УДК 517.53

Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков

ТОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПЛОТНОСТЯМИ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

G. G. Braichev, V. B. Sherstyukov. *Sharp relation between densities of the zeros of entire functions of finite order*, Matematychni Studii, **30** (2008) 183–188.

In a special subclass of entire functions of finite positive order explicit formula for lower and upper densities (for this order) of the zeros of the function via corresponding integrated characteristics are established.

Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков. *Точные соотношения между плотностями нулей целых функций конечного порядка* // Математичні Студії. – 2008. – Т.30, №2. – С.183–188.

В специальном подклассе целых функций конечного положительного порядка установлены явные формулы, выражающие нижнюю и верхнюю плотности (при этом порядке) нулей функции через соответствующие усредненные характеристики.

Статья является продолжением серии совместных работ [1]–[5], в которых систематически изучалась связь между характеристиками роста целых функций и стандартными плотностями распределения их нулей. Результаты исследований подобного рода востребованы в вопросах полноты и базисности функциональных систем, теории интерполяции и аналитического продолжения, в задачах, связанных с разрешимостью дифференциальных уравнений бесконечного порядка и уравнений свертки. В цитированных выше работах нами получен, кроме прочего, ряд соотношений, связывающих обычные плотности последовательности нулей целой функции с аналогичными усредненными характеристиками. В приложении акцент ставился на изучение экстремальных задач в классе целых функций порядка $\rho \in (0;1)$ с нулями, расположенными на одном луче. Истоки возросшего в последнее время интереса к близким экстремальным задачам ([6]–[10]) находим в [11], [12], где, в частности, поставлена открытая до сих пор проблема нахождения точного выражения для радиуса круга полноты системы экспонент с вещественными показателями. Подробнее об этом можно прочесть в недавно вышедших монографии [13] и обзоре [14].

Именно в связи с приложениями важное значение приобретает вопрос об одновременной точности полученных нами ранее оценок. Другими словами, требуется описать (по возможности, наиболее широкий) подкласс функций, в котором справедливы формулы, связывающие между собой как верхнюю, так и нижнюю плотности последовательности нулей с ее усредненными плотностями. Эта задача решается в настоящей заметке с помощью одной новой характеристики, введенной в [3].

Рассматривается последовательность Λ:

$$0 < |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_{n_1}| < |\lambda_{n_1+1}| = \ldots = |\lambda_{n_2}| < \ldots,\ \lambda_n \to \infty,$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 32A15.

нулей целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0;+\infty)$. Пусть $n(t)$ и $N(t)$ — считающая и усредненная считающая функция этой последовательности соответственно: $n(t) := \sum_{|\lambda_n| \le t} 1$, $N(r) := \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$. Распределение нулей $f(z)$ на плоскости описывают величины $\overline{\Delta} := \varlimsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{n(t)}{t^\rho}$, $\underline{\Delta} := \varliminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{n(t)}{t^\rho}$ — верхняя и нижняя ρ-плотности последовательности Λ; $\overline{\Delta}^* := \varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{N(r)}{r^\rho}$, $\underline{\Delta}^* := \varliminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{N(r)}{r^\rho}$ — усредненная верхняя (соответственно нижняя) ρ-плотность Λ. Нетрудно проверить, что характеристики $\underline{\Delta}$ и $\underline{\Delta}^*$, а также $\overline{\Delta}$ и $\overline{\Delta}^*$, могут равняться нулю; принимать конечные положительные значения; обращаться в бесконечность лишь одновременно. Более точные соотношения между $\underline{\Delta}$, $\overline{\Delta}$ и $\underline{\Delta}^*$, $\overline{\Delta}^*$ мы приводим ниже; часть из них давно известна ([15, с.222, 625]), другие получены в последнее время ([16, с.510, 207], [3]):

$$\rho a_1 \overline{\Delta}^* \le \underline{\Delta} \le \rho \underline{\Delta}^*, \quad \rho \widetilde{a}_2 \overline{\Delta}^* \le \overline{\Delta} \le \rho a_2 \overline{\Delta}^*. \tag{1}$$

Здесь a_1 и a_2 — корни уравнения ($\overline{\Delta}^* \in (0;+\infty)$)

$$a \ln \frac{e}{a} = \frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*},\ 0 \le a_4 \le 5 \le a_2 \le e; \tag{2}$$

$\widetilde{a}_2$ — больший корень уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^*},\ 1 \le \widetilde{a}_2 \le a_2, \tag{3}$$

в котором величина $\widetilde{\Delta}$ определяется равенством

$$\widetilde{\Delta} := \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_k}|^\rho}. \tag{4}$$

В дальнейшем существенно используются понятия *индекса лакунарности* последовательности и множества, введенные в [17]. *Индексом лакунарности неубывающей последовательности* $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел называется величина

$$l(r_k) := \varlimsup_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}.$$

Индекс лакунарности неограниченного множества $E \subset \mathbb{R}_+$ определяется как

$$l(E) := \inf \left\{ l(r_k) : r_k \in E, r_k \nearrow +\infty \right\}.$$

Всюду ниже индекс лакунарности $l(|\lambda_n|) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}$ последовательности $|\Lambda| := \{|\lambda_n|\}_{n=1}^\infty$ будем обозначать через l. В [3] установлено, что всегда выполняется $\underline{\Delta}^* = \underset{\sim}{\underline{\Delta}} := \varliminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_k}|^\rho}$, а если $l = 1$, то $\widetilde{\Delta} = \overline{\Delta}^*$. Более общо, при $l \le \exp\left\{\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}}\right\}$ выполняется неравенство $\overline{\Delta}^* \le \dfrac{\widetilde{\Delta} + \overline{\Delta} \ln l}{l^\rho}$. В частности, отсюда следует, что условие существования предела в (4), т.е. $\widetilde{\Delta} = \underline{\Delta}^*$, влечет совпадение уравнений (2) и (3), обеспечивая равенство $\overline{\Delta} = \rho a_2 \overline{\Delta}^*$. Цель статьи — показать, что в этом случае левая часть первого из неравенств (1) также обращается в равенство: $\underline{\Delta} = \rho a_1 \overline{\Delta}^*$. Тем самым, привлекая естественную "дискретную" характеристику $l(|\lambda_n|)$,мы выделяем достаточно широкий подкласс целых функций конечного положительного порядка, в котором справедливы явные формулы для корней уравнения (2), обеспечивающие точные соотношения между обычными и усредненными ρ-плотностями нулей рассматриваемых функций. Этот класс, в частности, содержит функции, последовательность нулей которых имеет ρ-плотность. Нетривиальный пример функции из этого класса приведен в [5]. Отсюда немедленно следует, что решение экстремальной задачи нахождения точной нижней границы $\sigma_{inf}(\underline{\Delta}, \overline{\Delta})$ типов целых функций из указанного класса с $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ и фиксированными величинами $\underline{\Delta}$, $\overline{\Delta}$ $(0 \le \underline{\Delta} \le \overline{\Delta} < +\infty)$ автоматически дает ответ в аналогичной задаче отыскания $\sigma_{inf}(\underline{\Delta}^*, \overline{\Delta}^*)$ с заданными $\underline{\Delta}^*, \overline{\Delta}^*$. По поводу этих и родственных с ними задач см. публикации [7],[8],[4].

Для доказательства основного результата потребуется несколько вспомогательных утверждений. Следуя [16], будем писать $H(r) \in E_\rho$, если функция $H(r)$ положительна, непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{H'(r)}{H(r)} = \rho$. Используем также запись $\varphi \in \{H(r); (t;T)\}$ для характеризации ситуации: $\varliminf\limits_{r\to+\infty} \frac{\varphi(r)}{H(r)} = t$, $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\varphi(r)}{H(r)} = T$. Наконец, при $\varphi \in \{H(r); (t;T)\}$ называем *множество* $E \subset \mathbb{R}_+$ *определяющим* для t, если $\lim\limits_{r\to+\infty, r\in E} \dfrac{\varphi(r)}{H(r)} = \varliminf\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\varphi(r)}{H(r)} = t$.

Теорема А [16, с.212, теорема 3]. *Пусть $\varphi(r)$ — выпуклая функция от $\ln r$, $\rho > 0$ и $h(e^r) \in E_\rho$. Пусть, далее, $\varphi \in \{h(r); (t;T)\}$, E — определяющее множество для t с индексом лакунарности $l(E)$. Тогда справедливо неравенство*

$$T \le t\frac{d}{e\ln d}, \text{ где } d = c^{\frac{1}{c-1}},\ c = (l(E))^\rho.$$

Следствие. *Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка $\rho > 0$, нули которой удовлетворяют условию $\widetilde{\Delta} = \underline{\Delta}^*$, т.е. существует $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_k}|^\rho}$; $l = \varlimsup\limits_{k\to\infty} |\lambda_{n_{k+1}}|/|\lambda_{n_k}|$ — индекс лакунарности последовательности $|\Lambda|$. Тогда*

$$\overline{\Delta}^* \le \underline{\Delta}^* \frac{c^{\frac{1}{c-1}}}{e\ln c^{\frac{1}{c-1}}}, \quad \text{где} \quad c = l^\rho. \tag{5}$$

Замечание. В случае $l = 1$ правая часть неравенства (5) понимается, как обычно, в смысле ее предельного значения, равного $\underline{\Delta}^*$, что превращает (5) в равенство $\overline{\Delta}^* = \underline{\Delta}^*$. Аналогичным образом, при $l = +\infty$ неравенство (5) становится тривиальным: $\overline{\Delta}^* \le +\infty$.

Доказательство следствия. Хорошо известно, что $\varphi(r) := N(r)$ логарифмически выпукла; $H(r) := e^{\rho r} \in E_\rho$. Поэтому при $t = \underline{\Delta}^*$, $T = \overline{\Delta}^*$ и $h(r) = r^\rho$ функция $N(r) \in \{h(r); (t;T)\}$. Далее, условие $\widetilde{\Delta} = \underline{\Delta}^*$, означает, что множество Λ нулей $f(z)$ является определяющим для $t = \underline{\Delta}^*$. Для получения неравенства (5) остается применить теорему А. $\square$

Лемма 1. *Пусть $\theta \in (0;1)$ и a_1, a_2 — корни уравнения $a\ln\frac{e}{a} = \theta$, $0 < a_1 < 1 < a_2 < e$. Тогда найдется $q > 1$, с которым выполняются равенства*

$$a_1 = \theta\frac{q-1}{q\ln q};\ a_2 = \theta\frac{q-1}{\ln q};\ \theta = e\frac{\ln q^{\frac{1}{q-1}}}{q^{\frac{1}{q-1}}}.$$

Доказательство. При $\theta \in (0;1)$, очевидно, $a_2 = qa_1$ с некоторым $q > 1$. Поэтому $\theta = a_1 \ln \dfrac{e}{a_1} = a_2 \ln \dfrac{e}{a_2} = qa_1 \ln \dfrac{e}{qa_1} = qa_1 (\ln \dfrac{e}{a_1} - \ln q) = q\theta - qa_1 \ln q$. Отсюда $a_1 = \theta \dfrac{q-1}{q \ln q}$, $a_2 = \theta \dfrac{q-1}{\ln q}$. Подставим полученное выражение для a_2 в равенство $\theta = a_2 \ln \dfrac{e}{a_2}$: $\theta = \theta \dfrac{q-1}{\ln q} \ln \dfrac{e \ln q}{\theta(q-1)}$, т.е. $\ln q^{\frac{1}{q-1}} = \ln \dfrac{e \ln q}{\theta(q-1)}$. Следовательно, $q^{\frac{1}{q-1}} = \dfrac{e \ln q}{\theta(q-1)}$, т.е. $\theta = \dfrac{e \ln q}{q^{\frac{1}{q-1}}(q-1)} = e \dfrac{\ln q^{\frac{1}{q-1}}}{q^{\frac{1}{q-1}}}$. □

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ имеет конечный положительный порядок ρ,*

$$\underline{\Delta} = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{n(t)}{t^\rho} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}, \ \overline{\Delta} = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(t)}{t^\rho} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho}$$

— плотности ее нулей. Если l — индекс лакунарности последовательности $|\Lambda|$, то справедливо неравенство $\overline{\Delta} \ge l^\rho \underline{\Delta}$.

Доказательство. Если $\underline{\Delta} = 0$ или $\overline{\Delta} = +\infty$, то доказывать нечего. Пусть $0 < \underline{\Delta} \le \overline{\Delta} < +\infty$. Для каждого $\varepsilon \in (0; \underline{\Delta})$ подберем номер $k_0 = k_0(\varepsilon)$ так, чтобы $\underline{\Delta} - \varepsilon < \dfrac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}$ и $\overline{\Delta} + \varepsilon > \dfrac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho}$ при всех $k > k_0$. Используя произвольность в выборе ε, переходом к верхнему пределу в неравенствах $\dfrac{\overline{\Delta}+\varepsilon}{\underline{\Delta}-\varepsilon} > \left(\dfrac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}\right)^\rho$, $k > k_0$, получаем нужную оценку $\overline{\Delta} \ge l^\rho \underline{\Delta}$. □

Лемма 3 ([16], с.227, теорема 3 при $\mathbf{h(r) = r^\rho}$)**.** *Пусть $f(z)$ — функция из леммы 2, $\underline{\Delta}$, $\overline{\Delta}^*$ — плотности (соответственно, усредненные плотности) ее нулей ($\overline{\Delta}^* \in (0;+\infty)$). Пусть, далее, a_1 и a_2 — корни уравнения (2), l — индекс лакунарности последовательности $|\Lambda|$. Тогда $a_2 \ge a_1 l^\rho$.*

Закончив подготовительную часть, мы можем приступить к доказательству основного утверждения работы.

Теорема. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0;+\infty)$ с последовательностью нулей Λ; $\underline{\Delta}, \overline{\Delta}, \underline{\Delta}^*, \overline{\Delta}^*$ — соответствующие характеристики распределения этой последовательности. При выполнении $\overline{\Delta}^* \in (0;+\infty)$ и условия (5) существования предела $\widetilde{\Delta} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_k}|^\rho}$ справедливы равенства $\underline{\Delta} = \rho a_1 \overline{\Delta}^*$, $\overline{\Delta} = \rho a_2 \overline{\Delta}^*$, в которых, по-прежнему, a_1 и a_2 — корни уравнения (2).*

Доказательство. В проверке нуждается только соотношение $\underline{\Delta} = \rho a_1 \overline{\Delta}^*$.

1. При $\underline{\Delta}^* = 0$ получим $a_1 = 0$, $a_2 = e$. В этом случае также $\underline{\Delta} = 0$, и равенство $\underline{\Delta} = \rho a_1 \overline{\Delta}^*$, очевидно, выполняется.

2. В ситуации $\underline{\Delta}^* = \overline{\Delta}^*$ имеем $a_1 = a_2 = 1$. Такая последовательность Λ имеет плотность, что следует из неравенств (1). Поэтому справедливы известные соотношения $\underline{\Delta} = \overline{\Delta} = \rho \underline{\Delta}^* = \rho \overline{\Delta}^*$.

3. Рассмотрим теперь основной случай: $\theta := \dfrac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*} \in (0;1)$. По лемме 1 при некотором $q > 1$ выполняются равенства $a_2 = qa_1$ и $\theta = e \dfrac{\ln q^{\frac{1}{q-1}}}{q^{\frac{1}{q-1}}}$. С другой стороны, применяя

следствие из теоремы A, приходим к неравенству $\theta \geq e\dfrac{\ln c^{\frac{1}{c-1}}}{c^{\frac{1}{c-1}}}$, где $c = l^\rho$, l — индекс лакунарности $|\Lambda|$. Таким образом, $F(q) \geq F(c)$, где $F(x) := \begin{cases} x^{-\frac{1}{x-1}} \ln x^{\frac{1}{x-1}}, \ x > 1, \\ e^{-1}, \ x = 1. \end{cases}$

Поскольку функция $t(x) := \begin{cases} x^{\frac{1}{x-1}}, \ x > 1, \\ e, \ x = 1 \end{cases}$ убывает на $[1; +\infty)$ от e до 1, а функция $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ возрастает на $[1; e]$, то $F(x)$ убывает на $[1; +\infty)$. Следовательно, q и l связаны неравенством $q \leq l^\rho$. Отсюда $a_2 = qa_1 \leq l^\rho a_1$. Но по лемме 3 справедливо неравенство противоположного смысла: $a_2 \geq l^\rho a_1$. Поэтому $q = l^\rho$ и $a_2 = l^\rho a_1$. Всегда $\underline{\Delta} \geq \rho a_1 \overline{\Delta}^*$ и $\overline{\Delta} \leq \rho a_2 \overline{\Delta}^*$ (даже $\overline{\Delta} = \rho a_2 \overline{\Delta}^*$), откуда $\underline{\Delta} \geq \dfrac{a_1}{a_2}\overline{\Delta} = \dfrac{1}{l^\rho}\overline{\Delta}$, или $\overline{\Delta} \leq l^\rho \underline{\Delta}$. Подключая лемму 2, устанавливаем равенство $\overline{\Delta} = l^\rho \underline{\Delta}$. Дальнейшее просто:

$$\underline{\Delta} = \frac{\overline{\Delta}}{l^\rho} = \frac{\overline{\Delta}}{q} = \frac{\rho a_2 \overline{\Delta}^*}{q} = \rho a_1 \overline{\Delta}^*.$$

Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *Связь типов целой функции конечного порядка с плотностями ее нулей*// XIV Междунар. конф. "Математика. Экономика. Образование."IV Междунар. симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Труды. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЦВВР, 2006. – С.52–55.
2. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *Об оценках типа и нижнего типа канонических произведений порядка* $\rho \in (0; 1)$ *с положительными нулями* // Теория функ., ее прилож. и смеж. вопр. Матер. 8-й Межд. Казан. летней науч. школы-конф. – Казань: Изд-во Казан. гос.ун-та, 2007. – С.42–44.
3. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О некоторых соотношениях между плотностями распределения нулей целых функций* // Совр. пробл. теории функ. и их прил. Тезисы докл. 14-й Саратов. зимней школы, посв. памяти акад. П.Л.Ульянова. – Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 2008. – С.32–33.
4. Braichev G.G., Sherstyukov V.B. *On an extremal problem related to the completeness of a system of exponentials in the disk* // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – V.1, №1. – P.15–26.
5. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О некоторых экстремальных задачах теории целых функций* // XVI Междунар. конф. "Математика. Экономика. Образование."V Междунар. симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Тезисы докладов. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЦВВР, 2008. – С.94–95.
6. Хабибуллин Б.Н. *О типе целых и мероморфных функций* // Матем.сб. – 1992. – Т.183, №11. – С.35–44.
7. Попов А.Ю. *О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности* // Вестн. МГУ. Сер.1. Матем. Мех. – 1999. – №5. – С.48-52.
8. Попов А.Ю. *Наименьший возможный тип при порядке* $\rho < 1$ *канонических произведений с положительными нулями заданной верхней* ρ*-плотности* // Вестн. МГУ. Сер.1. Матем. Мех. – 2005. – №1. – С.31–36.
9. Хабибуллин Б.Н. *Последовательности нулей для весовых пространств голоморфных функций* // Теория функ., ее прилож. и смеж. вопросы. Матер. 8-й Межд. Казан. летней науч. школы-конф. – Казань: Изд-во Казан. гос.ун-та, 2007. – С.255–258.

10. Хабибуллин Б.Н., Цыганов Ш.И. *Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты. II. Целые функции* // Матем.сб. (в печати).

11. Rubel L.A. *Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V.83. – P.417-429.

12. Malliavin P., Rubel L.A. *On small entire functions of exponential type with given zeros* // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – V.89. – P.175–206.

13. Седлецкий А.М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. – М.: Физматлит, 2005.

14. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2006.

15. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М: Гостехиздат, 1956.

16. Брайчев Г.Г. Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. – М: Прометей, 2005.

17. Брайчев Г.Г. *Индекс лакунарности* // Матем. заметки. – 1993. – Т.53, №6. – С.3–10.

МИФИ, Москва
braichev@mail.ru
shervb73@gmail.com

Поступило 15.06.2008