УДК 512.54

Я. В. Лавренюк, В. І. Сущанський

ЛОКАЛЬНО СКІНЧЕННІ ГРУПИ АСОЦІЙОВАНІ З ДІАГРАМАМИ БРАТТЕЛІ

Ya. V. Lavrenyuk, V. I. Sushchansky. *Locally finite groups associated with of the Bratteli diagrams*, Mat. Stud. **31** (2009), 3–11.

We associate a locally finite group with a Bratteli diagram in a natural way. The normal structure of such groups is studied. A criterion of simplicity is proved, examples of groups of such type are considered.

Я. В. Лавренюк, В. И. Сущанский. *Локально конечные группы ассоциированные с диаграммами Браттели* // Мат. Студiї. – 2009. – Т.31, №1. – С.3–11.

С каждой диаграммой Браттели естественным образом связывается локально конечная группа. Изучается нормальное строение таких групп. Доказан критерий простоты, рассмотрены конкретные примеры групп такого типа.

1. Вступ. Клас зліченних локально скінченних груп є в певному сенсі "найближчим" до класу скінченних груп. Саме тому багато задач, які природно виникли стосовно скінченних груп пізніше розглядаються для груп зліченних і локально скінченних. Зокрема, після завершення класифікації скінченних простих груп природно перейти до дослідження проблеми класифікації зліченних локально скінченних груп. Складність проблеми полягає в тому, що:

а) зростаючі ланцюги скінченних простих груп не піддаються класифікації;

б) існують локально скінченні зліченні прості групи, які не є об'єднанням зростаючих ланцюгів скінченних простих груп.

В [9] здійснено грубу класифікацію всіх локально скінченних простих груп. Згідно з встановленим у цій праці, кожна локально скінченна проста група є або фінітарною групою матриць над локально скінченним полем або так званою групою знакозмінного типу чи групою p-типу.

З точки зору класифікації найменш вивченими є групи знакозмінного типу. Цей клас груп в свою чергу ділиться на два підкласи, а саме, групи 1-типу та групи $\infty-$ типу. У статтях [6, 7] було введено класи LDA та LA локально скінченних груп. Клас простих LDA-груп є природним підкласом простих локально скінченних груп 1-типу. Означення цих класів груп наводимо в розділі 2.

Головна мета цієї статті — дослідження LDA-груп, за допомогою їх зв'язків через діаграми Браттелі з апроксимативно скінченновимірними C^*-алгебрами. У статті [5] за допомогою техніки діаграм Браттелі здійснено класифікацію великого підкласу LDA-груп, в який, зокрема, потрапляють всі прості LDA-групи. У даній статті ми вивчаємо

2000 *Mathematics Subject Classification:* 05C25, 20F50.
Keywords: locally finite group, Bratteli diagram, normal structure
doi:10.30970/ms.31.1.3-11

© Я. В. Лавренюк, В. І. Сущанський, 2009

нормальну будову LDA-груп, даємо критерій простоти для таких груп, а також обговорюємо кілька конкретних прикладів LDA-груп.

2. Базові означення.

2.1. Прості локально скінченні групи. Нагадаємо необхідні визначення і факти стосовно простих локально скінченних груп.

Група G є *фінітарно лінійною*, якщо для деякого локально скінченного поля K існує такий точний KG-модуль V, що підпростір нерухомих точок кожного з її елементів має скінченний ковимір у V.

Множина пар $\{(H_i, M_i) \mid i \in I\}$ називається *покриттям Кегеля* для локально скінченної групи G якщо, для всіх $i \in I$, H_i — скінченна підгрупа G, M_i — максимальна нормальна підгрупа H_i, а також для кожної скінченної підгрупи H групи G існує $i \in I$ таке, що $H \leq H_i$ та $H \cap M_i = 1$. Групи H_i/M_i, $i \in I$, називаються *факторами* покриття Кегеля. Кожна проста локально скінченна група має покриття Кегеля (див. [4]). Коли G — зліченна, то підгрупи H_i можна вибрати так, що вони утворюватимуть зростаючий ланцюг $H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots$ з $H_i \cap M_{i+1} = 1$ для всіх i. Покриття Кегеля такого вигляду називається *послідовністю Кегеля.*

Кажуть, що не фінітарна локально скінченна проста група G є:

- *знакозмінного типу*, якщо вона має покриття Кегеля, всі фактори якого — знакозмінні групи;
- 1-*типу*, якщо кожне покриття Кегеля групи G має фактор, який є знакозмінною групою;
- ∞-*типу*, якщо для довільного класу $\mathcal{G}$ скінченних простих груп, такого що кожна скінченна група може бути ізоморфно занурена в деяку групу з $\mathcal{G}$, існує покриття Кегеля групи G, всі фактори якого — ізоморфні групам з $\mathcal{G}$.
- p-*типу* (p — просте), якщо кожне покриття Кегеля групи G має фактор, який ізоморфний до класичної лінійної групи, визначеної над полем характеристики p.

У. Меєрфранкенфельд та С. Делкруа (див. [3]) довели, що кожна локально скінченна проста група належить точно до одного з класів: фінітарних груп, груп 1-типу, груп p-типу для єдиного простого p чи груп ∞-типу.

Нагадаємо, що прямою сумою груп підстановок (G, X) та (H, Y), $X \cap Y = \varnothing$ називається група підстановок $G \oplus H = (G \times H, X \cup Y)$, з такою дією $G \times H$ на $X \cup Y$:

$$z^{(g,h)} = \begin{cases} z^g, & \text{if } z \in X; \\ z^h, & \text{if } z \in Y. \end{cases}$$

Локально скінченна група називається *LDA-групою*, якщо вона ізоморфна до індуктивної границі прямих сум $H_i = A_{i1} \oplus \dots \oplus A_{ir_i}$ ($i \in \mathbb{N}$) знакозмінних груп підстановок $A_{ik} = \mathrm{Alt}(X_{ik})$, із зануреннями, які визначаються тим, що для всіх $i < j$ кожна нетривіальна орбіта довільної групи A_{ik} на будь-якій множині X_{jl} є природною. Якщо у останньому визначенні всі H_i є скінченними знакозмінними групами (тобто всі $r_i = 1$), то індуктивна границя називається *LA-групою.*

2.2. Основні конструкції. Спочатку нагадаємо поняття діаграми Браттелі. Ми будемо використовувати ті ж позначення, що і в [5].

2.3. Діаграми Браттелі. Діаграма Браттелі $\mathsf{B} = (\{V_i\}_{i\geq 0}, \{E_i\}_{i\geq 1}, \mathsf{s}, \mathsf{r}, d)$ визначається таким набором даних:

- множина *вершин* $V = V(\mathsf{B})$ з розбиттям на диз'юнктне об'єднання *рівнів* $V = \bigsqcup_{i\geq 0} V_i$;
- множина *ребер*, чи *стрілок* $E = E(\mathsf{B})$ з розбиттям на диз'юнктне об'єднання $E = \bigsqcup_{i\geq 1} E_i$;
- відображення *фіксації початку* та *кінця* $\mathsf{s}\colon E_i \longrightarrow V_{i-1}$ і $\mathsf{r} : E_i \longrightarrow V_i$, якщо $e \in E$ — ребро, то $\mathsf{s}(e)$ — його *початок* і $\mathsf{r}(e)$ — його *кінець*;
- функція *етикетування* $d : V \longrightarrow \mathbb{N}\setminus\{0\}$ вершин додатними цілими числами.

Також повинні виконуватися дві додаткові вимоги. По-перше, кожна вершина мусить бути початком якогось ребра, і, по-друге, для кожної вершини $v \in V$ повинна виконуватися нерівність

$$d(v) \geq \sum_{\mathsf{r}(e)=v} d(\mathsf{s}(e)). \tag{1}$$

Подібно до [2] позначатимемо вершини з V парою цілих чисел (s, j), де s — номер рівня, до якого належить вершина, а j — номер вершини в V_p (вважаємо, що вершини з V_p занумеровані послідовними натуральними числами, починаючи від 1). Для зручності покладемо, що $|V_0| = 1$ і $d((0, 1)) = 1$. Єдину вершину $(0, 1)$ нульового рівня називатимемо *коренем*. *Кінцем* діаграми B називатимемо довільний нескінченний шлях вздовж стрілок в B, який починається в будь-якій вершині (s, i), де або $s = 0$ або (s, i) не є кінцем жодної стрілки. Казатимемо, що $w \in V_j$ *лежить під* вершиною $v \in V_i$ $(w \prec v)$, якщо з вершини v існує шлях вздовж стрілок до вершини w, тобто, якщо $i < j$ і обидві вершини v та w лежать на одному кінці. Ми позначатимемо через $\partial\mathsf{B}$ границю діаграми B, тобто множину всіх кінців B.

На $\partial\mathsf{B}$ можна ввести природну ультраметрику, поклавши $\rho(\gamma_1, \gamma_2) = 1/(n+1)$, де n — довжина найбільшого спільного шляху, починаючи із спільного початку обох кінців γ_1 та γ_2. Якщо в кінців нема спільного початку, то відстань між ними вважається рівною 1.

Топологія, індукована метрикою ρ є локально компактною і цілком незв'язною.

За діаграмою Браттелі $\mathsf{B} = (\{V_i\}_{i\geq 0}, \{E_i\}_{i\geq 1}, \mathsf{s}, \mathsf{r}, d)$ будується послідовність

$$C_{\mathsf{B}} = \langle(\overline{n}^{(s)}, \overline{n}^{(s+1)}, A^{(s)}) \mid s \in \mathbb{N}\cup\{0\}\rangle, \tag{2}$$

причому цілочисельний вектор $\overline{n}^{(s)} = (n_1^{(s)}, \ldots, n_{k(s)}^{(s)})$ визначається рівностями $k(s) = |V_s|, \overline{n}_i^{(s)} = d((s, i))$, а невід'ємна цілочисельна матриця $A^{(s)} = (a_{ij}^{(s)})_{i=1,k(s+1)}^{j=1,k(s)}$ рівностями

$$a_{ij}^{(s)} = \#\{e \in E \mid \mathsf{s}(e) = (s, j),\ \mathsf{r}(e) = (s+1, i)\}. \tag{3}$$

Обмеження, які ми накладали на діаграми Браттелі визначають такі обмеження на послідовності (2):

- кожен стовпчик матриці $A^{(s)}$ містить ненульовий елемент, $s \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,
- $[A \cdot {}^t\overline{n}^{(s)}]_i \leq [\overline{n}^{(s+1)}]_i$, $1 \leq i \leq k(s+1)$, де ${}^t\overline{n}$ — вектор транспонований до $\overline{n}$,
- $k(0) = 1$, $\overline{n}_1^{(0)} = 1$.

Послідовність (2) з такими обмеженнями повністю визначає діаграму Браттелі і називається *послідовністю Браттелі*.

2.3.1. ***LDA*-групи.** Кожній зліченній $LDA(LA)$-групі з природною локальною системою підгруп відповідає деяка послідовність Браттелі. Справді, нехай $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G^{(i)}$ —

LDA-група, де $G^{(s)} = G_1^{(s)} \oplus \ldots \oplus G_{k(s)}^{(s)}$ $(s \in \mathbb{N})$ — пряма сума нетривіальних скінченних знакозмінних груп, тобто $G_k^{(i)} = \mathrm{Alt}(X_k^{(i)})(1 \le i \le k(s))$. Тоді відповідна послідовність Браттелі будується так:

- $n_i^{(s)} = |X_i(s)|$,
- $a_{ij}^{(s)}$ дорівнює кількості нетривіальних орбіт $G_j^{(s)}$ на $X_i^{(s+1)}$.

Зауважимо, що $|X_i^{(s)}| \ge 3$. Тому при вивченні LDA-груп ми будемо розглядати лише діаграми Браттелі, в яких мітки (етикетки) вершин не менші за 3 (за винятком кореня).

Далі ми покажемо, що кожній діаграмі Браттелі природно відповідає єдина (з точністю до ізоморфізму) LDA-група.

Нехай $\mathsf{B} = (\{V_i\}, \{E_i\}, \mathsf{s}, \mathsf{r}, d)$ — діаграма Браттелі, а $C_{\mathsf{B}} = \langle(\overline{n}^{(s)}, \overline{n}^{(s+1)}, A^{(s)}) \mid s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\rangle$ — послідовність, яка їй відповідає.

Виберемо множини $X_l^{(s)}$, де $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \le l \le k(s)$ так, щоб $|X_l^{(s)}| = n_l^{(s)}$ і кожна з множин $X_l^{(s)}$ не перетиналася з іншими. Далі, покладемо

$$X^{(s)} = \bigsqcup_{l=1}^{k(s)} X_l^{(s)},\ G_l^{(s)} = \mathrm{Alt}(X_l^{(s)}) \text{ і } G^{(s)} = \bigoplus_{l=1}^{k(s)} G_l^{(s)}\ (s \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Також визначимо такий мономорфізм $\phi_s : G^{(s)} \to G^{(s+1)}$, щоб кожна нетривіальна орбіта довільного множника $G_j^{(s)}$ на будь-якій множині $X_i^{(s+1)}$ була природною, а їхня кількість дорівнювала числу $a_{ij}^{(s)}$, визначеному рівністю (3). Існування такого мономорфізму забезпечується нерівністю (1). Так визначений мономорфізм ϕ_s називатимемо *d-зануренням з матрицею $A^{(s)}$*. Індуктивна система $\{(G^{(s)}, \phi_s)), s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ визначає деяку LDA-групу.

Твердження 1. *Нехай $C_{\mathsf{B}} = \langle(\overline{n}^{(s)}, \overline{n}^{(s+1)}, A^{(s)}) \mid s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\rangle$ — послідовність Браттелі, $\langle G^{(s)}\rangle$ — відповідна послідовність прямих сум скінченних знакозмінних груп. Нехай також*

$$H_1 = \lim_{s\to\infty}(G^{(s)}, \phi_s) \text{ і } H_2 = \lim_{s\to\infty}(G^{(s)}, \psi_s),$$

де ϕ_s і ψ_s — d-занурення з однією і тією ж матрицею $A^{(s)}$ для кожного невід'ємного цілого s. Тоді групи H_1 та H_2 — ізоморфні.

Доведення. Неважко помітити, що d-занурення мають таку властивість: для довільних двох d-занурень ϕ_s та ψ_s з матрицею $A^{(s)}$ групи $G^{(s)}$ в групу $G^{(s+1)}$ і для кожного α_s з $\bigoplus_{i=1}^{k(s)} \mathrm{Sym}(X_i^{(s)})$ існує такий елемент α_{s+1} з $\bigoplus_{i=1}^{k(s+1)} \mathrm{Sym}(X_i^{(s+1)})$, що для кожного $g \in G^{(s)}$ виконується рівність:

$$\alpha_{s+1}^{-1}\phi_s(g)\alpha_{s+1} = \psi_s(\alpha_s^{-1} g \alpha_s). \tag{4}$$

Тобто, $\alpha_{s+1}^{-1}\phi_s(g)\alpha_{s+1}$ та $\psi_s(\alpha_s^{-1} g \alpha_s)$ визначають одну й ту ж підстановку множини $X^{(s)}$. Оскільки рівність (4) виконується для всіх натуральних s, то за лемою 2.3 з [1] групи H_1 та H_2 — ізоморфні. □

Враховуючи твердження 1, можна дати таке означення.

Означення 1. Індуктивна границя $\lim_{s\to\infty}(G^{(s)}, \phi_s)$, де ϕ_s є d-зануреннями із матрицями $A^{(s)}$ $(s \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, називається *знакозмінною групою діаграми Браттелі* B.

Ми позначатимемо цю групу символом $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$.

3. Нормальна будова. Для діаграми Браттелі B групу $\mathrm{Alt}(\mathsf{B}) = \lim_{s\to\infty}(G^{(s)}, \phi_s)$ природно розглядати як об'єднання зростаючого ланцюга власних підгруп

$$\mathrm{Alt}(\mathsf{B}) = \bigcup_{s=0}^{\infty} G^{(s)}.$$

Лема 1. *Нехай* B *— діаграма Браттелі, а* N *— нормальна підгрупа* $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$. *Якщо існує таке* $g \in N \cap G^{(s)}$, *що* g *діє нетривіально на* $X_i^{(s)}$ *та* $|X_i^{(s)}| > 4$, *то* N *містить* $G_i^{(s)} = \mathrm{Alt}(X_i^{(s)})$.

Доведення. Якщо $g \notin \mathrm{Alt}(X_i^{(s)})$, то існує такий $h \in \mathrm{Alt}(X_i^{(s)})$, що комутатор $[g, h]$ елементів h та g нетривіальний. Тому, в будь-якому випадку або g, або $[g, h]$ міститься в $\mathrm{Alt}(X_i^{(s)}) \cap N$. Оскільки $\mathrm{Alt}(X_i^{(s)})$ є простою групою, то $\mathrm{Alt}(X_i^{(s)}) \subseteq N$. □

Тепер ми можемо описати всі нормальні підгрупи групи $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$. Нормальна будова цієї групи дуже подібна до будови ідеалів AF C^*-алгебри асоційованої з діаграмою B. Подібність "псується" лише коли є мітки 3 та 4, і це відбувається через абелевість та непростоту знакозмінних груп відповідних степенів. В цій частині ми будемо слідувати за К. Девідсоном [2]. Підмножина S множини $V(\mathsf{B})$ називається *направленою*, якщо з того що якась вершина (s, i) належить до S і $(s, i) \succ (s+1, j)$ в B, випливає, що $(s+1, j)$ також належить до S. Підмножина S є *спадковою* якщо з того, що для якоїсь вершини (s, i) з $V(\mathsf{B})$ всі суміжні вершини $(s + 1, j)$ належать до S, випливає, що і сама (s, i) належить до S.

Кінець діаграми Браттелі називатимемо *n-кінцем*, якщо всі вершини, що лежать на цьому кінці, можливо за винятком скінченної кількості, мають мітку n (тобто майже для всіх вершин v з даного кінця $d(v) = n$). Зауважимо, що послідовність міток вершин, які лежать на довільному кінці, є неспадною.

Поставимо у відповідність кожній вершині v з $V(\mathsf{B})$ дві множини: замкнену підмножину $D_v \subset \partial\mathsf{B}$ — множину всіх кінців, що містять v, та підмножину $\overline{D}_v \subset V(\mathsf{B})$ — множину всіх вершин, що лежать під v.

Лема 2. *Нехай* B *така діаграма Браттелі, що* $\partial\mathsf{B}$ *не містить n-кінців. Тоді для довільної вершини* (s, i) *з* $V(\mathsf{B})$ *множина* $\overline{D}_{(s,i)}$ *містить лише скінченну кількість вершин з мітками* n.

Доведення. Нехай $\overline{K_l} \subseteq \overline{D}_{(s,i)} \cap V_l$ — підмножина всіх вершин з мітками n в множині V_l. Розглянемо компактну множину кінців $K_l = \bigcup_{v\in\overline{K_l}} D_v$. Зрозуміло, що $K_{i+1} \supseteq K_{i+2} \supseteq K_{i+3} \supseteq \dots$. За умовою леми перетин $\bigcap_{l>i} K_l$ є порожнім. Тому всі, можливо за винятком скінченної кількості, множини K_l є порожні. Тому, $\overline{D}_{(s,i)}$ містить лише скінченну кількість вершин з мітками n. □

Лема 3. *Нехай* B *— така діаграма Браттелі, що для кожної вершини* (s, i) *множина* $\overline{D}_{(s,i)}$ *містить лише скінченну кількість вершин з мітками, які не перевищують* 4. *Тоді кожна нормальна підгрупа групи* $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$, *що має нетривіальний перетин з підгрупою* $G_i^{(s)}$, *цілком містить цю підгрупу.*

Доведення. Нехай N — нормальна підгрупа групи $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$, що має нетривіальний перетин з $G_i^{(s)}$. Тоді вона має нетривіальний перетин з кожною підгрупою $G_j^{(q)}$ для $(q, j) \in \overline{D}_{(s,i)}$. За умовою леми існує таке натуральне t, $t > s$, що кожна вершина з $V_t \cap \overline{D}_{(s,i)}$ має

мітку більшу за 4. Звідки отримуємо, що $G_l^{(t)} \leq N$ для кожної вершини $(t,l) \in V_t \cap \overline{D}_{(s,i)}$. Отже,

$$G_i^{(s)} \leq \bigoplus_{\{l \ | \ (t,l) \in V_t \cap \overline{D}_{(s,i)}\}} G_l^{(t)} \leq N.$$

□

Теорема 1. *Нехай діаграма Браттелі* B *така, що її границя* $\partial\mathsf{B}$ *не містить* 3- *та* 4-*кінців. Тоді нормальні підгрупи групи* $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ *перебувають в однозначній відповідності з направленими спадковими підмножинами множини* $V(\mathsf{B})$.

Доведення. Нехай N — нормальна підгрупа в $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$. Тоді $N_s = N \cap G^{(s)}$ є нормальною підгрупою групи $G^{(s)} = \bigoplus_{i=1}^{k(s)} G_i^{(s)}$. Крім цього, з лем 2 та 3 випливає, що N_s є прямою сумою деякої підмножини $S_N^{(s)} \subset V_s$ (можливо порожньої) цих же доданків —

$$N_s = \bigoplus_{\{i \ | \ (s,i) \in S_N^{(s)}\}} G_i^{(s)}$$

(нагадаємо, що ми розглядаємо тільки такі діаграми, у яких мітки всіх вершин не менші за 3, тобто діаграми, для яких всі $G_i^{(s)}$ нетривіальні).

Розглянемо підмножину вершин $S_N \subseteq V(\mathsf{B})$, яка є об'єднанням по всіх невід'ємних цілих s множин $S_N^{(s)}$

$$S_N = \bigcup_{s \geq 0} S_N^{(s)}.$$

Оскільки послідовність груп N_s однозначно визначає N, то група N однозначно відновлюється за множиною S_N.

Доведемо, що множина S_N є направленою. Якщо $G_i^{(s)}$ міститься в N_s, то з $(s,i) \succ (s+1,j)$ відразу за лемою 1 отримуємо, що перетин $N \cap G_j^{(s+1)}$ є непорожнім. Тому N містить $G_j^{(s+1)}$ і, отже, $(s+1,j)$ належить до S_N.

Тепер встановимо, що множина S_N є спадковою. Припустимо, що $(s+1,j)$ належить до S_N для всіх j з множини $J := \{j : (s,i) \succ (s+1,j) \text{ в } \mathsf{B}\}$. Тоді, оскільки $\phi_s(G_i^{(s)}) \subset \bigoplus_{j \in J} G_j^{(s+1)} \subset N$, то (s,i) також належить до S_N.

З іншого боку, нехай S_N спрямована і спадкова підмножина $V(\mathsf{B})$. Визначимо послідовність підгруп N_s груп $G^{(s)}$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, так

$$N_s = \bigoplus_{\{i \ | \ (s,i) \in S_N \cap V_s)\}} G_i^{(s)}.$$

Оскільки S спрямована, то ця послідовність є зростаючим ланцюгом підгруп в $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$. Об'єднання цих підгруп N є нормальною підгрупою групи $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$, бо кожна підгрупа N_s нормальна в $G^{(s)}$. Спадковість множини S_N означає, що $N_s = G^{(s)} \cap N_{s+1}$, звідки, $N_s = G^{(s)} \cap N$. Тому це та ж послідовність, яка пов'язувалася з N в першій частині доведення. Отже, множина S_N канонічним способом пов'язується з N. □

Зазначимо, що якщо множина S_N відповідає нормальній підгрупі N, то $(s,i) \in S$ тоді і лише тоді, коли $G_i^{(s)} \leq N$. Порожня множина може відповідати нетривіальній нормальній підгрупі, лише коли в діаграмі є 3- або 4-кінці.

Казатимемо, що діаграма Браттелі *проста*, якщо для кожної вершини $v \in V(\mathsf{B})$ і кожного кінця δ існує вершина w з δ, яка лежить під v.

Теорема 2. *Наступні умови рівносильні:* (i) *Діаграма Браттелі* B *проста.*
(ii) *Група* $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ *проста або ізоморфна до* Alt_4.

Доведення. Нехай діаграма B проста. Легко бачити, що у цьому випадку $\partial\mathsf{B}$ може мати лише скінченну кількість n-кінців. Причому, якщо в $\partial\mathsf{B}$ є такі кінці, то всі вони є n-кінцями для одного й того ж $n \in \mathbb{N}$, і, тим паче, їхні попарні симетричні різниці є скінченними множинами. Справді, у цьому випадку існує нескінченний шлях $(s, i_0) \succ (s+1, i_1) \succ (s+2, i_2) \succ \ldots$ з $d((s+l, i_l)) = n$ для $l \geq 0$. Оскільки B проста, то $V_{s+l} = \{(s+l, i_l)\}$ для всіх l, починаючи з деякого номера. При цьому $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ ізоморфна з Alt_n і твердження теореми правильне. Тому надалі, вважатимемо, що $\partial\mathsf{B}$ не має жодного n-кінця.

Оскільки кожна нетривіальна нормальна підгрупа N має нетривіальний перетин з деякою групою $G^{(s)}$, то деяка вершина (s, i) міститься в S_N. Ми хочемо довести, що (q, j) міститься в S_N для кожної вершини (q, j) з $V(\mathsf{B})$. Нескладно помітити, що $D_{(q,j)}$ є компактною підмножиною $\partial\mathsf{B}$ для довільної вершини (q, j). А тому, враховуючи також направленість S_N та простоту B, одержимо, що існує таке натуральне t, що для кожного l з умови $(t, l) \in \overline{D}_{(q,j)}$ випливає, що S_N містить (t, l). Звідси і зі спадковості S_N випливає, що (q, j) міститься в S_N. Отже, S_N збігається з $V(\mathsf{B})$, а N — з $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$.

З іншого боку, припустимо, що B не є простою. Тоді існує така вершина (s, i), що для довільного кінця δ будь-яка вершина w з δ не лежить під (s, i). Розглянемо направлену підмножину S' множини $V(\mathsf{B})$, яка породжується (s, i). Перетини $S' \cap V_s$, є власними підмножинами V_s для всіх достатньо великих натуральних s. Збільшимо S' до найменшої направленої і спадкової множини S, що містить (s, i). Множина S залишиться власною підмножиною $V(\mathsf{B})$, бо як і S' не може містити жодної вершини з δ. Тому S відповідає власній нормальній підгрупі і, тому, $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ є нетривіальною і не простою. Якщо $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ — скінченна, то вона є нетривіальним прямим добутком скінченних знакозмінних груп, і тому не може бути ізоморфною з Alt_4. □

4. Деякі приклади.

4.1. Групи, що визначаються рекурентними послідовностями. Розглянемо клас *однорідних* діаграм Браттелі, для яких виконуються дві додаткові умови при $s \geq 1$:

- число $|V_s|$ не залежить від вибору s і більше від 1;
- ${}^t\overline{n}^{(s+1)} = A^{(s)} \cdot {}^t\overline{n}^{(s)}$.

Твердження 2. *Нехай* B *— однорідна діаграма Браттелі. Якщо для довільного натурального s існує таке натуральне $t \geq s$, що матриця $A^{(t)}A^{(t-1)} \ldots A^{(s)}$ є строго позитивною, то група* $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ *є простою групою 1-типу.*

Доведення. З умови твердження випливає, що діаграма B є простою. А тому, за теоремою 2 група $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ є простою. Доведемо тепер, що $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ є групою 1-типу. Для цього спочатку покажемо, що вона містить нефінітарну підгрупу. Нехай B_2 така діаграма, що $|V_s| = 1$, $A^{(s)} = (2)$ для всіх натуральних s. При доведенні твердження 5.3 в [5] було встановлено, що група $\mathrm{Alt}(B_2)$ не є фінітарною. Легко бачити, що $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ містить підгрупу ізоморфну до $\mathrm{Alt}(B_2)$, тому $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ не є фінітарною. Далі, $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ має покриття Кегеля, всі фактори якого знакозмінні групи (див., наприклад, [6]), звідки одержуємо, що ця група є знакозмінного типу. І, нарешті, вона є 1-типу за теоремами 1.2 та 1.4 з [3]. □

Насправді, подібно можна довести і більш загальне твердження: якщо діаграма B така, що $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ є нескінченною простою групою, то або $\mathrm{Alt}(\mathsf{B})$ ізоморфна до нескінченної (фінітарної) знакозмінної групи або є групою 1-типу (див. також [5, Proposition 5.3]).

Розглянемо тепер діаграми Браттелі, що визначаються за допомогою рекурентних послідовностей.

Нехай рекурентну послідовність $\Sigma = \langle c_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ задано рівнянням

$$c_{n+1} = l_m c_n + l_{m-1} c_{n-1} + \ldots + l_1 c_{n-m+1} \tag{5}$$

для $n \geq m$, де всі l_i $(1 \leq i \leq m)$ — невід'ємні цілі, $l_1 l_m \neq 0$ і $m > 1$. Рівняння (5) визначає послідовність Σ при заданих початкових даних — натуральних числах $c_1, \ldots, c_m$. За послідовністю Σ діаграма B_Σ (власне, послідовність C_{B_Σ}) будується так. Покладемо $\overline{n}^{(1)} = (c_1, \ldots, c_m)$,

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(s)} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_1 & l_2 & & \ldots & & l_m \end{pmatrix},$$

${}^t\overline{n}^{(s+1)} = A \cdot {}^t\overline{n}^{(s)}$ для $s \geq 1$. Легко помітити, що $n_1^{(s)}$ є s-тим членом в послідовності Σ, а діаграма B_Σ є однорідною.

Теорема 3. *Нехай Σ — рекурентна послідовність, визначена як вище. Група* $\mathrm{Alt}(\mathsf{B}_\Sigma)$ *має такі властивості:* 1. $\mathrm{Alt}(B_\Sigma)$ *— проста група 1-типу.* 2. *Кожна локальна система* $\mathrm{Alt}(\mathsf{B}_\Sigma)$ *містить непросту скінченну групу.*

Доведення. 1. Оскільки $l_1 l_m \neq 0$, то A^{2m} є строго додатною. Тому, за твердженням 2, група $\mathrm{Alt}(\mathsf{B}_\Sigma)$ є простою групою 1-типу.

2. Достатньо довести, що існує непроста група H_i в послідовності Кегеля групи $\mathrm{Alt}(\mathsf{B}_\Sigma)$. Припустимо, що це не так. З означення групи 1-типу випливає, що ми можемо вважати, що кожна H_i в послідовності Кегеля є скінченною знакозмінною групою. В цьому випадку за твердженням 2.1 з [6] група $\mathrm{Alt}(\mathsf{B}_\Sigma)$ повинна бути LA-групою. Але з іншого боку, $\mathrm{Alt}(\mathsf{B}_\Sigma)$ не є LA-групою — це випливає з теореми 2.1 з [8]. Одержали суперечність. □

Локально скінченна проста група побудована за послідовністю Фібоначчі в [10] є прикладом групи, що визначена рекурентною послідовністю, і задовольняє умови теореми 3.

4.2 Група підстановок Паскаля $\mathrm{Alt}(\mathsf{B}_P)$**.** Визначимо послідовність Браттелі C_{B_P} так: $A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^{(s)}$ — $(s+1) \times (s+2)$-матриця вигляду

$$A^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

${}^t\overline{n}^{(s+1)} = A^{(s)} \cdot {}^t\overline{n}^{(s)}$ для $s \geq 0$. Легко бачити, що $n_i^{(s)}$ дорівнює біномному коефіцієнту C_s^{i-1} для всіх $s \geq 0$ і $1 \leq i \leq s+1$. Тобто, B_P природно пов'язана з трикутником Паскаля. Тому групу $\mathrm{Alt}(\mathsf{B}_P)$ природно називати *групою підстановок Паскаля.*

Розглянемо діаграму B'_P, яка отримується з B_P викиданням вершин з мітками меншими за 3 і стрілок, що починаються в цих вершинах. Очевидно, що $\mathrm{Alt}(\mathsf{B}_P) \simeq \mathrm{Alt}(\mathsf{B}'_P)$.

Також визначимо множину $S_v = \{u \in V(\mathsf{B}'_P) \mid u \preceq v\}$ для кожного $v \in V(\mathsf{B}'_P)$.

Помітимо, що направлені і спадкові підмножини $V(\mathsf{B}'_P)$ — це множини S_v, $v \in V(\mathsf{B}'_P)$. Множина $L = \{S_v \mid v \in V(\mathsf{B}'_P)\}$ є повною дистрибутивною граткою з операціями $\vee$ та $\cap$, де $S_u \vee S_v$ — найменша за включенням множина з L, що містить і S_u, і S_v, та $S_u \cap S_v$ — звичайний перетин множин.

За теоремою 1 отримуємо

Твердження 3. *Нехай діаграми B_P та B'_P такі як означено вище. Тоді:* 1. *Нормальні підгрупи* $\mathrm{Alt}(\mathsf{B}_P)$ *перебувають в однозначній відповідності з вершинами* B'_P. 2. *Гратка нормальних підгруп* $\mathrm{Alt}(C_p)$ *ізоморфна з граткою* $(L, \vee, \cap)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Burns R.G. *A wreath tower construction of countably infinite, locally finite groups* // Math. Zeitschr. – 1968. – B.105. – S.367–386.
2. K.R.Davidson C^*-Algebras by example. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
3. Delcroix St., Meierfrankenfeld U. *Locally finite simple groups of* 1*-type* // J. Algebra. – 2002. – V.247, №2. – P.728–746.
4. Kegel O.H., Wehrfritz B.A.F. Locally finite groups. – North-Holland, Amsterdam-London, 1973.
5. Lavrenyuk Ya., Nekrashevych V. *On classification of inductive limits of direct products of alternating groups* // J. London Math. Soc. – 2007. – V.75, №1. – P.146–162.
6. Leinen F., Puglisi O. *Ideals in group algebras of simple locally finite groups of 1-type* // Pacific J. of Math. – 2002. – V.207, №2. – P.433–445.
7. Leinen F., Puglisi O. *Diagonal limits of of finite alternating groups: confined subgroups, ideals, and positive defined functions* // Illinois J. Math. – 2003. – V.47, №1/2. – P.345–360.
8. Leinen F., Puglisi O. *Some results concerning simple locally finite groups of 1-type* // J. Algebra. – 2005. – V.287. – P.32–51.
9. Meierfrankenfeld U. *Non-finitary locally finite simple groups* // in "Finite and Locally Finite Groups" B. Hartley et al., Eds., Kluwer Academic, Dordrecht, 1995. – P.189–212,
10. Сущанский В.И. *Локально конечная простая группа Фибоначчи* // Вопросы Алгебры. – 1999. – Т.14. – С.107–114.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
ylavrenyuk@.kiev.ua
Сілезьський технологічний університет
Інститут математики
Wital.Suszczanski@polsl.pl

Надійшло 24.12.07