УДК 517.5

Ю. Б. Зелінський

ДЕЯКІ НЕРОЗВ'ЯЗАНІ ПИТАННЯ КОМПЛЕКСНОГО ЛІНІЙНО ОПУКЛОГО АНАЛІЗУ

Yu. B. Zelinskiy. *Some unsolved problems of complex linear convex analysis*, Matematychni Studii, **30** (2008) 195–197.

Twelve unsolved problems related to complex linear convex analysis are formulated.

Ю. Б. Зелинский. *Некоторые нерешенные проблемы комплексного линейного выпуклого анализа* // Математичні Студії. – 2008. – Т.30, №2. – С.195–197.

Формулируются двенадцать нерешенных вопросов, относящихся к комплексному линейному выпуклому анализу.

Поняття лінійної опуклості при $n = 2$ вперше було введено 1935 р. в праці Г. Бенке і Е. Пешля [1] та почало широко використовуватися завдяки працям А. Мартіно та Л. Айзенберга [2,3] з шістдесятих років минулого століття. Лінійно опуклі множини знаходять застосування як у комплексному аналізі так і в питаннях інтегральної геометрії та томографії. На основі цих множин в комплексному аналізі побудовано аналог дійсного опуклого аналізу. Більш детально з елементами лінійно опуклого аналізу можна познайомитися в монографіях [4,5,7] та оглядовій статті [6].

Мета даного повідомлення — звернути увагу на низку цікавих нерозв'язаних задач, які часто дуже просто формулюються, але розв'язок яких, як випливає з бесід автора зі спеціалістами з комплексного аналізу та топології, потребують, мабуть, свіжих ідей.

Далі у статті, якщо не вказане інше, розглядаємо n-вимірний афінний простір $\mathbb{C}^n$ над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$.

Означення 1. Множину $E \subset \mathbb{C}^n$ називають *лінійно опуклою,* якщо для кожної точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus E$ існує комплексна гіперплощина, яка проходить через точку z і не перетинає E.

Питання 1. *Нехай $K \subset \mathbb{C}^n$ є лінійно опуклим компактом з нетривіальною групою когомологій $H^i(K) \neq 0$. Чи вірно, що групи когомологій $H^i(K)$ теж нетривіальні для усіх j $0 < j < i$?*

Для усіх відомих прикладів це справедливо.

Питання 1а (Проблема сфери). *Чи існує лінійно опуклий компакт в $\mathbb{C}^2$, для якого усі групи когомологій збігаються з відповідними групами когомологій двовимірної сфери S^2 ?*

Існування такого компакту було б контрприкладом до питання 1.

Узагальнимо поняття опуклості.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 32A15.

Означення 2. Множину $E \subset \mathbb{R}^n$ в n-вимірному дійсному евклідовому просторі назвемо (n,m)-*опуклою*, якщо для кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ існує m-вимірна площина, яка проходить через точку x і не перетинає E.

Питання 2. Нехай $K \subset \mathbb{R}^n$ — (n,m)-опуклий компакт з нетривіальною групою когомологій $H^i(K) \neq 0$. Чи правильно, що на кожному інтервалі $\left(0; \left[\frac{n}{m}\right]\right]$, $\left(\left[\frac{n}{m}\right]+1; 2\left[\frac{n}{m}\right]\right]$, …, $\left(j\left[\frac{n}{m}\right]+1; i\right]$ існує ціле число l таке, що $H^l(K) \neq 0$, де $[\alpha]$ — ціла частина α, а $(j+1)\left[\frac{n}{m}\right] \geq i$?

Означення 3. Множину $E \subset \mathbb{C}^n$ називають *сильно лінійно опуклою*, якщо для будь-якої комплексної прямої γ переріз $\gamma \cap E$ та доповнення перерізу в поповненій прямій $\overline{\gamma} \setminus \gamma \cap E$ зв'язні ($\overline{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$).

Наступні два запитання пов'язані з компактифікаціями множин. Чи можуть сильно лінійно опуклі області мати внутрішню межу, а сильно лінійно опуклі компакти точки межі, що не належать до замикання внутрішності?

Питання 3. *Нехай $K \subset \mathbb{C}^n$ — сильно лінійно опуклий компакт з непорожньою внутрішністю* $\mathrm{int} K \neq \varnothing$. *Чи правильно, що для замикання* $\overline{\mathrm{int} K} = K$ *при* $n > 1$?

Питання 4. *Нехай $D \subset \mathbb{C}^n$ — обмежена сильно лінійно опукла область. Чи правильно, що* $\overline{\mathrm{int} D} = D$ *при* $n > 1$?

Для необмежених областей та при $n = 1$ це не так.

Питання 5. *Описати лінійно опуклі області (компакти), які можуть бути апроксимовані ззовні (зсередини) лінійно опуклими областями з гладкою, що належить до класу C^2 межею.*

Питання 6. *Нехай $D \subset \mathbb{C}^n$ — обмежена сильно лінійно опукла область з гладкою, що належить до класу C^r межею. Якого класу гладкості буде межа образу проекції D на довільну комплексну пряму ?*

Означення 4. *Спряженою множиною до множини* $E \subset \mathbb{C}^n$ назвемо множину

$$E^* = \{w \mid \langle w, z\rangle \neq 1 \text{ для усіх } z \in E\},$$

де $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ точки в $\mathbb{C}^n$, а $\langle w, z\rangle = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \ldots + w_n z_n$.

Відомо, що лінійна опуклість множини еквівалентна до рівності $(E^*)^* = E$ ([5]).

Питання 7. *Нехай $D \subset \mathbb{C}^n$ — область з гладкою класу C^r межею. Якого класу гладкості буде межа спряженої множини D^* ?*

Питання 8. *Нехай $K \subset \mathbb{C}^n$ є компактом для якого усі перерізи комплексними m-вимірними площинами лінійно опуклі ($m > 1$). Чи буде K лінійно опуклим компактом ?*

Питання 9. *Аналогічне до питання 8 для області $D \subset \mathbb{C}^n$.*

Якщо $m = 1$ відповідь на обидва питання негативна.

Означення 5. Назвемо *лінійно опуклою ((n,m)-опуклою) оболонкою* $\widehat{E}$ множини $E \subset \mathbb{C}^n$ ($E \subset \mathbb{R}^n$) перетин усіх лінійно опуклих ((n,m)-опуклих) множин, які містять множину E.

Питання 10. *Які достатні умови для того, щоб точка $z \in \mathbb{C}^n \setminus E$ ($x \in \mathbb{R}^n \setminus E$) належала до відповідної оболонки ?*

Питання 11. *Нехай $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ($S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$) — сфера радіуса 1. Розглянемо сім'ю $\{B_k\}$ куль з центрами на цій сфері радіуса меншого за одиницю, які попарно не перетинаються. Яка мінімальна кількість куль забезпечить, щоб центр сфери належав до (n,m)-опуклої оболонки множини $\bigcup_k B_k$?*

З результатів статті [8] випливає, що для того щоб центр сфери належав до $(n,n-1)$-опуклої оболонки досить двох куль.

Питання 12. *Нехай $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, перерізи якого дійсними l-вимірними площинами є (l,m)-опуклими ($n > l > m > 0$). Очевидно, що K також є (n,m)-опуклим компактом. Які додаткові умови на l і m забезпечать $(n,m+1)$-опуклість компакту K ?*

Зауважимо, що аналогічні до останнього питання мають позитивну відповідь для ациклічних перерізів компактів ([9,10]), областей ([11]) в дійсному просторі та в комплексному просторі ([12]). (Під *ациклічністю* розуміємо тривіальність усіх груп приведених когомологій розглядуваної множини).

ЛІТЕРАТУРА

1. Behnke H., Peschl E. *Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen* // Math. Ann.– 1935. – Bd. 111, №2. – S. 158–177.
2. Martineau A. *Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes* // Math. Ann. – 1966. – Bd. 163, №1. – S. 62–88.
3. Айзенберг Л. А. *О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби* // Сиб. мат. журн. – 1967. – Т. 8, №5. – С. 1124–1142.
4. Hörmander L. Notions of Convexity. — Boston: Birhäuser Verlag, 2007. – 414 p.
5. Зелинский Ю. Б. Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. Думка, 1993 – 264 с.
6. Знаменский С. В. *Семь задач о $\mathbb{C}$-выпуклости.* Комплексный анализ в современной математике: к 80-летию со дня рождения Б. В. Шабата (редактор-составитель Е. М. Чирка). – М.: ФАЗИС, 2001.- С. 123–132.
7. Andersson M., Passare M., Sigurdsson R. Complex convexity and analytic functionals. – Basel: Birkhäser Verlag, 2004. – 160 p.
8. Худайберганов Г. *Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров* // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. №1772–85Деп.
9. Aumann G. *On a topological caracterization of compact convex point sets* // Ann. Math. – 1936. – Bd. 37, №3. – S. 443–447.
10. Kosiński A. *A theorem on families of acyclic sets and its applications* // Pasif. J. Math. – 1962. – V. 12, №1. – P. 317–325.
11. Щепин Е. В. *Критерий выпуклости открытого множества* // III Тираспольский симпоз. по общ. топологии и ее прилож. – Кишинев: Штиинца, 1973. – С. 146.
12. Зелинский Ю. Б. *О геометрических критериях сильной линейной выпуклости* // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 261, №1. – С. 11–13.

Інститут математики НАН України, Київ
zel@imath.kiev.ua

Надійшло 31.07.2008