow +\infty$

$$T(r, f) \sim \frac{|\gamma_q|}{\pi} r^q, \quad \log M(r, f) \sim |\gamma_q| r^q. \quad (15)$$

Доведення. Випадок $\gamma_q = 0$. З нерівності (1), зображення (12), оцінки канонічного добутку Вейерштраса $\Pi(z)$ роду $q - 1$ ([18], с.53, [3], с.78) і першого співвідношення з (4) випливає, що при $r \rightarrow +\infty$

$$T(r, f) \leq \log M(r, f) \leq (C_q + o(1))\lambda(r) \leq (C_q + 1)\lambda(r), \quad (16)$$

де C_q — деяка додатна стала, а $\lambda(r)$ — функція зростання Бореля-Валірона (3).

Зауважимо (див. [2]), що для канонічного добутку Вейерштраса $\Pi(z)$ коефіцієнти α_k розвинення $\log \Pi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k z^k$ в околі точки $z = 0$ обчислюються за формулами $\alpha_k = 0$ для $1 \leq k \leq q - 1$ і $\alpha_k = -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{-k}$ для $k \geq q$. Тоді, з огляду на (12) та (7), для всіх $r > 0$ маємо

$$l_k(r, f) = \gamma_k r^k + r^k \int_0^r \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^{k+1}} dt, \quad 1 \leq k \leq q - 1;$$

$$l_k(r, f) = -\frac{1}{k} \sum_{a_j > r} \left(\frac{r}{a_j} \right)^k - \frac{1}{k} n(r, \mathcal{Z}) = -r^k \int_r^{+\infty} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^{k+1}} dt, \quad q \leq k.$$

З цих рівностей, першого співвідношення з (4), леми 2 і нерівності $|l_{q-1}(r, f)| \geq r^{q-1} \int_0^r t^{-q} n(t, \mathcal{Z}) dt - |\gamma_{q-1}| r^{q-1}$ для достатньо великих r випливає

$$\frac{1}{2} \lambda(r) \leq (1 + o(1)) \lambda(r) \leq |l_{q-1}(r, f)| + |l_q(r, f)| \leq 8T(r, f) \leq 8 \log M(r, f),$$

тобто

$$\log M(r, f) \geq T(r, f) \geq \frac{1}{16} \lambda(r). \quad (17)$$

Враховуючи (16) та (17), для всіх $A > 1$ і достатньо великих r отримуємо

$$\log T(Ar, f) - \log T(r, f) \leq \log \lambda(Ar) - \log \lambda(r) + B_1,$$

а також $\log T(Ar, f) - \log T(r, f) \geq \log \lambda(Ar) - \log \lambda(r) + B_2$, де B_1, B_2 — деякі сталі. Отже, для всіх достатньо великих A і r

$$\frac{\log T(Ar, f) - \log T(r, f)}{\log A} = \frac{\log \lambda(Ar) - \log \lambda(r)}{\log A} + o(1).$$

З останнього співвідношення за лемою 1 отримуємо (13). Так само отримуємо й співвідношення (14).

Випадок $\gamma_q \neq 0$. Оскільки $l_{q-1}(r, \Pi) = r^{q-1} \int_0^r \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^q} dt$, $l_q(r, \Pi) = -r^q \int_r^{+\infty} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt$, то з леми 2 і оцінки канонічного добутку Вейєрштраса роду $q-1$ негайно випливає, що

$$\frac{1}{8} \lambda(r) \leq \frac{1}{8} (l_{q-1}(r, \Pi) + |l_q(r, \Pi)|) \leq T(r, \Pi) \leq \log M(r, \Pi) \leq C_q \lambda(r).$$

Звідси, з огляду на друге співвідношення з (4), при $r \rightarrow +\infty$ отримуємо

$$T(r, \Pi) = o(r^q), \quad \log M(r, \Pi) = o(r^q).$$

Подальші викладки елементарні і ми їх не наводимо.

І, нарешті, беручи до уваги співвідношення (13)–(15) та (2), робимо висновок, що характеристики $T(r, f)$ і $\log M(r, f)$ мають помірне зростання, що завершує доведення теореми 1. $\square$

Правильною є така теорема.

Теорема 2. Нехай $f(z)$ — ціла функція з (p, η, ε) -асиметрично розподіленими нулями $\mathcal{Z}(f) = \{a_j\}$ при деяких $p \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2p}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2p} - \varepsilon$, $f(0) = 1$. Нехай, крім того, послідовність нулів $\mathcal{Z}(f)$ має скінченний рід $q-1$, $q \in \mathbb{N}$ та $f(z) = e^{P(z)} \Pi(z)$, де $\Pi(z)$ — канонічний добуток Вейєрштраса роду $q-1$, а $P(z) = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_s z^s$, $s = \max\{p, q\}$, $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\} \subset \mathbb{C}$. Тоді справедливі наступні твердження:

1° якщо $q \leq p$ і $\gamma_q = \gamma_{q+1} = \dots = \gamma_p = 0$, то справджуються співвідношення (13) і (14).

2° якщо $q \leq p$ і існують $\nu \in \{q, q+1, \dots, p\}$ такі, що $\gamma_\nu \neq 0$, то

$$T(r, f) \sim \frac{|\gamma_l|}{\pi} r^l, \quad \log M(r, f) \sim |\gamma_l| r^l \quad (r \rightarrow +\infty), \quad (18)$$

де $l = \max\{\nu: \gamma_\nu \neq 0\}$;

3^о якщо $p \leq q - 1$ і $\gamma_q = 0$, то

$$p \leq \mu[f] \leq \rho[f] \leq q, \quad (19)$$

де $\mu[f] := \mu[T] = \mu[\log M]$, $\rho[f] := \rho[T] = \rho[\log M]$;

4^о якщо ж $p \leq q - 1$ і $\gamma_q \neq 0$, то при $r \rightarrow +\infty$ справджуються співвідношення (15).

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $q \leq p$. Нехай $\gamma_q = \gamma_{q+1} = \dots = \gamma_p = 0$. Тоді співвідношення (16) виконуються і в цьому випадку. Далі, оскільки $l_q(r, f) = -r^q \int_r^{+\infty} \frac{n_q(t, \mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt$, то з співвідношення (10) випливає, що

$$|l_q(r, f)| \geq r^q \int_r^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} n_q(t, \mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt \geq \frac{1}{2} \sin(p\varepsilon) r^q \int_r^{+\infty} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt.$$

Звідси та з леми 4 знаходимо $|l_{q-1}(r, f)| + |l_q(r, f)| \geq \frac{1}{2} \sin(p\varepsilon) \lambda(r) + r^{q-1} \operatorname{Re} \gamma_{q-1}$. Тоді за лемою 2, враховуючи перше співвідношення з (4), для достатньо великих r маємо

$$\log M(r, f) \geq T(r, f) \geq \frac{1}{32} \sin(p\varepsilon) \lambda(r).$$

З цих нерівностей та з (16), як і при доведенні теореми 1, отримуємо (13) і (14).

Нехай тепер $l = \max\{\nu: \gamma_\nu \neq 0, \nu \in \{q, q+1, \dots, p\}\}$. Оскільки

$$l_{q-1}(r, \Pi) = r^{q-1} \int_0^r \frac{n_{q-1}(t, \mathcal{Z})}{t^q} dt, \quad l_q(r, \Pi) = -r^q \int_r^{+\infty} \frac{n_q(t, \mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt,$$

то з співвідношення (10) випливає, що $|l_{q-1}(r, \Pi)| + |l_q(r, \Pi)| \geq \frac{1}{2} \sin(p\varepsilon) \lambda(r)$. Звідси, а також з леми 2 і оцінки канонічного добутку Вейєрштрасса роду $q - 1$, в свою чергу, маємо

$$\frac{1}{16} \sin(p\varepsilon) \lambda(r) \leq T(r, \Pi) \leq \log M(r, \Pi) \leq C_q \lambda(r).$$

Отже, з огляду на друге співвідношення з (4), при $r \rightarrow +\infty$ отримуємо

$$T(r, \Pi) = o(r^q), \quad \log M(r, \Pi) = o(r^q).$$

Тоді з того, що ([19]) $\rho[T] = \max\{\mu[T], \rho[n]\}$, негайно випливає рівність $\mu[T] = \rho[T] = l$, тобто $T(r, f) \sim \frac{|\gamma_l|}{\pi} r^l$, $\log M(r, f) \sim |\gamma_l| r^l$ ($r \rightarrow +\infty$). Отже, ми отримали (18).

Розглянемо тепер випадок $p \leq q - 1$, $\gamma_q = 0$. Зауважимо, що $\int_0^{+\infty} t^{-p-1} n(t, \mathcal{Z}) dt = +\infty$. За лемою 4 для достатньо великих r маємо

$$\begin{aligned} |l_p(r, f)| &\geq \frac{1}{2} \sin(p\varepsilon) r^p \int_0^r \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^{p+1}} dt + r^p \operatorname{Re} \gamma_p = \\ &= r^p \int_0^r \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^{p+1}} dt \left(\frac{1}{2} \sin(p\varepsilon) + \frac{\operatorname{Re} \gamma_p}{\int_0^r t^{-p-1} n(t, \mathcal{Z}) dt} \right) \geq \frac{1}{4} \sin(p\varepsilon) r^p \int_0^r \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^{p+1}} dt. \end{aligned}$$

Тому, з огляду на співвідношення (8), при $r \rightarrow +\infty$

$$\log M(r, f) \geq T(r, f) \geq \frac{1}{16} \sin(p\varepsilon) r^p \int_0^r \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^{p+1}} dt \geq r^p.$$

З цієї нерівності, означення нижнього порядку та з (1) випливає, що $\mu[f] = \mu[\log M] = \mu[T] \geq p$, тобто отримуємо (19), оскільки співвідношення $\rho[f] = \rho[\log M] = \rho[T] \leq q$ є очевидними.

І, нарешті, нехай $p \leq q - 1$ і $\gamma_q \neq 0$. У цьому випадку необхідне твердження легко випливає з того, що $T(r, \Pi) \leq \log M(r, \Pi) \leq C_q \lambda(r) = o(r^q)$ ($r \rightarrow +\infty$). $\square$

3. Завершальні зауваження.

- i) Твердження пунктів 1^о, 2^о та 4^о теореми 2 разом з твердженням (2) гарантують помірність зростання характеристик $T(r, f)$ і $\log M(r, f)$ цілих функцій f у цих випадках.
- ii) З тверджень пункту iii) наслідку В, другого співвідношення з (4) та нерівностей (19) випливає, що функція f , яка задовольняє умови пункту 3^о теореми 2, має щонайменше максимальний тип при нижньому порядку p і щонайбільше мінімальний тип при порядку q . Питання про помірність зростання характеристик $T(r, f)$ та $\log M(r, f)$ у цьому випадку залишається відкритим.
- iii) Теорема 1 дозволяє уточнити такий результат (Abi-Khuzam F. F. [12]).

Теорема (Abi-Khuzam F. F.). Нехай $f(z)$ — ціла функція скінченного нецілого порядку $\rho[f]$ і нижнього порядку $\mu[f]$ з нулями $\mathcal{Z}(f) = \{a_j\}$. Якщо $\rho[f] - \mu[f] > 1$, то існують стала $\gamma \in (0, 1)$ і зростаюча до $+\infty$ послідовність $\{x_n\}$ такі, що

$$T(r, f) \leq T(r, \Pi_f), \quad x_n^\gamma \leq r \leq x_n,$$

де Π_f — канонічний добуток з нулями $\mathcal{Z}(\Pi_f) = \{-|a_j|\}$.

Теорема 3. Нехай $\mathcal{Z} = \{a_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ довільна послідовність роду $q-1$, $q \geq 2$ така, що ціла функція $f(z) = e^{P(z)} \prod_{j=1}^{+\infty} E\left(\frac{z}{a_j}, q-1\right)$, де $P(z) = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_q z^q$, $\{\gamma_1, \dots, \gamma_q\} \subset \mathbb{C}$, має нижній порядок $\mu[f] < q-1$ і порядок $\rho[f] \in [q-1, q]$. Нехай також $F(z) = e^{Q(z)} \prod_{j=1}^{+\infty} E\left(\frac{z}{|a_j|}, q-1\right)$, де $Q(z) = |\gamma_1|z + |\gamma_2|z^2 + \dots + |\gamma_q|z^q$. Тоді існують стала $\gamma \in (0, 1)$ і зростаюча до $+\infty$ послідовність $\{x_n\}$ такі, що

$$T(r, f) \leq T(r, F), \quad x_n^\gamma \leq r \leq x_n. \quad (22)$$

Для доведення теореми 3 нам буде потрібна така лема з [20] (див. також [19]).

Лема (Whittaker J. M.). Нехай $\phi(r)$ — додатна зростаюча функція така, що

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \log \phi(r) / \log r = \alpha \quad (0 \leq \alpha < +\infty).$$

Тоді для кожної пари чисел β, γ таких, що $\alpha < \beta$, $\alpha/\beta < \gamma < 1$, існує зростаюча до $+\infty$ послідовність (x_n) така, що $\phi(r) \leq r^\beta$ ($x_n^\gamma \leq r \leq x_n$).

Доведення теореми 3. Спочатку зауважимо, що $\gamma_q = 0$, бо у протилежному випадку $\mu[f] = \rho[f] = q$. За теоремою 1 для функції $F(z)$ маємо $q-1 \leq \mu_*[F] \leq \mu[F] \leq \rho[F] \leq \rho^*[F] \leq q$. Отже, $\mu[f] < \mu[F]$. Виберемо $\delta > 0$ таке, що $\mu[f] < \mu[F] - \delta$ і γ таке, що $\mu[f]/(\mu[F] - \delta) < \gamma < 1$. За лемою Уїттекера ($\phi(r) = T(r, f)$, $\alpha = \mu[f]$, $\beta = \mu[F] - \delta$) існує послідовність $\{x_n\}$, $x_n \uparrow +\infty$ така, що $T(r, f) \leq r^{\mu[F]-\delta}$, $x_n^\gamma \leq r \leq x_n$. Оскільки $T(r, F) \geq r^{\mu[F]-\delta}$ для всіх достатньо великих r , то отримуємо нерівність (22). $\square$

Очевидно, що співвідношення подібне до співвідношення (22) виконується і для $\log M(r, f)$, де f ціла функція f , яка задовольняє умови теореми 3. Відзначимо, що для мероморфних функцій порядку меншого за одиницю більш загальні співвідношення, зокрема, й нерівність типу (22) для всіх $r > 0$, вперше встановив А. А. Гольдберг ([21], див. також [18], гл. 4, § 4. 5).

ЛІТЕРАТУРА

1. Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В. *Целые и мероморфные функции* // Итоги науки и техники. ВИНТИ. – 1991. – Т. 85. – С. 5–185.
2. Miles J. *A Fourier series method in value distribution theory* // Fourier Series Methods in Complex Analysis (Mekrijärvi, 2005). Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. – 2006. – V. 10. – P. 129–158.
3. Гольдберг А. А., Островский И. В. *Распределение значений мероморфных функций*. – М.: Наука, 1970. – 591 с.
4. Rubel L. A. *Entire and meromorphic functions*. – New York: Springer, 1996. – 200 p.
5. Кондратюк А. А. *Ряды Фурье и мероморфные функции*. – Львов: Вища школа, 1988. – 195 с.
6. Калинець Р. З., Кондратюк А. А. *Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0, 2\pi]$ -метриці* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №7. – С. 889–896.
7. Васильків Я. В. *Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$ -метриці. I* // Mat. Stud. – 1999. – Т. 12, №1. – С. 37–58.
8. Drasin D., Shea D. F. *Polya peaks and the oscillation of positive functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 34, №2. – P. 403–411.
9. Edrei A. *Sums of deficiencies of meromorphic functions* // J. Anal. Math. – 1965. – V. 14. – P. 79–107.
10. Гольдберг А. А. *О мероморфных функциях с разделенными нулями и полюсами* // Изв. вузов. Матем. – 1960. – № 4. – С. 67–72.
11. Edrei A., Fuchs W. H. J., Hellerstein S. *Radial distribution and deficiencies of the values of a meromorphic functions* // Pacific J. Math. – 1961. – V. 11. – P. 135–151.
12. Abi-Khuzam F. F. *The order of entire functions with radially distributed zeros* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 82, № 1. – P. 71–75.
13. Steinmetz N. *On the order and lower order of entire functions with radially distributed zeros* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 87, № 3. – P. 449–452.
14. Ozawa M. *On the growth of meromorphic functions* // Kodai Math. J. – 1983. – V. 6. – P. 250–260.
15. Miles J. *On growth of meromorphic functions with radially distributed zeros and poles* // Pacif. J. Math. – 1986. – V. 122, № 1. – P. 147–167.
16. Глейзер Е. В. *О росте целых функций с нулями на системе лучей* // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38, № 3. – С. 297–302.
17. Гольдберг А. А. *О распределении значений мероморфных функций с разделенными нулями и полюсами* // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 37, № 5. – С. 1030–1033.
18. Хейман У. К. *Мероморфные функции*. – М.: Мир, 1966. – 287 с.
19. Whittaker J. M. *Entire functions of irregular growth take every value* // Bull. London Math. Soc. – 1972. – V. 4. – P. 130–132.
20. Whittaker J. M. *The lower order of integral functions* // J. London Math. Soc. – 1933. – V. 8. – P. 20–27.
21. Гольдберг А. А. *Про одну нерівність, зв'язану з функціями, опуклими відносно логарифма* // Доп. АН УРСР. – 1957. – № 3. – С. 227–230.

Львівський національний університет імені Івана Франка
 Національний університет "Львівська Політехніка"

Надійшло 7.05.2008